


NOORDHOFF'S VERZAMELING VAN WISKUNDIGE WERKEN




LEERBOEK

DER

THEORETISCHE REKENKUNDE

DOOR

Dr. F. SCHUH

EERSTE DEEL

P. NOORDHOFF. 1919 GRONINGEN.

J. v. SCHAIK.

the
university of
connecticut
libraries



BOOK 512.81.SCH79 v.1 c.1
SCHUH # LEERBOEK DER THEORETISCHE
REKENKUNDE



3 9153 00010849 0

512.81/Sch79

Arnold Drexler
December 1919.

NOORDHOFF's VERZAMELING
VAN WISKUNDIGE WERKEN.
DEEL 5.

NOORDHOFF's VERZAMELING

VAN

WISKUNDIGE WERKEN.

DEEL 5.

Prof. Dr. F. SCHUH.

◻ ◻ ◻ ◻ LEERBOEK DER ◻ ◻ ◻ ◻ THEORETISCHE REKENKUNDE.

EERSTE DEEL.

P. NOORDHOFF. — 1919. — GRONINGEN.

LEERBOEK

DER

THEORETISCHE REKENKUNDE,

DOOR

Dr. FRED. SCHUH,

HOOGLEERAAR TE DELFT.

EERSTE DEEL:

NATUURLIJKE GETALLEN EN CARDINAALGETALLEN.
HET REKENEN IN TALSTELSELS EN MET POSITIEVE EN NEGATIEVE GETALLEN.
BINOMIUM VAN NEWTON EN DE STELLINGEN VAN FERMAT EN EULER.
ONBEPAALDE VERGELIJKINGEN EN KENMERKEN VAN DEELBAARHEID.
ONTBINDING DER FACULTEITEN.

P. NOORDHOFF. — 1919. — GRONINGEN.

512.81
Sch79
v.1

VOORBERICHT.

Nu hiermede het eerste deel van mijn „Leerboek der Theoretische Rekenkunde" verschijnt is het mij een behoefte mijn dank te betuigen aan den heer Dr. P. J. H. Baudet, die zoo bereidwillig geweest is de drukproeven mede te lezen. Van verschillende zijner opmerkingen heb ik gaarne gebruik gemaakt, waardoor het werk hier en daar niet onbelangrijke verbeteringen heeft ondergaan.

Ook aan den heer Noordhoff, die zich veel moeite voor behoorlijke uitvoering gegeven heeft, komt mijn dank toe.

Den Haag, September 1918. FRED. SCHUH.

Digitized by the Internet Archive
in 2013

http://archive.org/details/leerboekdertheor00schu

INHOUD.

---

[1] De cursief gedrukte opschriften komen in den tekst niet voor.

[1] Zie de noot van blz. VII.

[2] De met * gemerkte nummers kunnen worden overgeslagen (zie blz. XXIV).

---

[1]) Zie noot 2 van blz. VIII.

INLEIDING.

In dit leerboek wordt de rekenkunde behandeld geheel van het begin af, zonder dat daarbij eenige feitelijke wiskundige kennis van den lezer aangenomen wordt. Een beroep op bekend ondersteld dingen is dan ook nergens geschied (van eenige geheel bijkomstige opmerkingen afgezien), ook niet stilzwijgend, zoodat van al het behandelde de motiveering in het boek zelf te vinden is. Dit wil natuurlijk niet zeggen, dat het daarom geschikt is om de rekenkunde er uit te leeren als men nog in het geheel niets van wiskunde weet, daar (zooals bij vluchtig inzien reeds kan blijken) een zekere rijpheid van oordeel en vertrouwdheid met de eerste beginselen der bewijsvoering ondersteld wordt. Het doel is dan ook geweest den lezer, die de eenvoudigste rekenkundige eigenschappen reeds kent en de gewone routine in het rekenen bezit, te doen zien op welke wetenschappelijke grondslagen deze hem bekende zaken berusten. Hierbij zij vooral gewezen op de vorming van het ***begrip „natuurlijk getal"*** met de daaraan verbonden eigenschappen, op de behandeling van de algemeen bekende ***schrijfwijze dier natuurlijke getallen in een talstelsel*** met de verklaring der niet minder bekende ***rekenoperaties*** (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en deelen), zooals deze in een talstelsel worden uitgevoerd, alsook op de ***invoeringswijze der negatieve geheele getallen*** en de daarop steunende bewijzen voor de geldigheid van de bekende rekenwetten der optelling en vermenigvuldiging (commutatieve eigenschap enz.) ook na die invoering. Ongetwijfeld zal bestudeering dezer onderwerpen, waarvoor in dit leerboek een groote plaats is ingeruimd, een dieper inzicht in deze belangrijke zaken verschaffen en tot

vorming van een juist en helder begrip dienaangaande medewerken, iets dat aan het wiskundig inzicht in het algemeen ongetwijfeld ten goede zal komen.

Zonder slaafs de exameneischen te volgen is dit leerboek in het bijzonder bestemd voor studeerenden voor de akte Ki. Het stelt hun in staat zich omtrent de behandelde onderwerpen volledig te oriënteeren, zoodat zij, als het leerboek in zijn geheel verschenen is, daarin een volledig overzicht over de rekenkunde, voor zoover hun studie betreft, zullen bezitten met aanwijzing van allerlei verwante onderwerpen, die min of meer daarbuiten vallen. Bovendien zal de lezer verschillende onderwerpen aantreffen, die gewoonlijk tot de hoogere stelkunde gerekend worden, maar die, ten gevolge van het nauwe verband tusschen reken- en stelkunde moesten worden opgenomen. Zoo vindt men in dit deel de leer der permutaties en combinaties (ook herhalingscombinaties en permutaties bij gelijke elementen) behandeld, alsmede het binomium van Newton en de formule voor de n^{de} macht van een veelterm.

Er zij hier nog op gewezen welke onderdeelen voor de studie voor Ki voornamelijk van belang zijn. Vooreerst noemen we de ***eigenschappen der optelling, vermenigvuldiging en machtsverheffing,*** inzonderheid de commutatieve, associatieve en distributieve eigenschappen (n⁰. 38—59, 89—106, 117—126); vervolgens de ***bewijsmethode door volledige inductie*** (n⁰. 62—64), de ***merkwaardige producten en quotiënten*** (n⁰. 163—166, 322, 631—632), de voor de rekenkunde zoo bij uitstek belangrijke ***theorie der deelbaarheid*** en ***ontbinding in priemfactoren*** (n⁰. 167—181, 184—212, 391—392, 402—403), de ***beteekenis van het getal nul*** (n⁰. 308—316), de theorie der ***permutaties en combinaties*** (n⁰. 324—343), het ***binomium van Newton*** en de ***formule voor de n^{de} macht van een polynomium*** (n⁰. 353—358, 363—369, 633—634), de ***stellingen van Fermat en Euler*** (n⁰. 384—390), die bij allerlei rekenkundige quaesties, b.v. kenmerken van deelbaarheid, een rol spelen (zie n⁰. 716, 733 en 735), de formules voor ***het aantal, de som en het product der deelers van een getal*** (n⁰. 393—400), de theorie der ***onbepaalde vergelijkingen*** (n⁰. 642—669), de ***kenmerken van deelbaarheid*** (n⁰. 696—722, 727—749,

753—755, 760—767, 774—780) en de *formule van Legendre ter ontbinding van n!* (n⁰. 831—838).

Gewenscht is meer dan de opgenoemde nummers te bestudeeren, waarbij men echter veilig die, welke in den inhoud met * gemerkt zijn, kan overslaan. Natuurlijk is hiermede geenszins gezegd, dat het in de gemerkte nummers voorkomende onbelangrijk is; integendeel zal de lezer, die de rekenkunde om haar zelf bestudeert, daarin, naar wij hopen, aanleiding tot verdere studie vinden.

HOOFDSTUK I.

NATUURLIJKE GETALLEN.

---

§ 1. Natuurlijke getallen in verband met het tellen.

1. Definitie der natuurlijke getallen. Onder de *natuurlijke getallen* verstaat men de *rij teekens*

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots\ldots, \quad (1)$$

waarbij op ieder getal [1]) een ander getal volgt. Ook gaat aan ieder getal een ander getal vooraf, behalve aan het getal 1, waarmede de rij begonnen wordt.

Iedere twee teekens der rij (1) worden verschillend gedacht.

Daar op ieder getal [1]) der rij weer een ander volgt, is deze niet in haar geheel neer te schrijven; d. w. z. men kan niet een getal aanwijzen, waarmede de rij eindigt. Dit bedoelt men als men zegt, *dat de rij oneindig voortloopt.*

2. Definitie van grooter en kleiner. Is n een natuurlijk getal, dan worden de getallen, die bij het neerschrijven der rij (1) na n worden neergeschreven, *grooter dan* n genoemd, terwijl men n *kleiner dan* deze getallen noemt. Is p een dier getallen, dan schrijft men dit op een der twee volgende wijzen:

$$p > n \quad \text{(lees: } p \text{ grooter dan } n\text{)},$$
$$n < p \quad \text{(lees: } n \text{ kleiner dan } p\text{)}\ ^{2}).$$

---

[1]) Zoolang nog geen andere getallen zijn ingevoerd is met „getal" steeds een natuurlijk getal bedoeld.

[2]) Men zou met de invoering van het teeken > kunnen volstaan, daar $n < p$ ook als $p > n$ te schrijven is. Het levert echter gemak op zoowel de eene als de andere schrijfwijze te kunnen kiezen.

Zoowel het een als het ander drukt uit, *dat men bij het neerschrijven der rij* (*1*) *het getal* n *eerder bereikt dan het getal* p.

3. Uit de in n⁰. 2 gegeven definitie volgt:

Zijn m *en* n *twee verschillende getallen, dan geldt steeds één en slechts één der betrekkingen:*

$$m < n, \ m > n.$$

Laat men ook de mogelijkheid toe, dat m en n hetzelfde getal voorstellen, in welk geval men m en n ***gelijk*** noemt (in formule $m = n$), dan kan men de eigenschap ook zoo uitspreken:

Bij twee getallen m *en* n *geldt steeds één en slechts één der drie betrekkingen:*

$$m = n, \ m > n, \ m < n.$$

In de beide laatste gevallen noemt men m en n ***ongelijk*** en schrijft dit:

$$m \neq n.$$

4. Uit de definitie van n⁰. 2 volgt verder, *dat voor ieder getal* n *geldt:*

$$n \geqq 1,$$

waarbij $\geqq$ een afkorting voor „$>$ of $=$" is. Dit kan ook zoo worden uitgedrukt, *dat 1 het kleinste getal is.*

Er is echter geen grootste getal, daar op ieder getal een ander volgt, dat krachtens de definitie van n⁰. 2 grooter is.

5. Transitieve eigenschap van het begrip grooter. De betrekking (of het praedicaat) „grooter" heeft de volgende eigenschap:

Geldt voor de getallen m, n *en* p:

$$p > n \quad \text{en} \quad n > m, \tag{2}$$

dan is ook:

$$p > m. \tag{3}$$

Immers de eerste ongelijkheid (2) drukt uit, dat, als bij het neerschrijven der rij (1) het getal p wordt neergeschreven, n reeds neergeschreven is, terwijl verder uit de tweede ongelijkheid (2) volgt, dat dan ook m reeds neergeschreven is. Hieruit besluit men tot (3).

6. De eigenschap van n⁰. 5 wordt de ***transitieve eigenschap*** (eigenschap van het overdraagbaar zijn) *van het praedicaat*

„grooter" genoemd. De beide praedicaten $>$ kunnen nl. van de getallenparen p, n en n, m op het getallenpaar p, m worden overgedragen; hierbij worden de getallenparen p, n en n, m door weglating van het gemeenschappelijke getal n tot p, m samengetrokken.

Men kan de eigenschap van n⁰. 5 natuurlijk even goed met het teeken $<$ formuleeren, *zoodat ook het praedicaat $<$ de transitieve eigenschap bezit* [1]).

Opgemerkt zij nog, dat de beide ongelijkheden (2) ook korter aldus geschreven worden:

$$p > n > m. \tag{4}$$

De transitieve eigenschap drukt dan uit, dat men uit (4) het middelste getal n en een der teekens $>$ kan weglaten.

7. Grondeigenschappen van getallen. De eigenschap van n⁰. 3 en de transitieve eigenschap van het praedicaat $>$ behooren tot een groep van eigenschappen, die de *grondeigenschappen der getallen* genoemd worden. Hieronder verstaat men die eigenschappen der getallen, die slechts kunnen worden bewezen door van de definities der getallen gebruik te maken.

Door na elkaar dezelfde of verschillende grondeigenschappen toe te passen kan men daaruit andere eigenschappen afleiden, die ***afgeleide eigenschappen*** heeten.

8. Een voorbeeld van een afgeleide eigenschap is:

Geldt voor de getallen m, n, p, q:

$$q > p, \quad p > n \quad \text{en} \quad n > m$$

(*of kortweg geschreven $q > p > n > m$*), *dan is:*

$$q > m.$$

Uit $q > p > n$ volgt nl. $q > n$, waarna men uit $q > n > m$ verder tot $q > m$ besluit. Bij dit bewijs is tweemaal de grondeigenschap van n⁰. 5 toegepast.

Het is duidelijk, *dat de transitieve eigenschap ook tot meer dan vier getallen is uit te breiden.*

---

[1]) Ook het praedicaat $=$ bezit de transitieve eigenschap. Dit is echter iets geheel van zelf sprekends, daar bij natuurlijke getallen het gelijk zijn beteekent geheel hetzelfde zijn.

9. Zooals men aan het bewijs van n⁰. 8 kan waarnemen, is het kenmerkende van een afgeleide eigenschap, dat deze bewezen kan worden zonder op de definitie der getallen in te gaan, uitsluitend door grondeigenschappen aan elkaar te rijgen. Neemt men de eigenschap van n⁰. 5 aan, dan heeft men zich bij het bewijs van n⁰. 8 niet om de beteekenis van de letters en van het teeken $>$ te bekommeren.

10. De onderscheiding tusschen grondeigenschappen en afgeleide eigenschappen levert het voordeel, dat men bij latere uitbreidingen van het getalbegrip (achtereenvolgens tot aantallen, geheele getallen, meetbare getallen en reëele getallen), waarbij de letters iets anders dan natuurlijke getallen voorstellen en ook het teeken $>$ een andere beteekenis heeft (evenals de later in te voeren teekens $+$ en $\times$), slechts de grondeigenschappen heeft aan te toonen om verzekerd te zijn, dat de gewone rekenregels geldig gebleven zijn. De afgeleide eigenschappen gelden dan nl. ook, daar de bewijzen dier afgeleide eigenschappen uit de grondeigenschappen onveranderd gebleven zijn.

Genoemde onderscheiding levert daardoor een groot voordeel, daar ze ons ontslaat de afgeleide eigenschappen (die talrijker en gecompliceerder zijn dan de grondeigenschappen) telkens opnieuw aan te toonen.

11. Tellen van een hoeveelheid. Wanneer men de dingen of *elementen* van een hoeveelheid [1]) (of verzameling) een voor een aanwijst en daarbij dit aanwijzen vergezeld doet gaan van het nèerschrijven der getallen van de rij (1) (of het uitspreken der woorden „een", „twee", „drie" enz.) zegt men, *dat men de elementen der hoeveelheid telt.* Ondersteld wordt daarbij, *dat bij het aanwijzen van een element der hoeveelheid één en slechts één getal wordt neergeschreven* (of uitgesproken) en *dat een reeds aangewezen element niet nog eens wordt aangewezen;* hiervoor

---

[1]) Wanneer we van een hoeveelheid spreken wordt, zoo het tegendeel niet gezegd is, aangenomen, *dat die hoeveelheid minstens één element bevat.*

kan b.v. gezorgd worden door de aangewezen elementen te merken [1]) of uit de hoeveelheid te verwijderen.

12. Het getal, waarvan het neerschrijven (of uitspreken) vergezeld gaat van het aanwijzen van een bepaald element eener hoeveelheid H, wordt het ***rangnummer*** van dit element genoemd. Is dit rangnummer r, dan noemen we het bijbehoorende element ook *het* r^{de} *element van* H*;* gewoonlijk wijzen we dit aan als E_r.

Bevat de hoeveelheid meer dan één element, dan hangt het natuurlijk geheel van onze willekeur af welk harer elementen E_1 heet, dus welk het element met rangnummer 1 is, daar bij het neerschrijven van het getal 1 het daarbij aan te wijzen element van H naar willekeur uit de elementen van H gekozen kan worden. Iets dergelijks geldt voor E_2, enz. Het rangnummer van een bepaald element van H is dus niet door de hoeveelheid bepaald, maar hangt van de wijze van tellen af.

13. Bij het tellen der elementen van een hoeveelheid H kan het voorkomen, dat op een zeker oogenblik alle elementen van H zijn aangewezen, dus voorzien van een rangnummer. De telling is dan afgeloopen.

Is n het rangnummer van het element, met het aanwijzen waarvan de telling besloten wordt, dan wordt n het ***resultaat der telling*** genoemd.

Het is echter niet zeker, dat een telling tot een resultaat voert, daar het kan voorkomen, dat de telling nooit afloopt, dus dat er nog steeds elementen zonder rangnummer overblijven hoe lang men ook met tellen doorgaat (nader hierover in n°. 26—31 en § 8 van dit hoofdstuk).

14. Is n het resultaat der telling van een hoeveelheid H, *dan zijn de daarbij toegekende rangnummers de getallen, die* $\leqq n$ *zijn. Is* N *de hoeveelheid dier getallen, dan behoort dus bij ieder element van* H *één en slechts één getal van* N (het rangnum-

---

[1]) De te tellen dingen behoeven niet materieel te zijn, maar kunnen ook begrippen zijn. Het woord „merken" is dan natuurlijk niet letterlijk op te vatten.

mer van dat element) *en omgekeerd bij ieder getal van N één en slechts één element van H.*

Men drukt dit uit door te zeggen, *dat er een een-eenduidige correspondentie* of verwantschap (wijze van bijeenbehooren) *bestaat tusschen de elementen van H en de getallen van N.* Ook zegt men dan, *dat de hoeveelheid H **afgebeeld** is op de hoeveelheid N der getallen, die* $\leqq n$ *zijn.* Het tellen der hoeveelheid (of liever van de elementen daarvan) is het proces, waardoor men tracht zulk een afbeelding voor een of ander getal n tot stand te brengen.

15. Hoofdeigenschap van het tellen. Onder een ***deel** D van een hoeveelheid H* verstaat men een hoeveelheid, waarvan ieder element ook element van H is (onverschillig of het omgekeerde al dan niet geldt). In het bijzonder is dus ook H zelf een deel van H.

Is het deel D van H niet met H identiek, d. w. z. *bevat H minstens één element, dat niet tot D behoort* (of, anders gezegd, is H geen deel van D), dan wordt D een ***echt deel** van H* genoemd.

16. *Onderstel, dat de hoeveelheid H afgebeeld is op de hoeveelheid N der getallen, die* $\leqq n$ *zijn. Zij het deel D van H eveneens op N afgebeeld.* De eerste afbeelding noemen we A, de tweede A'.

Zij E_1 het element van H, dat bij de afbeelding A met het getal 1 correspondeert, en E_1' het element van D, dat bij de afbeelding A' met 1 correspondeert. Zijn de elementen E_1 en E_1' verschillend, dan brengen we in de afbeelding A die wijziging, dat we de elementen E_1 en E_1' verwisselen. D. w. z. we laten E_1' met 1 correspondeeren en E_1 met het getal, dat bij de afbeelding A aanvankelijk met E_1' correspondeerde. De afbeelding, waarin A op deze wijze overgaat, noemen we A_1; zijn E_1 en E_1' hetzelfde, in welk geval de genoemde wijziging achterwege blijft, dan verstaan we onder A_1 de afbeelding A zelf. In elk geval is A_1 dus een afbeelding van H op N, waarbij met het getal 1 hetzelfde element correspondeert als bij de afbeelding A'.

Zij verder E_2 het element van H, dat bij de afbeelding A_1, en

E_2' het element van D, dat bij de afbeelding A' met het getal 2 correspondeert. Zijn E_2 en E_2' verschillend, dan brengen we in de afbeelding A_1 de wijziging bestaande in het verwisselen van E_2 en E_2'. Hierdoor ontstaat een afbeelding A_2 (die, als E_2 en E_2' hetzelfde zijn, dezelfde is als A_1) van H op N, waarbij met de getallen 1 en 2 dezelfde elementen correspondeeren als bij de afbeelding A'.

Zoo doorgaande kan men een afbeelding A_3 van H op N vormen, waarbij met de getallen 1, 2 en 3 dezelfde elementen correspondeeren als bij de afbeelding A', enz., waardoor men ten slotte een afbeelding A_n van H op N verkrijgt, waarbij ieder getal van N met hetzelfde element correspondeert als bij de afbeelding A'. Hierin ligt opgesloten, dat ieder element van H tot D behoort, dus *dat het deel D van H met H identiek is.*

17. In n⁰. 16 is gebleken, dat, als een hoeveelheid H en een deel D van H beide op de hoeveelheid N der getallen, die $\leqq n$ zijn, zijn afgebeeld, D met H identiek is. Hieruit volgt:

Is een hoeveelheid H op de hoeveelheid N der getallen, die $\leqq n$ zijn, afgebeeld, dan is een echt deel van H niet op N af te beelden.

18. Uit deze eigenschap leidt men verder af:

Het is niet mogelijk, dat een hoeveelheid H zoowel op de hoeveelheid M der getallen $\leqq m$ als op de hoeveelheid N der getallen $\leqq n$ is af te beelden, $m \neq n$ ondersteld.

Immers heeft men $m < n$ en is H op N afgebeeld, dan ontstaat uit die afbeelding, door de getallen $> m$ en de correspondeerende elementen van H weg te laten, een afbeelding van een echt deel van H op M. Dit is volgens de eigenschap van n⁰. 17 niet te vereenigen met een afbeelding van H op M.

19. Uit het in n⁰. 17 en 18 gevondene blijkt:

Is n het resultaat eener telling van een hoeveelheid H, dan voert ook iedere andere telling van H tot dit resultaat.

De eigenschap van n⁰. 18 drukt nl. uit, dat het uitgesloten is, dat bij een tweede telling de hoeveelheid reeds met het m^{de} element is uitgeput, waarin $m < n$ is (d. w. z. dat alle elementen

van H zijn aangewezen als het getal m is neergeschreven). Verder is het volgens de eigenschap van n°. 17 uitgesloten, dat de hoeveelheid met het n^{de} element nog niet is uitgeput (dus uitgesloten, dat er rangnummers $> n$ verschijnen).

De eigenschap betreffende de *ondubbelzinnigheid van het resultaat eener telling* noemen we de ***hoofdeigenschap van het tellen.*** Ook spreekt men wel van de *hoofdeigenschap der rekenkunde* [1]).

---

20. Aantal elementen van een hoeveelheid. Is bij een hoeveelheid H het resultaat eener telling n, dan hangt het getal n volgens de eigenschap van n°. 19 alleen van de beschouwde hoeveelheid en niet van de wijze van tellen af. Dit getal n wordt het ***aantal** elementen der hoeveelheid* genoemd, terwijl men ook zegt, *dat de hoeveelheid n elementen bevat.*

21. Wanneer we zeggen, *dat het aantal elementen eener hoeveelheid alleen van die hoeveelheid afhangt*, wordt natuurlijk ondersteld, dat niet alleen de hoeveelheid, als één geheel beschouwd, gegeven is, maar ook nog wat onder elementen der hoeveelheid te verstaan is, dus welke gedeelten der hoeveelheid men met den naam van elementen wenscht te bestempelen. Bij het tellen van een partij schoenen b.v. maakt het verschil of men iederen schoen als een element der hoeveelheid beschouwt, dan wel onder een element een paar bijeenbehoorende schoenen verstaat.

22. Zegt men van een hoeveelheid H, *dat ze n elementen bevat*, dan wil dit zeggen, *dat H op de hoeveelheid N der getallen, die $\leqq n$ zijn, is af te beelden.* Deze afbeelding is zeker mogelijk als de hoeveelheid H met N identiek is, daar men dan met ieder getal van H datzelfde getal (als getal van N) kan laten correspondeeren, dus aan ieder getal van H dat getal zelf als rangnummer kan toekennen. Hieruit besluit men:

Het aantal getallen, die $\leqq n$ zijn, bedraagt n.

---

[1]) Deze eigenschap wordt soms ten onrechte als een axioma beschouwd.

Dit doet tevens zien, *dat er voor ieder getal n hoeveelheden bestaan, die n tot aantal hebben.*

23. Bevatten twee hoeveelheden H en H' beide n elementen, dan kunnen ze beide op de in n⁰. 22 beschouwde hoeveelheid N worden afgebeeld. Daardoor zijn H en H' ook op elkaar afgebeeld, daar men een element van H en een van H' als correspondeerend kan beschouwen als ze bij de afbeelding op N hetzelfde rangnummer bezitten [1]).

Is omgekeerd gegeven, dat H en H' op elkaar zijn af te beelden, en bevat H n elementen, dan geldt dit ook voor H'; immers men kan de rangnummers van de elementen van H op de correspondeerende elementen van H' overdragen, waardoor men een afbeelding van H' op N verkrijgt [1]).

We vinden dus:

Bevat de hoeveelheid H n elementen, dan bevat de hoeveelheid H′ dan en alleen dan n elementen als H en H′ op elkaar kunnen worden afgebeeld.

24. Aantal elementen van een deel eener hoeveelheid. Zij H een hoeveelheid met n elementen en D een echt deel (zie n⁰. 15) van H. Men kan nu de telling van H zoo uitvoeren, dat men, bij het toekennen van rangnummers aan de elementen van H, steeds elementen van D kiest zoolang D nog niet is uitgeput (dus zoolang nog niet alle elementen van D zijn aangewezen). Men verkrijgt daardoor een telling van D, welke telling afloopt (dus tot een resultaat voert), daar ze het begin vormt van een telling van H, die afloopt.

Is m het resultaat der telling van D, dan is noodzakelijk $m < n$, daar men anders bij voortzetting der telling (waardoor een telling van H ontstaat) elementen van H zou krijgen met rangnummers, die $> n$ zijn, in strijd met de omstandigheid, dat n het resultaat van iedere telling van H is. We vinden dus:

Is H een hoeveelheid met n elementen en D een echt deel van H, dan is het aantal m der elementen van D kleiner dan n.

Is slechts gegeven, *dat D een deel van H is, dan kan men*

---

[1]) Vergelijk de eigenschap van n⁰. 216.

slechts tot $m \leqq n$ *besluiten*, waarbij het teeken = geldt als D met H identiek is.

25. Is H een hoeveelheid met n elementen en is de hoeveelheid H' af te beelden op een echt deel D van H, dan bevat H' (volgens de eigenschap van n⁰. 23) m elementen, waarin m het aantal elementen van D is. Volgens de eigenschap van n⁰. 24 is nu $m < n$.

Is van de hoeveelheid H' omgekeerd gegeven, dat ze m elementen bevat voor $m < n$, dan kan men daaruit besluiten, dat H' op een echt deel van H is af te beelden. Immers uit de afbeelding van H op de hoeveelheid N der getallen $\leqq n$ leidt men, door weglating van de rangnummers $> m$ met de bijbehoorende elementen van H, een afbeelding af van een echt deel D van H op de hoeveelheid M der getallen $\leqq m$. Daar ook de hoeveelheid H' op M is af te beelden, is H' af te beelden op D.

We vinden dus:

Is H een hoeveelheid met n elementen, dan bevat de hoeveelheid H' dan en alleen dan een aantal elementen, dat $<$ *n is, als H' op een echt deel van H is af te beelden.*

26. Eindige en oneindige hoeveelheden. *Een hoeveelheid, waarbij de telling afloopt* (tot een resultaat voert) wordt ***eindig*** genoemd. Loopt de telling niet af, dan heet de hoeveelheid ***oneindig*** of ***transfiniet.***

Bij een eindige hoeveelheid H is er dus een getal n, waarvoor H af te beelden is op de hoeveelheid N der getallen $\leqq n$; bij een oneindige hoeveelheid is zulk een getal n niet aanwezig. Spreken we van een *hoeveelheid met n elementen*, dan ligt daarin dus opgesloten dat ze eindig is.

Uit het eerste deel van het betoog van n⁰. 24 blijkt, *dat een deel van een eindige hoeveelheid weer een eindige hoeveelheid is.*

27. *Een eindige hoeveelheid is niet op een echt deel van zich zelf af te beelden.*

Zij nl. de eindige hoeveelheid H (met n elementen) afgebeeld op de hoeveelheid N der getallen $\leqq n$ en D een echt deel van H. Onderstel, dat D op H is af te beelden. Dan is (daar ook

N op H is af te beelden) een afbeelding van D op N mogelijk [1]. Dit komt in strijd met de eigenschap van n⁰. 17, zoodat de onderstelling, dat D op H is af te beelden, onjuist is.

Men kan het bewijs ook leveren door op te merken, dat volgens de eigenschap van n⁰. 24 $m < n$ is als m het aantal elementen van D voorstelt. Hieruit volgt in verband met de eigenschap van n⁰. 23, dat D en H niet op elkaar zijn af te beelden.

28. Een *voorbeeld van een oneindige hoeveelheid* levert de hoeveelheid gevormd door alle natuurlijke getallen, die we kortweg als de *hoeveelheid der natuurlijke getallen* aanduiden. Dit ziet men onmiddellijk in door aan ieder getal dier hoeveelheid dat getal zelf als rangnummer toe te kennen; na het toekennen van een rangnummer aan een getal is nl. het op dat getal volgende getal nog zonder rangnummer (dus nog niet aangewezen), zoodat de telling niet afloopt.

Ook kan men aldus redeneeren. Onderstel, dat de hoeveelheid G der natuurlijke getallen op de hoeveelheid N der getallen $\leqq n$ was afgebeeld. Door uit G de getallen $> n$ en uit N de daarmede correspondeerende getallen weg te laten krijgt men de eindige hoeveelheid N op een echt deel van zich zelf afgebeeld, in strijd met de eigenschap van n⁰. 27.

29. De eigenschap van n⁰. 27 geldt voor een oneindige hoeveelheid niet, zooals de hoeveelheid G der natuurlijke getallen doet zien. Vormen we nl. een echt deel G_1 van G door uit G het getal 1 weg te laten, dan kan men G op G_1 afbeelden door het getal 1 van G met het getal 2 van G_1 te laten correspondeeren, het getal 2 van G met het getal 3 van G_1, enz., waarbij dus ieder getal van G met het daarop volgende, als getal van G_1, correspondeert. Het blijkt dus, *dat de hoeveelheid der natuurlijke getallen op een echt deel van zich zelf is af te beelden.*

30. Bij een oneindige hoeveelheid H kan het in n⁰. 11 beschreven telproces onbepaald ver worden voortgezet, waarbij dan ieder

---

[1]) Door aan de elementen van D dezelfde rangnummers toe te kennen als aan de correspondeerende elementen van H.

getal ten slotte als rangnummer van een element van H optreedt. *Men krijgt op deze wijze een deel D van H op de hoeveelheid G der natuurlijke getallen afgebeeld.*

Zij E_1 het element van D met het rangnummer 1. Door E_1 uit H weg te laten ontstaat de hoeveelheid H_1, die een echt deel van H is; evenzoo gaat D door weglating van E_1 in D_1 over.

Men kan nu D op D_1 afbeelden door de in n⁰. 29 besproken afbeelding van G op G_1 van de rangnummers over te dragen op de bijbehoorende elementen. Door verder de niet tot D behoorende elementen van H (zoo die er zijn) met zich zelf, maar nu als elementen van H_1 beschouwd, te laten correspondeeren krijgt men een afbeelding van H op H_1.

We vinden dus:

Een oneindige hoeveelheid is steeds op een echt deel van zich zelf af te beelden.

31. Uit de eigenschappen van n⁰. 27 en 30 blijkt, *dat een hoeveelheid eindig of oneindig is al naar gelang ze niet of wel op een echt deel van zich zelf is af te beelden.*

Het al of niet afbeeldbaar zijn op een echt deel van zich zelf is dus een kenmerk, waardoor men oneindige van eindige hoeveelheden kan onderscheiden. Bij de door Dedekind gegeven theorie der natuurlijke getallen is dit kenmerk ter definiëering van eindige en oneindige hoeveelheden gekozen.

32. Getallenhoeveelheden. We beschouwen een *getallenhoeveelheid* H, d. w. z. een hoeveelheid, waarvan de elementen natuurlijke getallen zijn. Op H passen we het telproces toe en gaan daarbij op de volgende wijze te werk. Aan een getal a_1 van H kennen we het rangnummer 1 toe. Is a_1 niet het kleinste getal van H (m. a. w. bevat H nog minstens één getal, dat $< a_1$ is), dan kennen we aan een getal a_2 van H, dat $< a_1$ is, het rangnummer 2 toe. Is a_2 niet het kleinste getal van H, dan kiezen we het getal a_3 van H met het rangnummer 3 zoo, dat $a_3 < a_2$ is, enz.

Volgens de transitieve eigenschap van n⁰. 5 zijn dan de getallen $a_2, a_3, \ldots$ alle $< a_1$ en behooren dus tot de (eindige) hoeveelheid der getallen, die $\leqq a_1$ zijn. De hoeveelheid H' der

getallen a_1, a_2, a_3, ... is dus eindig, zoodat bij het uitvoeren van het telproces op een gegeven oogenblik aan een getal a_i van H' het rangnummer i wordt toegekend en daarmede de hoeveelheid H' uitgeput is. Dit beteekent dan, dat H geen getal bevat, dat $< a_i$ is (daar men anders de rij getallen a_1, a_2, a_3, ... nog verder kon vervolgen), dus dat a_i het kleinste getal van H is. Hiermede is bewezen:

Iedere getallenhoeveelheid bevat een kleinste getal.

33. Is H een eindige getallenhoeveelheid, dan kan de telling van H als volgt uitgevoerd worden. Aan een getal a_1 van H kennen we het rangnummer 1 toe. Is a_1 niet het grootste getal van H, dan kennen we aan een getal a_2 van H, dat $> a_1$ is, het rangnummer 2 toe, enz. De hoeveelheid H' der getallen a_1, a_2, ... is een deel van H, dus eindig. Hieruit volgt op geheel soortgelijke wijze als in n⁰. 32, dat men zoo een getal a_i verkrijgt, waarmede de getallenrij a_1, a_2, ... afbreekt, welk getal a_i het grootste getal van H is. We vinden dus:

Een eindige getallenhoeveelheid bevat een grootste getal.

34. Is omgekeerd van een getallenhoeveelheid H gegeven, dat ze een grootste getal g bevat, dan is H een deel van de (eindige) hoeveelheid der getallen, die $\leqq g$ zijn, dus eindig. De eigenschap van n⁰. 33 kan dus op de volgende wijze worden omgekeerd:

Een getallenhoeveelheid, die een grootste getal bevat, is eindig.

Dit kan met de eigenschap van n⁰. 33 aldus worden samengevat:

Een getallenhoeveelheid is dan en alleen dan eindig als ze een grootste getal bevat.

35. Bij een eindige getallenhoeveelheid H heeft een getal, dat grooter is dan het grootste getal der hoeveelheid, de eigenschap grooter te zijn dan ieder getal van H.

Is omgekeerd gegeven, dat er een getal bestaat, dat grooter is dan ieder getal van H, dan blijkt op dezelfde wijze als in n⁰. 34, dat H eindig is. De tweede eigenschap van n⁰. 34 kan dus ook zoo worden gelezen:

Een getallenhoeveelheid is dan en alleen dan eindig, als er een getal bestaat, dat grooter is dan ieder getal der hoeveelheid.

36. Bij een getallenhoeveelheid H, kan men het telproces zoo uitvoeren, dat men aan het kleinste getal a_1 van H het rangnummer 1 toekent, aan het kleinste getal a_2 der hoeveelheid, die ontstaat door uit H het getal a_1 te verwijderen (het op een na het kleinste getal van H) het rangnummer 2, enz. Hierbij krijgt van twee getallen van H het grootste steeds het grootste rangnummer. Men zegt dan, *dat de getallen van H naar de grootte gerangschikt* (of genummerd) *zijn.*

Is de getallenhoeveelheid eindig en n het aantal getallen, waaruit ze bestaat, dan is het getal a_n met rangnummer n het grootste getal der hoeveelheid.

37. *Is een getallenhoeveelheid naar de grootte gerangschikt en a_i het getal der hoeveelheid met rangnummer i, dan is $a_i \geqq i$.*

Daar nl. de getallen der hoeveelheid, die $\leqq a_i$ zijn, behooren bij de rangnummers, die $\leqq i$ zijn, bevat de hoeveelheid i getallen, die $\leqq a_i$ zijn. Deze i getallen behooren tot de a_i getallen, die $\leqq a_i$ zijn, waaruit in verband met de eigenschap van n⁰. 24 volgt, dat $a_i \geqq i$ is. *Hierbij geldt het teeken = alleen dan* als de hoeveelheid der getallen van H, die $\leqq a_i$ zijn, identiek is met de hoeveelheid der getallen, die $\leqq a_i$ zijn, dus *als ieder getal, dat $\leqq a_i$ is, tot H behoort.*

---

§ 2. Optelling van natuurlijke getallen.

38. Som van twee hoeveelheden. Zijn H_1 en H_2 twee hoeveelheden [1]), dan kan men daaruit een derde hoeveelheid afleiden door H_1 en H_2 tot één hoeveelheid vereenigd te denken. Deze derde hoeveelheid wordt door $H_1 + H_2$ aangeduid en de ***som** der hoeveelheden H_1 en H_2* genoemd.

De somhoeveelheid is dus daardoor gekenmerkt, *dat ieder element van $H_1 + H_2$ tot minstens één der hoeveelheden H_1 en H_2 behoort en omgekeerd ieder element van H_1 of H_2 tot $H_1 + H_2$ behoort;* dit laatste drukt dus uit, *dat zoowel H_1 als H_2 een deel van $H_1 + H_2$ is.*

Voor de gegeven definitie is het niet noodig, dat ieder element van H_1 verschilt van ieder element van H_2, zoodat beide hoeveelheden gemeenschappelijke elementen kunnen bezitten.

39. Het afleiden van een hoeveelheid uit twee andere hoeveelheden H_1 en H_2 wordt ***verbinden*** van H_1 en H_2 genoemd. Het vormen van de som der hoeveelheden is een bijzondere wijze van verbinden; deze wordt ***optelling*** genoemd.

Bij de optelling van twee hoeveelheden H_1 en H_2 spelen H_1 en H_2 dezelfde rol (iets dat bij andere verbindingen niet het geval behoeft te zijn); m. a. w. de hoeveelheid $H_1 + H_2$ is dezelfde als $H_2 + H_1$. We schrijven dit aldus:

$$H_1 + H_2 = H_2 + H_1. \qquad (5)$$

Men drukt dit uit door te zeggen, *dat H_1 en H_2 bij optellen **verwisselbaar** of **commutatief** zijn.* Ook zegt men, dat de optelling van hoeveelheden de ***commutatieve eigenschap*** bezit, of kortweg, *dat de optelling commutatief is.*

40. Heeft men uit twee hoeveelheden H_1 en H_2 de somhoeveelheid $H_1 + H_2$ afgeleid, dan kan men deze somhoeveelheid

---

[1]) Deze behoeven niet eindig te zijn; zie verder de noot van blz. 4.

met een derde hoeveelheid H_3 verbinden (eveneens door somvorming) waardoor de hoeveelheid

$$(H_1 + H_2) + H_3 \tag{6}$$

ontstaat.

Ieder element der hoeveelheid (6) behoort tot minstens één der hoeveelheden H_1, H_2 en H_3, terwijl omgekeerd een element van minstens één dier drie hoeveelheden tot (6) behoort. De hoeveelheid (6) ontstaat dus eenvoudig door de drie hoeveelheden H_1, H_2 en H_3 tot één hoeveelheid te vereenigen.

41. Uit het voorgaande blijkt, dat bij de vorming der hoeveelheid (6) de drie hoeveelheden H_1, H_2 en H_3 dezelfde rol spelen, zoodat

$$H_1 + (H_2 + H_3)$$

dezelfde hoeveelheid is als (6). Men schrijft dit:

$$(H_1 + H_2) + H_3 = H_1 + (H_2 + H_3). \tag{7}$$

Dit drukt uit, dat het bij het vormen van de som van drie hoeveelheden onverschillig is welke twee hoeveelheden men eerst tot een somhoeveelheid verbindt. Men noemt dit de ***associatieve eigenschap*** (eigenschap der samenneembaarheid) *van de optelling van hoeveelheden* en zegt, *dat de optelling* ***associatief*** *is.*

42. Som van natuurlijke getallen. Zooals is opgemerkt kunnen in het voorgaande de beschouwde hoeveelheden ook gemeenschappelijke elementen bezitten. In het volgende nemen we echter aan, *dat bij de hoeveelheden, die opgeteld worden, gemeenschappelijke elementen ontbreken.*

De som van twee eindige hoeveelheden H_1 en H_2 is eindig.

Immers de telling van H_1 loopt af, evenals die van H_2. Men kan dus eerst H_1 tellen en daarna H_2. Wanneer men nu bij de telling van H_2 niet opnieuw met 1, 2, 3, ... begint, maar doortelt (zoodat men begint met het getal volgend op het laatste der bij de telling van H_1 toegekende rangnummers), krijgt men een telling der hoeveelheid $H_1 + H_2$, die afloopt. Dit nu beteekent, dat $H_1 + H_2$ eindig is [1]).

---

[1]) De eigenschap geldt ook nog als de hoeveelheden H_1 en H_2 gemeenschappelijke elementen hebben, hetgeen we aan den lezer overlaten aan te toonen.

43. Zijn a en b resp. de aantallen elementen der eindige hoeveelheden H_1 en H_2 (zonder gemeenschappelijke elementen), dan wordt het *aantal elementen der hoeveelheid* $H_1 + H_2$ de ***som van** a en b* genoemd; hiervoor wordt $a + b$ geschreven. De getallen a en b heeten de ***termen** der som.*

Het vormen van de som van twee getallen noemt men ***optellen.*** De optelling wordt ook als de ***eerste hoofdbewerking*** met getallen aangeduid. In plaats van „bewerking" bezigen we echter liever het woord „verbinding" en noemen de optelling de ***eerste hoofdverbinding*** (vergelijk n⁰. 39).

De verbinding optellen kan op ieder tweetal getallen worden uitgevoerd, daar ieder getal als aantal elementen van een hoeveelheid kan optreden (zie de opmerking aan het eind van n⁰. 22).

44. Betreffende de definitie van som van twee getallen willen we nog aantoonen, *dat het getal* $a + b$ *alleen van* a *en van* b *afhangt* en niet van de hoeveelheden H_1 en H_2, die bij de definitie gebezigd zijn; m. a. w., *dat* $a + b$ *door de getallen* a *en* b *ondubbelzinnig bepaald is,* of nog anders gezegd, *dat de optelling van twee getallen een ondubbelzinnige verbinding is.*

Dit nu blijkt onmiddellijk daaruit, dat, als H_1' en H_2' twee andere hoeveelheden zijn resp. met a en b elementen, de hoeveelheden $H_1 + H_2$ en $H_1' + H_2'$ op elkaar af te beelden zijn (door de elementen van H_1 te laten correspondeeren met de elementen van H_1', die hetzelfde rangnummer hebben, en evenzoo de elementen van H_2 met die van H_2'); uit die afbeeldbaarheid volgt dan verder, dat $H_1 + H_2$ en $H_1' + H_2'$ hetzelfde aantal elementen bevatten (zie de eigenschap van n⁰. 23).

45. We stellen ons voor, dat een persoon A eerst de hoeveelheid H_1 en daarna de hoeveelheid H_2 telt en dat een ander persoon B doortelt als A tot de telling van H_2 overgaat (zooals we ook bij het bewijs van n⁰. 42 hebben aangenomen). B bereikt dan het rangnummer $a + b$. We kunnen ons nu de hoeveelheden H_1 en H_2 wegdenken, waarbij van het tellen alleen het opnoemen der getallen in de behoorlijke volgorde overblijft. Bij het tweede deel der telling telt A tot b met 1 beginnend, terwijl B begint met het op a volgende getal; beide tellingen denken we ons

gelijktijdig en in hetzelfde tempo uitgevoerd. Daarbij bereikt B dan het getal $a+b$. Ook op deze wijze blijkt, *dat het getal* $a+b$ *alleen van* a *en* b *afhangt.*

Het getal $a+b$ kan dus ook gedefiniëerd worden als *het getal, dat bij het tellen bereikt wordt, beginnend met het op* a *volgende getal en medetellend met een ander, die van 1 tot en met* b *telt.*

Door $b=1$ te nemen blijkt zoo, *dat* $a+1$ *het op* a *volgende getal is.*

46. Wanneer de persoon A van n⁰. 45 van 1 tot en met b en daarbij B van $a+1$ tot en met $a+b$ telt, kunnen de door A uitgesproken getallen beschouwd worden als de rangnummers der gelijktijdig door B uitgesproken getallen. Nu zijn de door B uitgesproken getallen de getallen, die $> a$ zijn, en dus de door A uitgesproken getallen de rangnummers der getallen $> a$ als men deze naar de grootte rangschikt (zie n⁰. 36). Hieruit blijkt:

De som der getallen a *en* b *is het getal met rangnummer* b *als men de getallen, die* $> a$ *zijn, naar de grootte rangschikt.*

47. Men kan ook van meer dan twee getallen de som vormen door eerst de som van twee getallen te nemen, deze som te combineeren met het derde getal, enz. Die getallen heeten weer de ***termen der som.***

Zoo vormt men van de getallen a, b en c de som

$$a+b+c,$$

waarmede bedoeld wordt, dat eerst de som $a+b$ gevormd wordt; onder $a+b+c$ is dus te verstaan:

$$(a+b)+c.$$

Evenzoo is met $a+b+c+d$ bedoeld:

$$\{(a+b)+c\}+d. \qquad (8)$$

M. a. w. de optelling wordt van links naar rechts uitgevoerd gedacht.

48. Grondeigenschappen der optelling. De in n⁰. 39 en 41 besproken eigenschappen der optelling van hoeveelheden voeren onmiddellijk tot de overeenkomstige eigenschappen voor de optelling van getallen. Daarvoor geldt dus de ***commutatieve eigenschap***

$$a+b=b+a \qquad (9)$$

en de *associatieve eigenschap*

$$(a + b) + c = a + (b + c). \qquad (10)$$

Deze laatste eigenschap maakt, dat het voor het vervolg onnoodig is in het oog te houden of onder $a + b + c$ het eerste dan wel het laatste lid van (10) te verstaan is, dus of de optelling van links naar rechts dan wel van rechts naar links is uit te voeren.

De commutatieve en de associatieve eigenschap der optelling zijn *grondeigenschappen* (zie n⁰. 7).

49. Een andere grondeigenschap (waarbij de begrippen „som" en „grooter" gecombineerd voorkomen) is de volgende:

Is $a > b$, *dan is:*

$$a + c > b + c.$$

Zijn nl. H_1, H_2 en H_3 hoeveelheden resp. met a, b en c elementen [1]), dan volgt uit $a > b$, dat H_2 op een echt deel D van H_1 af te beelden is (zie de eigenschap van n⁰. 25). De hoeveelheid $H_2 + H_3$ is dus af te beelden op de hoeveelheid $D + H_3$, die een echt deel van $H_1 + H_3$ is (door de correspondentie tusschen H_2 en D ongewijzigd te laten en de elementen van H_3 met zich zelf te laten correspondeeren). Hieruit volgt, dat het aantal elementen van $H_2 + H_3$ kleiner is dan dat van $H_1 + H_3$.

50. Algemeene associatieve eigenschap der optelling. Uit de tot nu toe besproken grondeigenschappen kunnen weer andere eigenschappen worden afgeleid zonder van de definities der in die grondeigenschappen voorkomende begrippen gebruik te maken. Zoo leidt men uit de associatieve eigenschap, dus uit de formule (10), door tweemalige toepassing of:

$$a + b + c + d = \{(a + b) + c\} + d \;{}^{2)} = \{a + (b + c)\} + d =$$
$$= a + \{(b + c) + d\} = a + (b + c + d) \;{}^{3)},$$

dus:

$$a + b + c + d = a + (b + c + d). \qquad (11)$$

Dit is derhalve een afgeleide eigenschap.

---

[1]) Gemeenschappelijke elementen denken we weer uitgesloten.

[2]) Zie de opmerking aan het eind van n⁰. 47.

[3]) Hetzelfde resultaat kan men ook aldus bereiken:

$$\{(a + b) + c\} + d = (a + b) + (c + d) =$$
$$= a + \{b + (c + d)\} = a + \{(b + c) + d\}.$$

51. Uit (11) leidt men verder in verband met (10) af:

$$a+b+c+d+e=(a+b+c+d)+e=\{a+(b+c+d)\}+e=$$
$$=a+\{(b+c+d)+e\}=a+(b+c+d+e),$$

dus:

$$a+b+c+d+e=a+(b+c+d+e). \qquad (12)$$

Hieruit kan men verder in verband met (10) afleiden:

$$a+b+c+d+e+f=a+(b+c+d+e+f), \qquad (13)$$

enz., zoodat men algemeen bij een som van n termen heeft:

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=a_1+(a_2+a_3+\ldots+a_n). \quad (14)$$

Hierin liggen de formules (10), (11), (12) en (13) resp. als de gevallen $n=3, 4, 5, 6$ opgesloten. Voor $n=2$ gaat (14) over in $a_1+a_2=a_1+a_2$ [1]), dus in een tautologie [2]).

52. In de formule (14) ligt, zooals is opgemerkt, de grondeigenschap (10) als bijzonder geval opgesloten, zoodat (14) een uitbreiding dier grondeigenschap is.

Een nog verder gaande uitbreiding kan men aldus uit (14) afleiden:

$$a_1+a_2+\ldots+a_{m+n+p}=$$
$$=\{(a_1+a_2+\ldots+a_m)+a_{m+1}+a_{m+2}+\ldots+a_{m+n}\}+a_{m+n+1}+\ldots+a_{m+n+p}\,{}^{3)}=$$
$$=\{(a_1+a_2+\ldots+a_m)+(a_{m+1}+a_{m+2}+\ldots+a_{m+n})\}+a_{m+n+1}+\ldots+a_{m+n+p}\,{}^{4)}=$$
$$=\ a_1+a_2+\ldots+a_m+(a_{m+1}+a_{m+2}+\ldots+a_{m+n})+a_{m+n+1}+\ldots+a_{m+n+p}\,{}^{3)},$$

dus:

$$a_1+a_2+\ldots+a_{m+n+p}=$$
$$=a_1+\ldots+a_m+(a_{m+1}+\ldots+a_{m+n})+a_{m+n+1}+\ldots+a_{m+n+p}. \quad (15)$$

Dit drukt uit, *dat men bij een som van meerdere termen een willekeurig aantal opvolgende termen door hun som mag vervangen, zonder dat dit op de uitkomst van invloed is.*

We merken nog op, dat in het voorgaande voor $a_1+a_2+\ldots+a_m$ het getal a_1 genomen moet worden als $m=1$ is; m. a. w. *een som met één term is gelijk aan dien term.* Voor $a_{m+1}+a_{m+2}+\ldots+a_{m+n}$ moet dus a_{m+1} genomen worden als $n=1$ is, enz.

---

[1]) Zie de opmerking aan het eind van n⁰. 52.

[2]) D. i. een bewering, waarvan het gestelde hetzelfde zegt als het onderstelde.

[3]) Zie de opmerking aan het eind van n⁰. 47.

[4]) Zie de formule (14) van n⁰. 51.

53. Men kan de formule (15) natuurlijk ook meerdere malen toepassen, waardoor men de volgende nog algemeenere eigenschap verkrijgt:

Een som van meerdere termen verandert niet als men de termen met behoud van hun volgorde in groepen verdeelt en de termen van een zelfde groep door hun som vervangt.

We zullen dit de ***algemeene associatieve eigenschap*** noemen. Deze drukt uit, *dat men naar willekeur haakjes* (of liever paren bijeenbehoorende haakjes) *mag plaatsen of weglaten.*

Als voorbeeld noemen we:

$$a + b + c + d + e + f + g + h = a + (b + c) + d + (e + f + g + h),$$

waarbij de aantallen termen der verschillende groepen zijn: 1, 2, 1 en 4.

We merken nog op, *dat bij de uitbreiding der associatieve eigenschap alleen van den grondvorm daarvan, dus van de formule (10), gebruik gemaakt is* en niet van de commutatieve eigenschap.

54. Algemeene commutatieve eigenschap der optelling. Door alleen van den grondvorm (9) der commutatieve eigenschap gebruik te maken kan $a + b + c$ slechts in een der volgende vormen geschreven worden:

$$(a + b) + c = (b + a) + c = c + (a + b) = c + (b + a),$$

waarbij de haakjes in de beide eerste leden overtollig en slechts duidelijkheidshalve geplaatst zijn. Tot een volgorde, waarbij a en b ophouden opvolgende termen te zijn, kan men zoo niet geraken. Hieruit blijkt, *dat de commutatieve eigenschap zonder meer niet kan worden uitgebreid.*

55. Wel kan men de commutatieve eigenschap uitbreiden door ook van de associatieve eigenschap gebruik te maken. Men vindt dan:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{m-1} + a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{m+n} =$$ [1]
$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{m-1} + (a_m + a_{m+1}) + a_{m+2} + \ldots + a_{m+n} =$$
$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{m-1} + (a_{m+1} + a_m) + a_{m+2} + \ldots + a_{m+n} =$$
$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{m-1} + a_{m+1} + a_m + a_{m+2} + \ldots + a_{m+n},$$

dus:

---

[1]) Onder $m - 1$ is het aan m voorafgaande getal te verstaan.

Een som van meerdere termen verandert niet als men twee opvolgende termen verwisselt.

56. Door herhaalde toepassing der eigenschap van n⁰. 55 krijgt men de volgende uitbreiding der commutatieve eigenschap, die we de ***algemeene commutatieve eigenschap*** noemen:

Een som van meerdere termen is onafhankelijk van de volgorde dier termen,

Om dit te bewijzen heeft men slechts aan te toonen, *dat men van iedere volgorde der termen tot iedere andere volgorde kan geraken door eenige malen achtereen twee opvolgende termen te verwisselen.* Zij V de oorspronkelijke en V' de nieuwe volgorde en p de eerste term bij de volgorde V'. Zoo p bij de volgorde V niet de eerste term is, verwisselen we, uitgaande van de volgorde V, den term p achtereenvolgens met ieder der voorafgaande termen tot p eerste term geworden is. Vervolgens verwisselen we den term q, die bij de volgorde V' tweede term is, met de voorafgaande termen tot q tweede term geworden is; daarna brengen we den derden term op zijn plaats, enz., waardoor men ten slotte de volgorde V' verkrijgt.

Om b.v. van de volgorde $a+b+c+d+e+f+g$ tot de volgorde $d+b+e+c+g+a+f$ te geraken krijgt men de volgende gelijkheden:

$$\begin{aligned} & a+b+c+d+e+f+g= \\ =\; & a+b+\mathbf{d}+\mathbf{c}+e+f+g= \\ =\; & a+\mathbf{d}+\mathbf{b}+c+e+f+g= \\ =\; & \mathbf{d}+\mathbf{a}+b+c+e+f+g= \\ =\; & d+\mathbf{b}+\mathbf{a}+c+e+f+g= \\ =\; & d+b+a+\mathbf{e}+\mathbf{c}+f+g= \\ =\; & d+b+\mathbf{e}+\mathbf{a}+c+f+g= \\ =\; & d+b+e+\mathbf{c}+\mathbf{a}+f+g= \\ =\; & d+b+e+c+a+\mathbf{g}+\mathbf{f}= \\ =\; & d+b+e+c+\mathbf{g}+\mathbf{a}+f, \end{aligned}$$

waarin de verwisselde termen vet gedrukt zijn.

We merken nog op, dat uit de algemeene commutatieve eigenschap volgt, *dat men in de algemeene associatieve eigenschap*

van n⁰. 53 de woorden „met behoud van hun volgorde" kan weglaten.

57. Uitbreiding der grondeigenschap van n⁰. 49. Uit de eigenschap van n⁰. 49 leidt men in verband met die van n⁰. 5 af:
Is $a > b$ en $c > d$, dan is

$$a + c > b + d. \qquad (16)$$

Uit $a > b$ volgt nl.:

$$a + c > b + c \qquad (17)$$

en uit $c > d$:

$$b + c > b + d. \qquad (18)$$

Wegens de transitieve eigenschap van n⁰. 5 besluit men uit (17) en (18) tot (16).

58. De eigenschap van n⁰. 57 kan aldus met die van n⁰. 49 worden samengevat:
Is $a > b$ en $c \geqq d$, dan is

$$a + c > b + d.$$

Deze eigenschap is een uitbreiding der grondeigenschap van n⁰. 49, die daarin als het geval $c = d$ ligt opgesloten.

59. Uit de eigenschap van n⁰. 57 leidt men door tweemalige toepassing af:
Is $a > b$, $c > d$ en *$e > f$, dan is:*

$$a + c + e > b + d + f. \qquad (19)$$

Uit $a > b$ en $c > d$ volgt nl.:

$$a + c > b + d,$$

waaruit men in verband met $e > f$ tot (19) besluit.

Ook geldt de eigenschap als men bij een of twee der gegeven ongelijkheden het teeken $>$ door $=$ vervangt. We laten het aan den lezer over dit na te gaan, evenals de *uitbreiding tot een som van een willekeurig aantal termen.*

---

60. Bewijs der afgeleide eigenschappen door middel van hoeveelheden. De in n⁰. 50—59 besproken afgeleide eigenschappen zijn aangetoond door uitsluitend van de grondeigenschappen (die van n⁰. 5, 48 en 49) gebruik te maken. Die

afgeleide eigenschappen kunnen echter ook rechtstreeks uit de beschouwing van hoeveelheden worden bewezen op geheel overeenkomstige wijze als dit met de grondeigenschappen, waarvan ze de uitbreiding zijn, geschied is.

Heeft men nl. een som van n termen

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \tag{20}$$

en zijn $H_1, H_2, \dots, H_n$ hoeveelheden [1]), waarvan de aantallen elementen resp. $a_1, a_2, \dots, a_n$ zijn, dan is (20) het aantal elementen van de hoeveelheid $H_1 + H_2 + \dots + H_n$, die ontstaat door de hoeveelheden $H_1, H_2, \dots, H_n$ tot één hoeveelheid te vereenigen. Daar voor dit optellen van hoeveelheden ten duidelijkste de algemeene associatieve en commutatieve eigenschap (zie n⁰. 53 en 56) geldt, zijn deze ook voor optelling van getallen van toepassing.

Op soortgelijke wijze toont men de eigenschappen van n⁰. 57 en 59 rechtstreeks (d. w. z. niet via de grondeigenschappen) aan.

61. De bewijzen der afgeleide eigenschappen uit de grondeigenschappen, zooals we die in n⁰. 50—59 geleverd hebben, bieden echter boven de in n⁰. 60 besproken bewijsvoering het voordeel, *dat ze onveranderd van toepassing blijven als later het getalbegrip met andere soorten getallen is uitgebreid.* Voor die nieuwe getallen behoeft men dan slechts de juistheid der grondeigenschappen aan te toonen om verzekerd te zijn, dat ook de afgeleide eigenschappen blijven doorgaan (vergelijk n⁰. 10).

Ook levert de bewijsvoering van n⁰. 50—59 het voordeel, *dat ze met verandering van enkele woorden en teekens ook voor de vermenigvuldiging doorgaat* (zie n⁰. 96).

62. Bewijsvoering door volledige inductie. Deze berust op het volgende:

Een eigenschap, die op een getal n betrekking heeft, geldt voor ieder getal als de volgende twee dingen waar zijn:

1⁰. de eigenschap geldt voor het getal 1,

2⁰. geldt de eigenschap voor een getal n (onverschillig welk), dan geldt ze ook steeds voor het daarop volgende getal $n + 1$.

---

[1]) Zonder gemeenschappelijke elementen.

Uit het gegevene volgt nl., dat de eigenschap geldt voor $n = 2$, 3, enz., dus steeds geldig blijft bij overgang op het volgende getal. Daar men nu door telkens op het volgende getal over te gaan ieder getal bereiken kan, is inderdaad de eigenschap voor ieder getal geldig.

63. Wanneer men een eigenschap betreffende een natuurlijk getal met behulp van de eigenschap van n⁰. 62 bewijst wordt dit een *bewijs door volledige inductie* genoemd; ook spreekt men van een ***bewijs van n op n + 1*** of (naar JACOB BERNOULLI) van een ***Bernoulliaansch bewijs*** [1]).

Voor het bewijs is noodig aan te toonen, dat het in n⁰. 62 onder 1⁰. en 2⁰. gezegde vervuld is. We noemen dit resp. den *eersten en tweeden eisch voor volledige inductie.*

64. De eigenschap van n⁰. 62 kan ten duidelijkste ook aldus gewijzigd worden:

Een eigenschap, die betrekking heeft op een getal n, geldt voor ieder getal, dat $\geqq a$ *is, als de volgende twee dingen waar zijn:*

1⁰. de eigenschap is juist voor $n = a$,

2⁰. voor ieder getal n, dat $\geqq a$ *is, geldt, dat de eigenschap juist is voor het getal* $n + 1$ *als ze dat voor het getal n is.*

De eigenschap geldt dan nl. voor $a + 1$, $a + 2$, enz. [2]).

65. Definitie der optelling door volledige inductie. Een bijzonder geval der formule (10) van n⁰. 48 is

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1. \qquad (21)$$

Deze formule kan nu ook als *definitie der optelling* van

---

[1]) Deze bewijsmethode is reeds voor BERNOULLI (1686) door BLAISE PASCAL (omstreeks 1650) gevonden.

[2]) Opgemerkt zij, dat we reeds enkele malen de gelegenheid gehad hebben de bewijsvoering door volledige inductie toe te passen, b.v. bij de formule (14) van n⁰. 51. Deze toch geldt voor $n = 2$. Neemt men verder de juistheid van (14) aan voor een som van n termen, dan blijkt de juistheid voor een som van $n + 1$ termen aldus (gebruik makend van de formule (10) van n⁰. 48):

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1} = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + a_{n+1} =$$
$$= \{a_1 + (a_2 + \ldots + a_n)\} + a_{n+1} = a_1 + \{(a_2 + \ldots + a_n) + a_{n+1}\} =$$
$$= a_1 + (a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1}).$$

getallen gebezigd worden in verband daarmede, *dat $a+1$ het op a volgende getal is* (zie het aan het eind van n⁰. 45 opgemerkte).

Door volledige inductie naar b [1]) blijkt nl., *dat daardoor de som $a+b$ voor ieder getal b gedefiniëerd is.* Het omtrent $a+1$ opgemerkte doet nl. zien, dat aan den eersten eisch, en in verband met de betrekking (21), dat aan den tweeden eisch voor volledige inductie voldaan is.

In een zoodanig geval, *waarbij nog een bewijs door volledige inductie noodig is om te doen inzien, dat we inderdaad met een definitie te maken hebben*, spreken we van een ***definitie door volledige inductie.***

66. De grondeigenschappen van n⁰. 48 kunnen nu, bij de in n⁰. 65 gegeven definitie van optelling, door volledige inductie worden aangetoond.

We beginnen met het *bewijs der associatieve eigenschap*, dus van de formule (10) van n⁰. 48. We doen dit door volledige inductie naar c [2]). Voor $c=1$ gaat (10) in (21) over, zoodat aan den eersten eisch voor volledige inductie voldaan is. Om het voldaan zijn aan den tweeden eisch voor volledige inductie aan te toonen nemen we de juistheid van (10) aan en bewijzen daaruit de gelijkheid:

$$(a+b)+(c+1)=a+\{b+(c+1)\},$$

die uit (10) ontstaat door c door $c+1$ te vervangen. Dit bewijs loopt aldus:

$$(a+b)+(c+1)=\{(a+b)+c\}+1\ ^{3)}=\{a+(b+c)\}+1\ ^{4)}=$$
$$=a+\{(b+c)+1\}\ ^{3)}=a+\{b+(c+1)\}\ ^{3)}.$$

67. Voor het *bewijs der commutatieve eigenschap*, dus van de formule (9) van n⁰. 48, beginnen we met het bewijs van het bijzondere geval

$$a+1=1+a. \tag{22}$$

Dit geldt voor $a=1$. Aangetoond moet dus nog worden, dat

---

[1]) De toevoeging „naar b” duidt aan, dat de te bewijzen eigenschap als een eigenschap betreffende het getal b wordt opgevat.

[2]) Zie noot 1.

[3]) Volgens (21).

[4]) Volgens (10).

als (22) geldt ook voldaan is aan:

$$(a + 1) + 1 = 1 + (a + 1).$$

Dit bewijs loopt aldus:

$$(a + 1) + 1 = (1 + a) + 1 \ ^{1)} = 1 + (a + 1) \ ^{2)}.$$

De formule (9) bewijzen we dan verder door volledige inductie naar b. Voor $b = 1$ gaat (9) in (22) over en is dus juist. Aangetoond moet dus nog worden, dat, als aan (9) voldaan is, ook voldaan is aan:

$$a + (b + 1) = (b + 1) + a,$$

welk bewijs als volgt geleverd wordt:

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1 \ ^{2)} = (b + a) + 1 \ ^{3)} =$$
$$= b + (a + 1) \ ^{2)} = b + (1 + a) \ ^{1)} = (b + 1) + a.$$

Bij den laatsten stap van dit bewijs wordt de (in n⁰. 66) bewezen associatieve eigenschap toegepast, zoodat bij deze bewijsmethode de associatieve eigenschap aan de commutatieve vooraf behoort te gaan.

---

[1]) Volgens (22).
[2]) Volgens (21).
[3]) Volgens (9).

§ 3. Aftrekking van natuurlijke getallen.

68. Definitie der aftrekking. De ***tweede hoofdverbinding*** (of -bewerking) van twee getallen is de ***aftrekking.*** Deze wordt, ook bij alle volgende uitbreidingen van het getalbegrip, als de *omkeering van de optelling* gedefiniëerd. Bij de aftrekking is het nl. de vraag het getal x zoo te bepalen, dat

$$x + b = a \tag{23}$$

is, waarin a en b gegeven getallen zijn; deze worden resp. ***aftrektal*** en ***aftrekker*** genoemd.

Een gelijkheid als (23), die een *eisch* uitdrukt *aan een voorloopig nog onbekend getal x opgelegd en dus dient om, zoo mogelijk, daaruit het getal x te bepalen*, wordt een ***vergelijking*** genoemd.

Wegens de commutatieve eigenschap der optelling kan men voor (23) even goed schrijven

$$b + x = a. \tag{24}$$

Dit beteekent, dat bij de optelling slechts één omgekeerde verbinding behoort, dus *dat er slechts één soort van aftrekking bestaat.*

69. Aan de vergelijking (23), of (24) wat op hetzelfde neerkomt, kan niet door twee verschillende getallen x voldaan zijn. Immers was aan (23) voldaan door $x = x_1$ en ook door $x = x_2$ en was b.v. $x_1 > x_2$, dan zou men volgens de eigenschap van n^0. 49 hebben

$$x_1 + b > x_2 + b,$$

dus $a > a$, hetgeen een ongerijmdheid is (nl. in strijd met de eigenschap van n^0. 3).

Het blijkt dus, *dat de aftrekking, zoo ze mogelijk is, ondubbelzinnig is*, d. w. z. dat aan de vergelijking (23) door hoogstens één getal x kan worden voldaan. Dit is, zooals gebleken is, een onmiddellijk uitvloeisel der grondeigenschap van n^0. 49.

We merken nog op, dat de ondubbelzinnigheid der aftrekking ook zoo kan worden uitgedrukt, *dat uit*

$$x + b = y + b$$

tot $x = y$ kan worden besloten.

70. Geval, waarin de aftrekking mogelijk is. Zijn a en b de aantallen elementen der hoeveelheden H_1 en H_2 [1]), dan is H_1 een echt deel der somhoeveelheid $H_1 + H_2$, die $a + b$ elementen bevat. In verband met de eigenschap van n⁰. 24 volgt hieruit:

$$a + b > a, \tag{25}$$

m. a. w.:

De som van twee getallen is grooter dan ieder der beide termen.

71. Uit deze eigenschap volgt onmiddellijk, *dat aan de vergelijking* (23) *niet kan worden voldaan als* $b \geqq a$ *is.*

Immers voor ieder getal x geldt volgens (25):

$$x + b > b,$$

waaruit in verband met $b \geqq a$ en de transitieve eigenschap van n⁰. 5 volgt:

$$x + b > a.$$

Het getal x voldoet dus niet aan (23).

72. Is $a > b$ en zijn H_1 en H_2 hoeveelheden [1]), die resp. a en b tot aantal hebben, dan is H_2 volgens de eigenschap van n⁰. 25 op een echt deel D van H_1 af te beelden. Is nu H_3 de hoeveelheid der elementen van H_1, die niet tot D behooren, dan is:

$$H_1 = D + H_3. \tag{26}$$

Het aantal elementen van D bedraagt b (zie de eigenschap van n⁰. 23). Is c het aantal elementen van H_3, dan is blijkens (26):

$$a = b + c,$$

waaruit blijkt, dat voor $x = c$ aan de vergelijking (23) van n⁰. 68 voldaan is. De aftrekking is nu dus mogelijk.

Het bewijs neemt een eenvoudiger vorm aan door voor H_2 de hoeveelheid D zelf te nemen, waarbij men D kan laten bestaan uit de elementen van H_1, die bij de telling van H_1 rangnummers $\leqq b$ verkrijgen; H_3 bestaat dan uit de elementen van H_1 met rangnummers $> b$.

In verband met het in n⁰. 71 gevondene blijkt dus:

De aftrekking is dan en alleen dan mogelijk als het aftrektal grooter is dan de aftrekker.

73. Ander bewijs der eigenschap van n⁰. 72. Is x een willekeurig aangenomen getal, dan vormt men het getal $b + x$ door,

---

[1]) Zonder gemeenschappelijke elementen.

met $b+1$ beginnend, in hetzelfde tempo te tellen als een ander, die van 1 tot en met x telt (zie n⁰. 45). De vraag naar de mogelijkheid der aftrekking is dus dezelfde als de vraag of men met $b+1$ beginnend te tellen, het getal a kan bereiken. Dit nu is dan en alleen dan mogelijk als $a > b$ is.

Ook op deze wijze blijkt dus onmiddellijk de juistheid der eigenschap van n⁰. 72. Tevens blijkt zoo, *dat men voor $a > b$ het getal x, dat aan (23) of (24) voldoet, vindt door met 1 beginnend in hetzelfde tempo mede te tellen met een ander, die van $b+1$ tot en met a telt.*

74. Is bij de laatste uitkomst A de persoon, die van $b+1$ tot en met a, en B de persoon, die van 1 tot en met x telt, dan zijn de door B uitgesproken getallen te beschouwen als de rangnummers der door A uitgesproken getallen (vergelijk n⁰. 46), dus als de rangnummers der getallen $> b$ als men deze naar de grootte rangschikt. Hieruit volgt:

Is $a > b$, dan is het getal x, dat aan de vergelijking (23) van n⁰. 68 voldoet, het rangnummer, dat aan a toekomt, als men de getallen, die $> b$ zijn, naar de grootte rangschikt.

Deze eigenschap is ook als een gevolg van die van n⁰. 46 voor den dag te brengen.

75. Eigenschappen der aftrekking. Is $a > b$, dan wordt het getal x, dat aan de vergelijking (23) voldoet, door $a - b$ voorgesteld. Een uitdrukking als $a - b$ wordt een ***verschil*** genoemd.

Daar echter (steeds voor $a > b$) aan de vergelijking

$$x + a = b$$

niet kan worden voldaan (zie de eigenschap van n⁰. 72), heeft dan de verbinding $b - a$ geen zin (d. w. z. zoolang geen andere dan de natuurlijke getallen zijn ingevoerd), *zoodat de aftrekking niet de commutatieve eigenschap bezit.*

76. Daar de oplossing der vergelijking (23) $a - b$ genoemd is, heeft men:

$$(a - b) + b = a. \tag{27}$$

Daar $x = a$ de oplossing der vergelijking

$$x + b = a + b$$

is, heeft men ook:

$$(a + b) - b = a. \tag{28}$$

Uit de formules (27) en (28) en de eigenschappen der optelling kunnen de overige regels, volgens welke men met verschillen rekent, worden afgeleid.

We merken nog op, dat bij (27) ondersteld wordt, dat $a > b$ is, terwijl (28) altijd geldig is. Hieruit blijkt, *dat men het getal a steeds door het eerste lid van (28) kan vervangen, maar door het eerste lid van (27) alleen dan als $a > b$ is.*

77. Is $b > c$ en stelt men

$$b - c = p,$$

dan is:

$$b = p + c,$$

$$a + b = a + (p + c) = (a + p) + c,$$

$$a + p = (a + b) - c.$$

Men heeft dus:

$$a + (b - c) = (a + b) - c, \qquad (29)$$

of in woorden uitgedrukt (als we van het eerste lid, dus van $b - c$, uitgaan):

Een verschil wordt met een getal vermeerderd door het aftrektal met dat getal te vermeerderen.

Bij het bewijs der formule (29) kan men natuurlijk het invoeren van de letter p vermijden door daarvoor steeds $b - c$ te schrijven. Het bewijs wordt dan korter, maar misschien iets minder overzichtelijk, en wel als volgt:

$$\begin{aligned} a + (b - c) &= [\{a + (b - c)\} + c] - c = \\ &= [a + \{(b - c) + c\}] - c = (a + b) - c. \end{aligned} \qquad (30)$$

78. Zoowel bij het eene als bij het andere bewijs van n^0. 77 zijn we van het eerste lid van (29) uitgegaan en hebben dit lid, zoo het beteekenis heeft (dus zoo $b > c$ is) tot het tweede lid van (29) herleid. Daaruit blijkt tevens, dat dan ook de aftrekking genoemd in het tweede lid van (29) mogelijk is. Dit ziet men trouwens ook direct daaruit, dat $a + b > b$ is (zie n^0. 70), zoodat uit $b > c$ volgt $a + b > c$ (zie de eigenschap van n^0. 5).

Omgekeerd is het tweede lid van (29), zoo dit beteekenis heeft (dus als $a + b > c$ is), niet steeds door het eerste lid te vervan-

gen. Dit is nl. alleen mogelijk als $b > c$ is, daar slechts dan het eerste lid van (29) zin heeft [1]).

Door nu van het tweede lid der formule (29) (dus van $a + b$) uit te gaan kan deze aldus in woorden gebracht worden:

Een som van twee getallen wordt met een getal verminderd door een der termen van de som met dat getal te verminderen, zoo dit laatste mogelijk is.

79. Stelt men:

$$(a - b) - c = p,$$

dan is:

$$a - b = c + p,$$
$$a = b + (c + p) = (b + c) + p,$$
$$a - (b + c) = p.$$

We vinden dus:

$$(a - b) - c = a - (b + c). \qquad (31)$$

Uit het gegeven bewijs blijkt tevens, *dat zoowel het eerste als het tweede lid dan en alleen dan zin heeft als $a > b + c$ is*; is hieraan voldaan, dan is de formule (31) juist.

In woorden uitgedrukt luidt (31):

Een verschil wordt met een getal verminderd door den aftrekker met dat getal te vermeerderen.

Men kan het bewijs ook aldus inkleeden:

$$a - (b + c) = \{(a - b) + b\} - (b + c) =$$
$$= \big([\{(a - b) - c\} + c] + b\big) - (b + c) =$$
$$= [\{(a - b) - c\} + (b + c)] - (b + c) = (a - b) - c.$$

80. Stelt men in (31):

$$a = d + b,\ c = e - b,$$

dus:

$$a - b = d,\ b + c = e$$

(zoodat $b < e < a$ is), dan vindt men:

$$d - (e - b) = (d + b) - e,$$

of met andere letters:

$$a - (b - c) = (a + c) - b. \qquad (32)$$

---

[1]) Men kan natuurlijk ook het tweede lid van (29) tot het eerste herleiden door de aaneengeschakelde gelijkheden (30) in tegengestelden zin te lezen.

Dit geldt voor $c < b < a + c$.

Het eerste lid van (32) kan, zoo dit zin heeft (dus als $c < b < a + c$ is), steeds door het tweede lid worden vervangen. Omgekeerd is het echter wel mogelijk, dat het tweede lid van (32) zin heeft, maar het eerste niet (nl. als $c \geqq b$ is).

81. *De formules* (*29*), (*31*) *en* (*32*) *stellen ons in staat bij de uitdrukkingen*

$$a + (b - c),\ (a - b) - c \text{ en } a - (b - c)$$

het aftrekteeken buiten de haakjes te brengen. Door herhaalde toepassing dier formules kan men dan hetzelfde voor gecompliceerdere vormen bereiken.

Zoo vindt men door tweemalige toepassing van (29):

$$(a - b) + (c - d) = \{a + (c - d)\} - b = \{(a + c) - d\} - b,$$

waaruit in verband met (31) volgt:

$$(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d). \qquad (33)$$

In woorden luidt dit:

De som van twee verschillen is gelijk aan het verschil van de som der aftrektallen en de som der aftrekkers.

Door achtereenvolgens (31), (29) en (32) toe te passen, of (32), (29) en (31), vindt men evenzoo:

$$(a - b) - (c - d) = (a + d) - (b + c), \qquad (34)$$

hetgeen we aan den lezer overlaten na te gaan.

82. Uit (29), (31) en (32) kunnen nog allerlei andere formules, waarin drie getallen voorkomen, worden afgeleid. Zoo volgt uit (29) en (32):

$$(a - b) + c = a - (b - c), \qquad (35)$$

hetgeen geldt voor $a > b > c$. In woorden luidt dit:

Een verschil wordt met een getal vermeerderd door den aftrekker met dit getal te verminderen, zoo dit laatste mogelijk is.

We merken nog op, dat uit (35) blijkt, dat $a - (b - c)$ niet gelijk is aan $(a - b) - c$, *zoodat de aftrekking niet associatief is.* Ten overvloede ziet men dit aan het volgende voorbeeld:

$$4 - (2 - 1) = 4 - 1 = 3, \quad (4 - 2) - 1 = 2 - 1 = 1.$$

83. Verder volgt uit de formule (31) door daarin b en c te verwisselen:

$$(a - c) - b = a - (b + c),$$

waaruit in verband met (31) volgt:

$$(a - b) - c = (a - c) - b, \tag{36}$$

hetgeen geldt voor $a > b + c$. In woorden luidt dit:

Een verschil wordt met een getal verminderd door het aftrektal met dat getal te verminderen.

Op dezelfde wijze leidt men uit (29) af:

$$a + (b - c) = b + (a - c), \tag{37}$$

hetgeen geldt voor $c < a$ *en* $< b$, en uit (32):

$$a - (b - c) = c - (b - a), \tag{38}$$

hetgeen geldt voor $b > a, > c$ *en* $< a + c$.

84. Uit de eigenschap van n⁰. 49 leidt men zonder moeite af:

Is $a > b$ *en* $c < a$ *en* $< b$, *dan is*:

$$a - c > b - c.$$

Was nl. $a - c \leqq b - c$, dan zou daaruit in verband met de eigenschap van n⁰. 49 volgen:

$$(a - c) + c \leqq (b - c) + c,$$

dus $a \leqq b$, in strijd met het ondersteelde.

85. Het vergelijken van verschillen. Uit de gevonden formules is gemakkelijk af te leiden:

Is $a > b$ *en* $c > d$, *dan geldt dan en alleen dan:*

$$a - b = c - d \tag{39}$$

als voldaan is aan:

$$a + d = c + b. \tag{40}$$

Uit (39) volgt nl.:

$$a = b + (c - d) = (b + c) - d$$ [1],

waaruit men tot (40) besluit. Langs den omgekeerden weg leidt men (39) uit (40) af.

86. De eigenschap van n⁰. 85 is ook gemakkelijk rechtstreeks aan te toonen door

$$a - b = p, \quad c - d = q$$

te stellen. Dan is nl.:

$$a = b + p, \quad c = d + q,$$

dus:

$$a + (d + q) = (b + p) + c,$$

$$(a + d) + q = (b + c) + p. \tag{41}$$

---

[1]) Volgens (29).

Blijkens de ondubbelzinnigheid der aftrekking (zie de opmerking aan het eind van n°. 69) kan men met behulp van (41) uit (40) tot $p = q$, dus tot (39), besluiten en omgekeerd.

87. Uit

$$a + (b + c) = b + (a + c)$$

volgt in verband met de eigenschap van n°. 85:

$$a - b = (a + c) - (b + c). \tag{42}$$

In woorden luidt dit:

Een verschil verandert niet als men aftrektal en aftrekker beide met een zelfde getal vermeerdert of vermindert.

Deze eigenschap voert onmiddellijk tot de formules (31) en (32) van n°. 79 en 80.

88. *Is $a > b$ en $c > d$, dan heeft men dan en alleen dan:*

$$a - b > c - d \tag{43}$$

als voldaan is aan:

$$a + d > c + b. \tag{44}$$

Uit (43) volgt nl. in verband met de eigenschap van n°. 49:

$$a = (a - b) + b > (c - d) + b = (b + c) - d,$$
$$a + d > \{(b + c) - d\} + d = c + b,$$

waarmede (44) verkregen is.

Omgekeerd volgt uit (44) in verband met de eigenschap van n°. 84:

$$a = (a + d) - d > (b + c) - d = (c - d) + b,$$
$$a - b > \{(c - d) + b\} - b = c - d.$$

§ 4. Vermenigvuldiging van natuurlijke getallen.

89. Product van twee natuurlijke getallen. Vormen we de *som van a gelijke getallen b,* dus

$$b + b + b + \dots + b \quad (a \text{ termen}), \tag{45}$$

dan wordt dit het *product der getallen a en b* genoemd en als $a \,.\, b$ (ook wel $a \times b$ of $a\, b$) geschreven. De getallen a en b heeten de *factoren van het product*, terwijl men a in het bijzonder *vermenigvuldiger* en b *vermenigvuldigtal* noemt [1]).

Het vormen van het product van twee getallen, dat *vermenigvuldigen* heet, is de *derde hoofdverbinding.*

90. We kunnen ons de a termen b der som (45) voorstellen als aantallen elementen van a hoeveelheden (zonder gemeenschappelijke elementen), waarvan dus ieder b elementen bevat. Het product $a\, b$ is bijgevolg ook te definiëeren als het *aantal elementen der hoeveelheid, die ontstaat door a hoeveelheden ieder van b elementen tot één hoeveelheid vereenigd te denken.*

Ook kan men zeggen, *dat a b het aantal elementen is van de*

---

[1]) Evenzoo zou men bij de optelling, dus bij de vorming van het getal $a + b$, den term a (dus het getal, waarvan men uitgaat) het *opteltal* en den term b den *opteller* kunnen noemen. Deze onderscheiding wordt echter gewoonlijk niet gemaakt omdat bij de in n⁰. 43 van $a + b$ gegeven definitie onmiddellijk blijkt, dat a en b dezelfde rol spelen, terwijl de verwisselbaarheid der factoren a en b van het product $a\, b$ (zie n⁰. 94) niet zoo onmiddellijk in het oog valt en die getallen in elk geval bij de gegeven definitie een verschillende rol spelen. Bij de aan het eind van n⁰. 45 van $a + b$ gegeven definitie zou de onderscheiding tusschen opteltal en opteller meer reden van bestaan hebben; is dan a het opteltal, dan wil dit zeggen, dat men met $a + 1$ beginnend telt en b getallen opnoemt.

hoeveelheid, die ontstaat door ieder der a elementen van een hoeveelheid in b elementen gesplitst te denken.

91. Moduluseigenschap der vermenigvuldiging. Neemt men in de in n^0. 89 van vermenigvuldiging gegeven definitie $b = 1$, dan vindt men:

$$a \, . \, 1 = a. \tag{46}$$

Nog duidelijker blijkt dit uit de definitie van n^0. 90. Door nl. a hoeveelheden, die ieder één enkel element bevatten, tot één hoeveelheid te vereenigen krijgt men een hoeveelheid met a elementen.

Neemt men in de definitie van n^0. 89 $a = 1$, dan vindt men, in verband met de opmerking aan het eind van n^0. 52:

$$1 \, . \, b = b. \tag{47}$$

Tot hetzelfde resultaat voert de definitie van n^0. 90; één enkele hoeveelheid met b elementen voert nl. door toepassing dier definitie tot een hoeveelheid met b elementen (diezelfde hoeveelheid).

92. De gelijkheden (46) en (47) drukken uit, *dat een product van twee factoren, waarbij een der factoren (onverschillig welke) 1 is, gelijk is aan den anderen factor.*

Deze eigenschap, die een *grondeigenschap* is, heet de ***moduluseigenschap*** *der vermenigvuldiging.*

Ook zegt men, *dat het getal 1 de* ***modulus*** *der vermenigvuldiging is*, hetgeen beteekent, dat verbinding door vermenigvuldiging van een getal met 1 (onverschillig of 1 daarbij als vermenigvuldigtal dan wel als vermenigvuldiger optreedt) dat getal onveranderd laat.

93. Commutatieve eigenschap der vermenigvuldiging. De a in n^0. 90 genoemde hoeveelheden, die ieder b elementen bevatten, zijn af te beelden op de getallen, die $\leqq a$ zijn, waardoor die hoeveelheden rangnummers verkrijgen. De hoeveelheid met rangnummer j noemen we H_j.

Verder beelden we ieder der a hoeveelheden

$$H_1, \; H_2, \; \ldots \, , \; H_a \tag{48}$$

af op de getallen, die $\leqq b$ zijn. We kunnen dan de elementen der somhoeveelheid

$$H_1 + H_2 + \dots + H_a \tag{49}$$

aanwijzen door twee indices, waarvan de eerste aangeeft tot welke der hoeveelheden (48) het element behoort en de tweede welk rangnummer in die hoeveelheid aan dat element toekomt; m. a. w. E_{jk} [1]) is het k^{de} element van H_j.

De hoeveelheid (49), die $a\,b$ tot aantal heeft, wordt nu gevormd door de elementen E_{jk}, waarin j de waarden $1, 2, \dots, a$ en k de waarden $1, 2, \dots, b$ kan aannemen.

94. We kunnen nu de elementen E_{jk}, die denzelfden tweeden index hebben, dus de a elementen

$$E_{1k}, E_{2k}, \dots, E_{ak},$$

tot een hoeveelheid vereenigd denken, die we H_k' noemen. Deze wordt dus verkregen door van ieder der hoeveelheden (48) het k^{de} element te nemen. Men krijgt zoo *b hoeveelheden*

$$H_1', H_2', \dots, H_b'$$

ieder van a elementen, die vereenigd eveneens de hoeveelheid (49) opleveren. Hieruit blijkt, dat het aantal elementen van (49) even goed door $b\,a$ kan worden voorgesteld, zoodat men heeft:

$$a\,b = b\,a. \tag{50}$$

Ook bij de vermenigvuldiging geldt derhalve de ***commutatieve eigenschap***, of anders gezegd *de vermenigvuldiging van twee getallen is commutatief.* Vermenigvuldiger en vermenigvuldigtal zijn dus verwisselbaar, zoodat deze benamingen verder gemist kunnen worden.

In n°. 91 hebben we reeds een bijzonder geval der commutatieve eigenschap ontmoet; uit (46) en (47) blijkt nl.: $a \,.\, 1 = 1 \,.\, a$.

95. Associatieve eigenschap der vermenigvuldiging. We stellen ons voor, dat ieder der in n°. 94 beschouwde elementen E_{jk} zelf weer een hoeveelheid met c elementen is; deze elementen wijzen we aan door de letter e met drie indices, zoodat e_{jkl} het l^{de} element der hoeveelheid E_{jk} is.

Daar ieder der ab hoeveelheden E in het bezit is van c elemen-

---

[1]) Hierbij moet natuurlijk op de volgorde der indices gelet worden.

ten e, krijgt de hoeveelheid (49) $(a \, . \, b) \, . \, c$ elementen als we de e's als elementen daarvan beschouwen (dus als we de e's tellen).

Anderzijds wordt ieder der a hoeveelheden (48) gevormd door b hoeveelheden E, ieder met c elementen e, te vereenigen, zoodat ieder der a hoeveelheden (48) $b\,c$ elementen e bevat. Het aantal elementen e der hoeveelheid (49) bedraagt dus ook $a \, . \, (b \, . \, c)$, zoodat men heeft:

$$(a \, . \, b) \, . \, c = a \, . \, (b \, . \, c). \tag{51}$$

Dit is de ***associatieve eigenschap** der vermenigvuldiging.*

96. Gevolgen der voorgaande eigenschappen. De associatieve en de commutatieve eigenschap van n⁰. 94 resp. 95 zijn *grondeigenschappen* (zie n⁰. 7). Deze kunnen, op geheel dezelfde wijze als in n⁰. 50—56 voor de optelling geschied is, tot een product van meerdere factoren worden uitgebreid. Men heeft slechts overal de woorden „som" en „termen" door „product" resp. „factoren" (en het teeken + door $\times$) te vervangen. *Men mag dus eenige factoren van een product door hun product vervangen en de volgorde der factoren veranderen, zonder dat dit op de uitkomst van invloed is.*

We merken nog op, dat onder een product van meerdere factoren, zooals b.v. $a\,b\,c\,d$, te verstaan is:

$$a \, . \, \{b \, . \, (c \, . \, d)\},$$

zoodat de vermenigvuldiging, in tegenstelling met de optelling (zie n⁰. 47), van rechts naar links uitgevoerd gedacht wordt. De associatieve eigenschap maakt echter, dat men hiervan naar willekeur mag afwijken.

97. Distributieve eigenschap der vermenigvuldiging. Volgens de definitie van n⁰. 89 is onder $(a + b)\,c$ de som van $a + b$ termen c te verstaan, waarvoor wegens de algemeene associatieve eigenschap der optelling ook

$$(c + c + \ldots . + c) + (c + c + \ldots . + c)$$

geschreven kan worden, waarbij de eerste uitdrukking tusschen haakjes een som van a termen c, de tweede een som van b termen c is. Die uitdrukkingen tusschen haakjes zijn dus gelijk aan $a\,c$ en $b\,c$, waardoor men vindt:

$$(a + b)\,c = a\,c + b\,c. \tag{52}$$

Volgens de commutatieve eigenschap der vermenigvuldiging volgt uit (52):

$$a(b + c) = a\,b + a\,c. \qquad (53)$$

Deze formule kan men ook rechtstreeks uit de definitie van product afleiden, volgens welke $a(b + c)$ een som van a termen $b + c$ is, dus (volgens de eigenschappen der optelling) een som van $2a$ termen, a termen b en a termen c. Door de a termen b tot $a\,b$ en de a termen c tot $a\,c$ samen te nemen geraakt men tot (53).

In formule luidt dit bewijs:

$$a(b + c) = (b + c) + (b + c) + \ldots + (b + c) =$$
$$= (b + b + \ldots + b) + (c + c + \ldots + c) = a\,b + a\,c.$$

98. De formules (52) en (53) drukken uit, *dat men bij de vorming van een product, waarvan een der factoren een tweeterm is, de vermenigvuldiging over de termen van de som mag verdeelen* (of distribueeren). Deze eigenschap wordt de ***distributieve eigenschap** der vermenigvuldiging* genoemd.

Ook zegt men, *dat de vermenigvuldiging distributief is ten opzichte van de optelling*. Dit is een *grondeigenschap*.

99. Algemeene distributieve eigenschap. Uit de grondvormen (52) en (53) der distributieve eigenschap kan men weer algemeenere eigenschappen afleiden zonder van de beteekenis der begrippen „optellen" en „vermenigvuldigen" gebruik te behoeven te maken.

Zoo vindt men door tweemalige toepassing van (52):

$$(a + b + c)\,d = \{(a + b) + c\}\,d =$$
$$= (a + b)\,d + cd = ad + bd + cd.$$

Algemeener heeft men:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\,b = a_1 b + a_2 b + \ldots + a_n b \text{ [1]}. \qquad (54)$$

---

[1]) Uit deze formule, die zonder gebruik te maken van de associatieve eigenschap der vermenigvuldiging is aangetoond, kan men een bewijs van laatstgenoemde eigenschap afleiden door

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a$$

te nemen. Daardoor gaat (54) nl. over in:

$$(na)\,b = n\,(ab).$$

Hierin ligt de grondvorm (52) als het bijzondere geval $n = 2$ opgesloten.

Men kan de formule (54) door volledige inductie (zie n°. 62—64) aantoonen. Ze geldt nl. voor $n = 1$, daar ze dan in $a_1 b = a_1 b$ overgaat (zie de opmerking aan het eind van n°. 52), dus in een tautologie; aan den eersten eisch voor volledige inductie is dus voldaan. Om het voldaan zijn aan den tweeden eisch aan te toonen nemen we de juistheid van (54) aan en leiden daaruit in verband met (52) af:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1})\, b = \{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + a_{n+1}\}\, b =$$
$$= (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\, b + a_{n+1}\, b = a_1\, b + a_2\, b + \ldots + a_n\, b + a_{n+1}\, b.$$

Hiermede is dan de gelijkheid verkregen, waarin (54) overgaat door daarin n door $n + 1$ te vervangen.

Voor (54) kan men wegens de commutatieve eigenschap der vermenigvuldiging ook schrijven, daarbij de letters a en b verwisselend:

$$a(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = ab_1 + ab_2 + \ldots + ab_n. \qquad (55)$$

Deze formule kan men natuurlijk ook zonder de commutatieve eigenschap door volledige inductie uit (53) afleiden [1].

100. Met behulp van de formules (52) en (53) vindt men:

$$(a + b)\,(c + d) = a\,(c + d) + b\,(c + d) = ac + ad + bc + bd,$$

dus:

$$(a + b)\,(c + d) = ac + ad + bc + bd. \qquad (56)$$

Evenzoo vindt men:

$$(a + b)\,(c + d + e) = ac + ad + ae + bc + bd + be.$$

Algemeener heeft men:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)\,(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) =$$
$$= a_1b_1 + a_1b_2 + \ldots + a_1b_n + a_2b_1 + \ldots + a_mb_n. \qquad (57)$$

Door nl. op het eerste lid van (57) eerst de formule (54) toe te passen krijgt men een som van m termen. Door vervolgens

---

[1]) Omgekeerd kan men dan uit (55) een bewijs der commutatieve eigenschap afleiden door

$$b_1 = b_2 = \ldots = b_n = b$$

te stellen. Men vindt dan $a(nb) = n(ab)$, dus $b = 1$ nemend en lettend op de formule (46) van n°. 91:

$$an = na.$$

de formule (55) toe te passen valt ieder dier m termen in n termen uiteen, *waardoor men in het geheel mn termen verkrijgt. Deze termen ontstaan door ieder der m termen van den eersten factor (vermenigvuldiger) met ieder der n termen van den tweeden factor (vermenigvuldigtal) door vermenigvuldiging te verbinden.*

In (57) liggen de formules (54) en (55) als bijzonder geval opgesloten en wel (54) als het geval $n = 1$, (55) als het geval $m = 1$.

101. De distributieve eigenschap is natuurlijk ook tot een product van meerdere factoren uit te breiden. Zoo heeft men:

$(a+b)(c+d)(e+f) = ace + acf + ade + adf + bce + bcf + bde + bdf$,

waarbij dus iedere term van den eersten factor met iederen term van den tweeden en iederen term van den derden factor tot een product van drie factoren verbonden wordt.

Algemeener is

$(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)(c_1 + c_2 + \ldots + c_p)$

te herleiden tot een som van $m\,n\,p$ termen $a_j\,b_k\,c_l$, waarbij j ieder der waarden $1, 2, \ldots, m$ kan aannemen, k ieder der waarden $1, 2, \ldots, n$ en l ieder der waarden $1, 2, \ldots, p$.

102. Het voorgaande is verder weer tot een product van meer dan drie factoren uit te breiden, waardoor men vindt:

Een product van u factoren

$$A_1, A_2, \ldots, A_u \qquad (58)$$

waarbij A_i *een som van* n_i *termen*[1] *is, is gelijk aan een som van* $n_1 . n_2 \ldots n_u$ *termen, waarvan ieder een product is van u factoren, en wel zoodanig, dat uit ieder der u oorspronkelijke factoren* (58) *één en slechts één term als factor optreedt.*

Dit is de **algemeene distributieve eigenschap** *der vermenigvuldiging.*

We merken nog op, *dat bij de uitbreiding der distributieve eigenschap slechts van de beide in n⁰. 97 voorkomende grondvormen* (52) *en* (53) *dier eigenschap, en niet van de commutatieve en associatieve eigenschap der vermenigvuldiging, gebruik behoeft te worden gemaakt.*

---

[1]) Het getal n_i kan natuurlijk ook 1 zijn.

103. Distributieve eigenschap der vermenigvuldiging ten opzichte van de aftrekking. Is $a > b$, dan heeft men volgens de distributieve eigenschap der vermenigvuldiging:

$$ac = \{(a - b) + b\}\, c = (a - b)\, c + bc,$$

$$ac - bc = (a - b)\, c. \qquad (59)$$

Wegens de commutatieve eigenschap der vermenigvuldiging heeft men ook:

$$ab - ac = a\,(b - c). \qquad (60)$$

De formules (59) en (60) drukken uit, *dat de vermenigvuldiging ten opzichte van de aftrekking distributief is.*

104. Door (59) en (60) te combineeren kan men nog andere eigenschappen afleiden. Zoo vindt men als $a > b$ en $c > d$ is:

$$(a - b)\,(c - d) = a\,(c - d) - b\,(c - d) =$$
$$= (ac - ad) - (bc - bd),$$

waaruit men in verband met de formule (34) van n°. 81 afleidt:

$$(a - b)\,(c - d) = (ac + bd) - (ad + bc). \qquad (61)$$

105. Uit de formule (59), die geldt als $a > b$ is, leest men af:
Is $a > b$, dan is $ca > cb$.

Voor het bewijs hiervan kan men zich ook op de aan het eind van n°. 59 bedoelde eigenschap beroepen door van de c ongelijkheden

$$a_i > b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, c)$$

de eerste leden aan elkaar gelijk te nemen, evenals de tweede leden.

106. Op geheel dezelfde wijze als in n°. 57 is uit de eigenschap van n°. 105 af te leiden:

Is $a > b$ en $c > d$, dan is $ac > bd$.

Dit is met de eigenschap van n°. 105 aldus samen te vatten:

Is $a > b$, en $c \geqq d$, dan is $ac > bd$.

Evenzoo heeft men (vergelijk de eigenschap van n°. 59):

Is $a > b$, $c > d$ en $e > f$, dan is $ace > bdf$.

Dit is verder tot meerdere ongelijkheden uit te breiden.

107. Definitie der vermenigvuldiging door volledige inductie. Op soortgelijke wijze als de optelling (zie n°. 65) kan men *de vermenigvuldiging definiëeren door de formule* (*47*) *van n°. 91 en*

$$(a + 1)\,c = ac + c,$$

welke laatste formule in verband met (47) als bijzonder geval in de formule (52) van n°. 97 ligt opgesloten.

Door volledige inductie naar a (dus van a op $a + 1$) blijkt dan, *dat daardoor het product ab voor ieder getal a gedefiniëerd is.*

Het bewijs b.v. dat $2 \,.\, 2 = 4$ is, loopt bij deze definitie (in verband met die van n°. 65) aldus:

$$2.2=(1+1)2=1.2+2=2+2=2+(1+1)=(2+1)+1=3+1=4.$$

108. De distributieve eigenschap (52) (zie n°. 97) bewijst men uit de definitie van n°. 107 door volledige inductie naar b. Voor $b = 1$ is (52) nl. een onmiddelijk uitvloeisel der definitie, terwijl men den stap van b op $b + 1$ aldus uitvoert:

$$\{a + (b + 1)\}\,c = \{(a + b) + 1\}\,c = (a + b)\,c + c =$$
$$= (ac + bc) + c = ac + (bc + c) = ac + (b + 1)\,c.$$

De distributieve eigenschap in den vorm (53) bewijst men door volledige inductie naar a. Voor $a = 1$ blijkt de juistheid van (53) onmiddellijk uit (47), terwijl de stap van a op $a + 1$ aldus gaat:

$$(a + 1)\,(b + c) = a\,(b + c) + (b + c) =$$
$$= ab + ac + b + c = (ab + b) + (ac + c) = (a + 1)\,b + (a + 1)\,c.$$

109. Met behulp van de distributieve eigenschap (52) bewijst men nu verder de associatieve eigenschap (51) door volledige inductie naar a. Voor $a = 1$ volgt (51) onmiddellijk uit (47), terwijl de overgang van a op $a + 1$ aldus verloopt:

$$\{(a + 1)\,b\}\,c = (ab + b)\,c = (ab)\,c + bc =$$
$$= a\,(bc) + bc = (a + 1)\,(bc).$$

110. Voor het bewijs der commutatieve eigenschap (50) (zie n°. 94) beschouwen we eerst het geval $b = 1$. Daarvoor verloopt het bewijs door volledige inductie aldus:

$$(a + 1)\,.\,1 = a\,.\,1 + 1 = 1\,.\,a + 1 = a + 1 = 1\,.\,(a + 1).$$

De formule (50) geldt dus voor $b = 1$, terwijl dan verder de

stap van b op $b + 1$ aldus te verrichten is (gebruik makend van de distributieve eigenschap (53) voor het geval $c = 1$):

$$a\,(b + 1) = ab + a\,.\,1 = ba + a = (b + 1)\,a.$$

111. Product van twee hoeveelheden. We keeren terug tot de in n°. 93 beschouwde hoeveelheden (48), waarvan ieder b elementen bevat, en de som (49) dier hoeveelheden, waarvan het aantal elementen $a\,b$ bedraagt. Zij verder H een hoeveelheid van a elementen

$$E_1,\ E_2,\ \ldots.,\ E_a$$

en H' een hoeveelheid van b elementen, die met H geen element gemeen heeft; de elementen van H' noemen we

$$E_1',\ E_2',\ \ldots,\ E_b'.$$

Zooals in n°. 93 is opgemerkt kan een element der hoeveelheid (49) door twee indices j en k worden aangewezen, waarvan j een der getallen 1, 2, . . ., a en k een der getallen 1, 2, . . ., b is. In plaats van door j en k kan men dit element ook door het element E_j van H en het element E_k' van H' aanwijzen. Hierdoor krijgt men de hoeveelheid (49) afgebeeld op de *hoeveelheid der elementenparen*

$$E_j,\ E_k',$$

waarvan het eene tot H en het andere tot H' behoort [1]).

112. De in n°. 111 beschouwde *hoeveelheid, die ontstaat door ieder element van H met ieder element van H' tot een paar te vereenigen,* wordt het ***product** der hoeveelheden H en H'* genoemd en door $H\,.\,H'$ aangeduid. Daar de producthoeveelheid (evenals de hoeveelheid (49), waarop ze af te beelden is) ab elementen bevat, kan het *product ab der getallen a en b* ook gedefiniëerd worden als het *aantal elementen van het product H . H' van een hoeveelheid H met a en een hoeveelheid H' met b elementen.*

We merken nog op, dat de hoeveelheid $H\,.\,H'$ als een som

---

[1]) Neemt men voor H de hoeveelheid der getallen 1, 2, . . ., a en voor H' die der getallen 1, 2, . . ., b (waarbij men, wat de gemeenschappelijke getallen betreft, onderscheid moet maken tusschen een getal als behoorend tot H en datzelfde getal als behoorend tot H'), dan is de in den tekst genoemde hoeveelheid niets anders dan die der indexparen van de elementen E_{jk} der hoeveelheid (49).

van a hoeveelheden [1]) ieder met b elementen te beschouwen is, waarbij de j^{de} dier hoeveelheden gevormd wordt door de elementenparen

$$(E_j,\ E_1'),\ (E_j,\ E_2'), \ldots, (E_j,\ E_b')\ ^{2});$$

hierdoor geraakt men van de nieuwe definitie van het product ab tot de oorspronkelijke terug (zie n°. 90).

113. Evenals dat bij een som van twee hoeveelheden het geval was (zie de noot van blz. 15) is het begrip „product" van twee hoeveelheden natuurlijk niet tot eindige hoeveelheden beperkt.

Het vormen van het product $H \,.\, H'$ wordt *vermenigvuldiging der hoeveelheden H en H'* genoemd.

Bij de van $H \,.\, H'$ gegeven definitie spelen beide hoeveelheden dezelfde rol, zoodat onmiddellijk te zien is, *dat de vermenigvuldiging van twee hoeveelheden commutatief is.* M. a. w.:

$$H \,.\, H' = H' \,.\, H. \tag{62}$$

114. Ook is de vermenigvuldiging van hoeveelheden *associatief,* d. w. z.:

$$(H \,.\, H') \,.\, H'' = H \,.\, (H' \,,\, H''). \tag{63}$$

Immers zoowel de in het eerste lid als de in het tweede lid van (63) genoemde hoeveelheid wordt gevormd door de elementen, die men verkrijgt door een element van H met een element van H' en een element van H'' tot een drietal (dat verder als één enkel element beschouwd wordt) vereenigd te denken (vergelijk n°. 41).

115. In verband met de optelling van hoeveelheden (zie n°. 38 en 39) heeft de vermenigvuldiging van hoeveelheden nog de *distributieve eigenschap,* die in formule luidt:

$$(H + H') \,.\, H'' = H \,.\, H'' + H' \,.\, H''. \tag{64}$$

Immers een element van de in het eerste lid van (64) genoemde

---

[1]) Zonder gemeenschappelijke elementen.

[2]) Ook is de hoeveelheid $H.H'$ te beschouwen als een som van b hoeveelheden ieder met a elementen, waarbij de k^{de} dier hoeveelheden gevormd wordt door de elementenparen

$$(E_1,\ E_k'),\ (E_2,\ E_k'), \ldots, (E_a,\ E_k').$$

hoeveelheid is een paar, dat ontstaat door een element van $H + H'$ (dus een element van H of van H') met een element van H'' te combineeren. Dit elementenpaar is dus een element van $H . H''$ of van $H' . H''$, dus een element van de in het tweede lid van (64) genoemde hoeveelheid. Evenzoo bewijst men, dat omgekeerd een element van laatstgenoemde hoeveelheid ook behoort tot de hoeveelheid genoemd in het eerste lid van (64).

116. Wanneer we de vermenigvuldiging van getallen op de in n⁰. 112 aangegeven wijze definiëeren, dus met behulp van vermenigvuldiging van hoeveelheden, is de moduluseigenschap (zie n⁰. 91 en 92) onmiddellijk in te zien, terwijl de grondvormen (50), (51) en (52) resp. van de commutatieve, associatieve en distributieve eigenschap der vermenigvuldiging van getallen onmiddellijk uit de overeenkomstige, door (62), (63) en (64) uitgedrukte, eigenschappen van hoeveelheden volgen. Ook de uitbreidingen dier grondeigenschappen, dus de algemeene commutatieve, associatieve en distributieve eigenschap (zie n⁰. 96 en 102), zijn uit de definitie van n⁰. 112 door beschouwing van hoeveelheden aan te toonen, op soortgelijke wijze als dit in n⁰. 60 voor de optelling geschied is. Het bewijzen der afgeleide eigenschappen uit de grondeigenschappen verdient echter de voorkeur (zie n⁰. 61).

---

§ 5. Machtsverheffing van natuurlijke getallen.

117. Definitie der machtsverheffing. Vormt men het *product van b gelijke factoren a*, dus

$$a \,.\, a \,.\, a \,.\, \ldots \,.\, a \text{ (} b \text{ factoren)},$$

dan schrijft men daarvoor

$$a^b.$$

Deze uitdrukking wordt een ***macht*** genoemd en wel *a tot de macht b*. Het getal a heet ***grondtal*** en het getal b de ***exponent*** van de macht. Het vormen van de macht heet ***machtsverheffing;*** deze wordt niet tot de hoofdverbindingen gerekend, daar ze, zooals blijken zal, niet rechtstreeks bij de vorming der verschillende uitbreidingen van het getalbegrip betrokken is.

Voor $b = 2$ wordt de macht ook het ***vierkant*** of ***kwadraat** van a* genoemd.

118. Uit de definitie der machtsverheffing volgt onmiddellijk, door te bedenken, dat een product met één factor gelijk aan dien factor is (vergelijk n⁰. 52):

$$a^1 = a, \qquad (65)$$

terwijl men in verband met de moduluseigenschap der vermenigvuldiging (zie n⁰. 91 en 92) heeft:

$$1^b = 1. \qquad (66)$$

Uit (65) en (66) blijkt, dat a^1 en 1^a alleen dan gelijk zijn als $a = 1$ is; a^b en b^a zijn dus niet altijd gelijk, *zoodat de machtsverheffing een niet-commutatieve verbinding is*. Echter kan het wel voorkomen, dat a^b en b^a gelijk zijn zonder dat a en b gelijk zijn, zooals $2^4 = 4^2$ doet zien [1]).

119. Distributieve eigenschap der machtsverheffing. Volgens de in n⁰. 117 gegeven definitie is $(a\,b)^c$ een product van c gelijke factoren $a\,b$, dus een product van $2c$ factoren, c factoren a en c

---

[1]) Aangetoond kan worden, dat dit het eenige geval is, waarbij $a^b = b^a$ en $a \neq b$ is; zie n⁰. 213.

factoren b. Door de c factoren a tot a^c en de c factoren b tot b^c samen te nemen vindt men:

$$(ab)^c = a^c b^c. \tag{67}$$

Hieruit leest men af, *dat men bij de vorming van een macht waarvan het grondtal een product van twee factoren is, de machtsverheffing over de factoren van het product mag verdeelen.* Men drukt dit uit door te zeggen, *dat de machtsverheffing, wat het grondtal betreft, distributief is ten opzichte van de vermenigvuldiging* [1]).

Men kan de eigenschap ook zoo formuleeren, *dat het product van twee gelijknamige machten gevonden wordt door de gelijknamige macht van het product der grondtallen te vormen.* Hierbij zijn onder ***gelijknamige machten*** *machten met denzelfden exponent* te verstaan.

120. Het van de formule (67) gegeven bewijs is geheel gelijk aan het in n⁰. 97 gegeven bewijs der formule (53) als men in laatstgenoemd bewijs de optelling door vermenigvuldiging en de vermenigvuldiging door machtsverheffing vervangt.

Dit staat hiermede in verband, *dat de machtsverheffing op dezelfde wijze uit de vermenigvuldiging wordt afgeleid* (nl. als herhaalde vermenigvuldiging) *als de vermenigvuldiging uit de optelling* (nl. als herhaalde optelling). Bij de machtsverheffing spelen grondtal en exponent resp. dezelfde rol als vermenigvuldigtal en vermenigvuldiger bij de vermenigvuldiging. Daardoor is de distributieve eigenschap der vermenigvuldiging, wat het vermenigvuldigtal betreft, d. i. de formule (53), onmiddellijk om te zetten tot de distributieve eigenschap der machtsverheffing, wat het grondtal betreft [2]).

---

[1]) Dit geldt niet wat den exponent betreft, daar a^{bc} niet steeds gelijk is aan $a^b a^c$, zooals uit de formule (69) van n⁰. 122 blijkt, maar ook met behulp van een voorbeeld kan worden aangetoond. Hiervoor kan men nemen:

$$2^{1 \cdot 2} = 4, \quad 2^1 \, . \, 2^2 = 8.$$

[2]) De lezer geve zich rekenschap waarom de distributieve eigenschap der vermenigvuldiging wat den vermenigvuldiger betreft, dus de formule (52), niet is om te zetten tot distributiviteit der machtsverheffing ten opzichte van de vermenigvuldiging wat den exponent betreft; vergelijk n⁰. 122.

121. Op dezelfde wijze als waarop (53) uit te breiden is tot het geval, dat het vermenigvuldigtal een som van n termen is, hetgeen door volledige inductie geschieden kan (zie n°. 99, waar op deze wijze de formule (52) is uitgebreid), is de formule (67) uit te breiden tot het geval, dat het grondtal een product van n factoren is. Men vindt zoo:

$$(a_1\ a_2\ .\ .\ .\ .\ a_n)^b = a_1{}^b\ .\ a_2{}^b\ .\ .\ .\ .\ a_n{}^b. \qquad (68)$$

Dit is de *algemeene distributieve eigenschap der machtsverheffing.*

122. Verdere eigenschappen der machtsverheffing. Een verdere eigenschap der machtsverheffing is:

$$a^{b+c} = a^b\, a^c. \qquad (69)$$

Het bewijs hiervan verloopt op geheel soortgelijke wijze als dat van de formule (52) van n°. 97. Het eerste lid van (69) is nl. het product van $b + c$ factoren a. Door b dier factoren tot a^b en de overige c factoren tot a^c samen te nemen geraakt men tot (69).

De formule (69) is verder weer door volledige inductie uit te breiden tot:

$$a^{b_1+b_2+\ .\ .\ .\ +b_n} = a^{b_1}\,.\,a^{b_2}\,.\ .\ .\ .\ a^{b_n}\,. \qquad (70)$$

123. Door in de formule (70) de getallen b_1, b_2, ..., b_n alle gelijk te nemen vindt men (n door c vervangend):

$$a^{bc} = (a^b)^c. \qquad (71)$$

Hieruit blijkt, dat

$$(a^b)^c \text{ en } a^{(b^c)} \qquad (72)$$

niet gelijk zijn, daar toch bc en b^c niet gelijk behoeven te zijn, zooals het geval $b = 1$ doet zien. *De machtsverheffing bezit dus niet de associatieve eigenschap.* Men moet dus door haakjes aangeven welke der beide uitdrukkingen (72) bedoeld is. Laat men de haakjes weg, schrijft men dus

$$a^{b^c}, \qquad (73)$$

dan is daarmede de tweede der uitdrukkingen (72) bedoeld. Dit vindt zijn reden daarin, dat men voor de eerste der uitdrukkingen (72) eenvoudiger a^{bc} schrijven kan, terwijl de tweede uitdruking niet verder te vereenvoudigen is.

Uit (71) leiden we verder nog af:

$$(a^b)^c = (a^c)^b,$$

zoodat de exponenten b en c verwisseld mogen worden. Dit is (wegens het niet-commutatieve karakter der machtsverheffing) bij de uitdrukking (73) niet geoorloofd.

124. *Is $a > b$, dan is*

$$a^c > b^c. \tag{74}$$

Dit is door volledige inductie naar c zonder moeite aan te toonen. De ongelijkheid (74) is nl. juist voor $c = 1$, terwijl men uit (74) in verband met de eerste eigenschap van n⁰. 106 afleidt:

$$a^c \,.\, a > b^c \,.\, b,$$
$$a^{c+1} > b^{c+1}.$$

Dit nu is de ongelijkheid, waarin (74) overgaat door c te vervangen door $c + 1$ (zie ook de aan het eind van n⁰. 106 bedoelde uitbreiding der daar voorkomende eigenschappen).

Omgekeerd kan men natuurlijk uit (74) tot $a > b$ besluiten, daar uit $a \leqq b$ zou volgen $a^c \leqq b^c$.

Door $b = 1$ te nemen vindt men in het bijzonder (lettend op de formule (66) van n⁰. 118):

Voor $a > 1$ is

$$a^c > 1. \tag{75}$$

125. Verder heeft men:

Is $a > 1$ en $b > c$, dan is:

$$a^b > a^c. \tag{76}$$

Volgens (75) is nl.:

$$a^{b-c} > 1,$$

dus:

$$a^{b-c} \,.\, a^c > 1 \,.\, a^c,$$
$$a^{(b-c)+c} > a^c,$$

waaruit men tot (76) besluit.

Omgekeerd kan uit (76) tot $b > c$ besloten worden, evenals uit $a^b = a^c$ en $a > 1$ tot $b = c$, zooals zonder moeite blijkt.

126. Uit de formule (56) van n⁰. 100 vindt men:

$$(1 + a)^2 = 1 + 2a + a^2,$$

waaruit volgt:

$$(1 + a)^2 > 1 + 2a. \tag{77}$$

Door volledige inductie leiden we daaruit af:

Voor $n \geqq 2$ *is*

$$(1 + a)^n > 1 + na. \tag{78}$$

Voor $n = 2$ gaat (78) nl. in (77) over. Om den stap van n op $n + 1$ te doen leiden we uit (78) in verband met de eigenschap van n⁰. 105 af:

$$(1 + a)^{n+1} > (1 + na)(1 + a) =$$
$$= 1 + (n + 1)a + na^2 > 1 + (n + 1)a,$$

dus volgens de eigenschap van n⁰. 5:

$$(1 + a)^{n+1} > 1 + (n + 1)a,$$

hetgeen de ongelijkheid is, waarin (78) overgaat door n door $n + 1$ te vervangen.

127. Gevallen, waarin de machtsverheffing associatief is. We willen nu nagaan *in welke gevallen de gelijkheid*

$$(a^b)^c = a^{b^c} \tag{79}$$

bestaat, dus de machtsverheffing associatief is.

Uit (79) volgt:

$$a^{bc} = a^{b^c}. \tag{80}$$

Hieraan is voldaan voor $a = 1$.

Is $a > 1$, dan geldt (80) dan en alleen dan als

$$bc = b^c \tag{81}$$

is (zie de opmerking aan het eind van n⁰. 125). Hieraan is voldaan voor $c = 1$.

Is $c > 1$, dan volgt uit (81) als men $c = d + 1$ stelt:

$$b(d + 1) = b \,.\, b^d,$$

waaruit men afleidt:

$$d + 1 = b^d\,[1]. \tag{82}$$

Hieraan is niet voldaan als $b = 1$ is, waaruit volgt $b > 1$. We kunnen dus $b = 1 + e$ stellen, waardoor (82) overgaat in:

$$d + 1 = (1 + e)^d. \tag{83}$$

Voor $d = 1$ (dus $c = 2$) volgt hieruit $e = 1$ (dus $b = 2$). Is $d > 1$, dan volgt uit (83) in verband met de eigenschap van n⁰. 126:

$$d + 1 > 1 + de,$$
$$d > de,$$

hetgeen voor geen enkele waarde van d en e het geval is.

---

[1]) Uit $d + 1 <$ of $> b^d$ zou nl. volgen $b(d + 1) <$ resp. $> b \,.\, b^d$. Zie ook n⁰. 133, waar de ondubbelzinnigheid der deeling besproken wordt.

Resumeerend vinden we dus:

Aan de vergelijking (79) wordt alleen in de volgende drie gevallen voldaan:

1°. als $a = 1$ is, 2°. als $c = 1$ is, 3°. als $b = c = 2$ is.

---

128. Definitie der machtsverheffing door volledige inductie. Ook de machtsverheffing kan door volledige inductie gedefiniëerd worden, nl. *door de formule (65) van n°. 118 gecombineerd met*

$$a^{b+1} = a \cdot a^b. \tag{84}$$

Deze definitie stemt geheel met de in n°. 107 van vermenigvuldiging gegeven definitie overeen als men de daarin voorkomende optelling en vermenigvuldiging resp. door vermenigvuldiging en machtsverheffing vervangt; daarbij moet men vermenigvuldiger door exponent vervangen, waardoor de formule (47) van n°. 91 in (65) overgaat.

129. De distributieve eigenschap (67) der machtsverheffing (zie n°. 119) kan nu door volledige inductie naar c bewezen worden. Voor $c = 1$ volgt (67) onmiddellijk uit (65), terwijl men aldus den stap van c op $c + 1$ kan doen:

$$(ab)^{c+1} = (ab) \cdot (ab)^c = aba^cb^c =$$
$$= (a \cdot a^c)(b \cdot b^c) = a^{c+1}\, b^{c+1}.$$

De formule (69) van n°. 122 bewijzen we door volledige inductie naar c. Voor $c = 1$ volgt de juistheid van (69) onmiddellijk uit (84) en (65), terwijl de stap van c op $c + 1$ aldus gedaan wordt:

$$a^{b+(c+1)} = a^{(b+c)+1} = a \cdot a^{b+c} = a\,(a^b \cdot a^c) =$$
$$= a^b(a \cdot a^c) = a^b a^{c+1}.$$

Evenzoo kan de formule (71) van n°. 123 door volledige inductie naar c bewezen worden, hetgeen we aan den lezer overlaten.

130. Definitie der machtsverheffing met behulp van hoeveelheden. Blijkens de definitie van n°. 117 is het getal a^b ook op te vatten als het *aantal elementen der hoeveelheid H, die ontstaat door het product te vormen van b hoeveelheden*

$$H_1, H_2, \ldots, H_b \tag{85}$$

ieder van a elementen (zie n°. 112).

Een element der hoeveelheid H ontstaat door van ieder der hoeveelheden (85) een element te nemen en deze b elementen tot één enkel element vereenigd te denken. Is H_k een der hoeveelheden (85), dan noemen we de elementen van H_k:

$$E_{k1},\ E_{k2},\ \ldots,\ E_{ka}.$$

Een element der producthoeveelheid H is dan een b-tal elementen

$$E_{1j_1},\ E_{2j_2},\ E_{3j_3},\ \ldots,\ E_{bj_b}, \qquad (86)$$

waarvan het eerste tot H_1 behoort, het tweede tot H_2, enz. De verschillende elementen van H verkrijgt men door in (86) aan $j_1,\ j_2,\ \ldots,\ j_b$ waarden toe te kennen, die voorkomen onder de getallen $1, 2, \ldots, a$; daarbij mogen ook sommige der j's gelijk zijn.

131. Zij H' een hoeveelheid met a elementen

$$E_1,\ E_2,\ \ldots,\ E_a. \qquad (87)$$

Het element E_{kj} (het j^{de} element der hoeveelheid H_k) kan worden aangewezen door de combinatie H_k, E_j, zoodat het element (86) van H aangewezen wordt door

$$(H_1,\ E_{j_1}),\ (H_2,\ E_{j_2}),\ \ldots,\ (H_b,\ E_{j_b}). \qquad (88)$$

Het aantal elementen, waarvan (88) er één is, is gelijk aan dat der hoeveelheid H, dus a^b.

De b hoeveelheden (85) vatten we op als elementen van een hoeveelheid H''. Het element (88) is nu te beschouwen als een *manier om aan ieder element van H'', dus aan ieder der hoeveelheden (85), een der elementen (87) van de hoeveelheid H' toe te voegen, waarbij ook aan verschillende elementen van H'' hetzelfde element van H' kan worden toegevoegd.* Zulk een toevoeging wordt een ***belegging** der elementen van H'' met elementen van H'* [1]) genoemd. Het aantal dier beleggingen is gelijk aan a^b.

Het blijkt dus, dat a^b ook gedefiniëerd kan worden als het *aantal manieren, waarop de elementen van een hoeveelheid met b elementen belegd kunnen worden met elementen van een hoeveelheid met a elementen.*

Deze definitie voert onmiddellijk tot de formules (65) en (66) van n⁰. 118, terwijl ook de overige eigenschappen der machtsverheffing daaruit zijn af te leiden (vergelijk n⁰. 241 en 242).

---

[1]) Ook wel kortweg *belegging van H'' met elementen van H'.*

§ 6. Deeling van natuurlijke getallen.

132. Definitie der deeling. Op geheel dezelfde wijze als in n⁰. 68 de aftrekking als de omkeering der optelling gedefiniëerd is, wordt (ook bij alle volgende uitbreidingen van het getalbegrip) de *deeling* gedefiniëerd als de *omkeering der vermenigvuldiging*. De deeling wordt als de *vierde hoofdverbinding* (of -bewerking) aangeduid.

Bij de deeling is het de vraag het getal x zoo te bepalen, dat

$$bx = a \tag{89}$$

is, waarin a en b gegeven getallen zijn, die resp. *deeltal* en *deeler* genoemd worden.

Voor de vergelijking (89) kan men ook schrijven

$$xb = a, \tag{90}$$

zoodat de vermenigvuldiging slechts één omgekeerde verbinding toelaat en er dus slechts één soort van deeling bestaat.

133. Op geheel soortgelijke wijze als in n⁰. 69 toont men aan, *dat de deeling, zoo ze mogelijk is, ondubbelzinnig is*, d. w. z. dat aan de vergelijking (89), of (90), door hoogstens één waarde van x kan worden voldaan. Was nl. aan (89) voldaan door $x = x_1$ en door $x = x_2$ en was b.v. $x_1 > x_2$, dan zou uit de eigenschap van n⁰. 105 volgen $bx_1 > bx_2$, dus $a > a$.

De ondubbelzinnigheid der deeling kan ook zoo worden uitgedrukt, *dat uit*

$$bx = by$$

volgt $x = y$.

134. Verdeelings- en verhoudingsdeeling. Aan het eind van n⁰. 132 is opgemerkt, *dat er slechts één soort van deeling bestaat*, daar een getal x, dat aan (89) voldoet, ook aan (90) voldoet en omgekeerd. Soms echter maakt men onderscheid tusschen de

deeling, waarbij een getal x gevraagd wordt, dat aan (89) voldoet, en deeling, waarbij een getal x gevraagd wordt, dat aan (90) voldoet; deze worden resp. ***verdeelingsdeeling*** en ***verhoudingsdeeling*** genoemd [1]).

135. Bij de *verdeelingsdeeling* moet men x zoo bepalen, dat aan

$$x + x + \dots + x \text{ (}b\text{ termen)} = a$$

voldaan is. Gevraagd is dan dus het getal a als som van b gelijke getallen te schrijven of, zooals men ook zeggen kan, *het getal a in b gelijke deelen te verdeelen.*

Bij de *verhoudingsdeeling* daarentegen moet men x zoo bepalen, dat aan

$$b + b + \dots + b \text{ (}x\text{ termen)} = a$$

voldaan is. Gevraagd is dan a als som van gelijke getallen b te schrijven, dus *het aantal getallen b te vinden, wier som a bedraagt.*

136. Wanneer men bij de producten bx of xb vermenigvuldigtal en product als aantallen elementen van een hoeveelheid beschouwt, stelt men bij de verdeelingsdeeling de vraag *een hoeveelheid van a elementen in b hoeveelheden te verdeelen, die alle hetzelfde aantal elementen bevatten.* Bij de verhoudingsdeeling daarentegen is het de vraag *een hoeveelheid van a elementen in hoeveelheden ieder van b elementen te verdeelen.*

In het eerste geval is het *aantal elementen van ieder deel,* in het tweede geval het *aantal deelen* gevraagd.

137. Daar, wat het gevraagde getal x betreft, beide soorten van deeling op hetzelfde neerkomen en we bij producten de beide factoren als gelijkwaardig behandelen zonder daarbij steeds onderscheid te maken tusschen vermenigvuldigtal en vermenigvuldiger, hebben we in het volgende geen behoefte de onderscheiding tusschen verdeelingsdeeling en verhoudingsdeeling in het oog te houden. Beide deelingen zijn als rekenkundige vraag

---

[1]) Dat men bij de aftrekking een dergelijk onderscheid niet maakt, vindt zijn grond daarin, dat bij de optelling de commutatieve eigenschap meer onmiddellijk in het oog valt dan bij de vermenigvuldiging (zie de noot van blz. 36).

geheel dezelfde. Dat twee verschillende vragen betreffende hoeveelheden tot die rekenkundige vraag voeren, verandert daaraan niets. We vatten dan ook de deeling uitsluitend als een verbinding van getallen op [1]); voor welk der twee in n⁰. 136 genoemde doeleinden dit dient is daarbij onverschillig.

138. Definitie van deelbaarheid. Wanneer aan de vergelijking, (89) van 132 (of (90), wat op hetzelfde neerkomt) kan worden voldaan wordt a ***deelbaar** door* b en b ***deelbaar** op* a genoemd. Ook zegt men dan, dat b een ***deeler** van* a en a een ***veelvoud** van* b is.

In geval van deelbaarheid wordt het getal x, dat aan (89) voldoet, het ***quotiënt** van a en b* genoemd en als $a : b$ of $\frac{a}{b}$ geschreven. Dit quotiënt is eveneens een deeler van a.

De deelers b en x, wier product het getal a is, worden ***complementaire deelers** van* a genoemd; de getallen b en x spelen daarbij dezelfde rol, hetgeen men uitdrukt door te zeggen, *dat de betrekking tusschen b en x **wederkeerig** of **reciprook** is.*

We merken nog op, dat een getal ***even*** of ***oneven*** genoemd wordt al naar gelang het wel of niet door 2 deelbaar is, dus al naar gelang het wel of niet in den vorm $2v$ geschreven kan worden.

139. Aan de vergelijking (89) is steeds te voldoen als $b = a$ of $b = 1$ is, in welk geval $x = 1$ resp. $x = a$ is. Dit beteekent, *dat ieder getal zich zelf en het getal 1 tot deelers heeft* en wel tot complementaire deelers.

Is b een *deeler van a, die van a en 1 verschilt*, dan wordt b een ***echte deeler** van* a genoemd. De bij een echten deeler van a behoorende complementaire deeler is eveneens van a en 1 verschillend, dus eveneens een echte deeler van a.

140. Uit de eigenschap van n⁰. 105 volgt, in verband met de formule (46) van n⁰. 91, *dat men voor $x > 1$ heeft:*

$$bx > b.$$

---

[1]) Dit wil dus zeggen, dat we ons bepalen tot wat wel *onbenoemde getallen* genoemd worden; de onderscheiding tusschen benoemde en onbenoemde getallen lijkt ons echter bij een wetenschappelijke behandeling der rekenkunde niet dienstig.

In elk geval geldt dus:

$$bx \geqq b.$$

Hieruit blijkt, *dat aan de vergelijking (89) niet kan worden voldaan als $b > a$ is* (waarmede natuurlijk niet gezegd is, dat aan (89) wel kan worden voldaan als $b < a$ is). Dit wil dus zeggen, *dat een getal, dat $> a$ is, geen deeler van a is,* hetgeen men ook op een der volgende wijze kan uitdrukken:

Iedere deeler van het getal a is $\leqq a$.

Ieder veelvoud van het getal a is $\geqq a$.

Dit beteekent, *dat a de grootste deeler van a en het kleinste veelvoud van a is.*

We merken nog op, dat uit het voorgaande onmiddellijk volgt, *dat 1 het eenige getal is, dat op ieder getal deelbaar is.*

141. Transitieve eigenschap der deelbaarheid. Deze luidt: *Is het getal a deelbaar door b en b deelbaar door c, dan is ook a deelbaar door c.*

Uit de deelbaarheid van a door b en van b door c volgt nl., dat men de getallen a' en b' zoo kan bepalen, dat

$$a = ba', \; b = cb'$$

is. Daaruit volgt dan:

$$a = ba' = (cb')\,a' = c(b'a'),$$

zoodat a door c deelbaar is.

We vestigen nog de aandacht op de *overeenstemming der eigenschap met de transitieve eigenschap van het begrip „grooter"* (zie n°. 5) [1]).

142. Men kan de eigenschap van n°. 141, die blijkbaar een onmiddellijk uitvloeisel van de associatieve eigenschap der vermenigvuldiging is, ook op een der volgende wijze formuleeren:

Een deeler van een getal is ook een deeler van een veelvoud van dat getal.

Een veelvoud van een veelvoud van een getal is zelf ook een veelvoud van dat getal.

---

[1]) Laatstgenoemde eigenschap kan men nl. ook zoo formuleeren: *Zijn de aftrekkingen $a - b$ en $b - c$ mogelijk is, dan is ook de aftrekking $a - c$ mogelijk.*

Een deeler van een deeler van een getal is zelf ook een deeler van dat getal.

143. Eigenschappen der deeling. Uit de eigenschap van n⁰. 140 blijkt onmiddelijk, *dat, als de deeling* $a : b$ *mogelijk en* $b < a$ *is, de deeling* $b : a$ *onmogelijk is.* In het bijzonder *is* a *niet op een echten deeler van* a *deelbaar.*

Hieruit ziet men, *dat de deeling niet commutatief is* (vergelijk n⁰. 75), behalve als $a = b$ is, in welk geval zoowel $a : b$ als $b : a$ gelijk aan 1 is.

144. *De in n⁰. 76—88 voorkomende eigenschappen der aftrekking,* die uit eigenschappen der optelling volgen, *zijn onmiddellijk om te zetten tot eigenschappen der deeling,* daar de eigenschappen der optelling ook voor de vermenigvuldiging gelden. Men heeft daarbij in de beschouwingen van n⁰. 76—88 slechts overal de teekens $+$ en $-$ resp. door $\times$ en $:$ te vervangen.

Een afwijking krijgt men echter ten aanzien van de voorwaarden, die vervuld moeten zijn om de verschillende aftrekkingen mogelijk te maken. Die voorwaarden zijn nl. anders dan bij de deeling en zijn hier door voorwaarden van deelbaarheid te vervangen.

145. De formules (27) en (28) van n⁰. 76 zijn op de aangegeven wijze om te zetten tot:

$$\frac{a}{b} \,.\, b = a, \tag{91}$$

$$\frac{ab}{b} = a. \tag{92}$$

Bij de eerste dezer formules wordt ondersteld, dat a door b deelbaar is (hetgeen in de plaats komt van de voorwaarde $a > b$, die voor de geldigheid van (27) noodig is), terwijl de tweede altijd geldt. Ook dit is geheel analoog met het in n⁰. 76 opgemerkte.

146. De formule (29) van n⁰. 77 gaat door de in n⁰. 144 besproken omvorming over in:

$$a \,.\, \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}. \tag{93}$$

In woorden luidt dit:

Een quotiënt wordt met een getal vermenigvuldigd door het deeltal met dat getal te vermenigvuldigen.

Of ook zoo (vergelijk n⁰. 78):

Een product van twee getallen wordt door een getal gedeeld door, zoo mogelijk, een der factoren van het product door dat getal te deelen.

147. Aangaande de formule (93) gelden geheel soortgelijke opmerkingen als de in n⁰. 78 aangaande de formule (29) gemaakte. Heeft het eerste lid van (93) beteekenis, dan kan dit tot het tweede lid herleid worden, dat dan dus ook beteekenis heeft; m. a. w. ab is deelbaar door c als b dit is, hetgeen niets anders is dan de eigenschap van n⁰. 141 [1]).

Omgekeerd kan echter het tweede lid van (93) beteekenis hebben en het eerste lid niet.

148. De formule (31) van n⁰. 79 is om te zetten tot:

$$\frac{a:b}{c} = \frac{a}{bc}. \tag{94}$$

Of in woorden:

Een quotiënt wordt door een getal gedeeld door den deeler met dat getal te vermenigvuldigen.

Heeft het eerste lid van (94) beteekenis, dan geldt dit ook voor het tweede lid en omgekeerd, geheel analoog met het aangaande de formule (31) opgemerkte.

Evenzoo vormt men de formule (32) van n⁰. 80 om tot:

$$\frac{a}{b:c} = \frac{ac}{b}. \tag{95}$$

Heeft het eerste lid hiervan beteekenis, dan geldt dit ook voor het tweede lid, maar niet omgekeerd.

---

[1]) Evenals uit de transitieve eigenschap van het begrip „grooter" (zie n⁰. 5) volgt, dat $(a + b) - c$ beteekenis heeft als $a + (b - c)$ dat heeft (zie n⁰. 78), zoo volgt uit de transitieve eigenschap der deelbaarheid (zie n⁰. 141), dat $\frac{ab}{c}$ beteekenis heeft als dit met $a \cdot \frac{b}{c}$ het geval is.

149. De formule (33) van n⁰. 81 gaat over in:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \tag{96}$$

hetgeen in woorden luidt:

Het product van twee quotiënten is het quotiënt, dat men verkrijgt door het product der deeltallen als nieuw deeltal en het product der deelers als nieuwen deeler aan te nemen.

Door volledige inductie kan de formule (96) aldus tot een product van n quotiënten worden uitgebreid:

$$\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} \cdot \ldots \ldots \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1 a_2 \ldots \ldots a_n}{b_1 b_2 \ldots \ldots b_n}. \tag{97}$$

Verder gaat de formule (34) van n⁰. 81 over in:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}. \tag{98}$$

De tweede leden van (96), (97) en (98) hebben beteekenis zoo dit resp. met de eerste leden het geval is, maar niet omgekeerd.

150. De formules (35) en (36) van n⁰. 82 en 83 gaan over in:

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a}{b : c}, \tag{99}$$

$$\frac{a : b}{c} = \frac{a : c}{b}, \tag{100}$$

of in woorden:

Een quotiënt wordt met een getal vermenigvuldigd door, zoo mogelijk, den deeler door dat getal te deelen.

Een quotiënt wordt door een getal gedeeld door het deeltal door dat getal te deelen.

Uit (99) ziet men, dat $a : (b : c)$ niet gelijk is aan $(a : b) : c$ (tenminste als $c > 1$ is), *zoodat de deeling niet associatief is.*

Uit de formules (37) en (38) van n⁰. 83 volgt verder nog:

$$a \cdot \frac{b}{c} = b \cdot \frac{a}{c}, \tag{101}$$

$$\frac{a}{b : c} = \frac{c}{b : a}. \tag{102}$$

151. Met de eigenschap van n⁰. 84 komt overeen:

Is $a > b$, dan is:

$$\frac{a}{c} > \frac{b}{c}.$$

Voor het bewijs hiervan heeft men zich op de eigenschap van n⁰. 105 (die met die van n⁰. 49 overeenkomt) te beroepen. Het bewijs komt dus hierop neer, dat uit $\frac{a}{c} \leqq \frac{b}{c}$ zou volgen:

$$c \cdot \frac{a}{c} \leqq c \cdot \frac{b}{c},$$

dus $a \leqq b$, in strijd met het onderstelde.

De in de eigenschap van n⁰. 84 genoemde voorwaarde $c < a$ en $< b$, die dient om de aftrekkingen $a - c$ en $b - c$ mogelijk te maken, is nu natuurlijk te vervangen door de voorwaarde, *dat c zoowel op a als op b deelbaar is.*

152. Het vergelijken van quotiënten. De omzetting der eigenschap van n⁰. 85 tot quotiënten luidt:

Zijn b en d resp. deelbaar op a en c, dan geldt dan en alleen dan:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

als voldaan is aan:

$$ad = bc.$$

Hieruit leidt men de volgende formule af (die met de formule (42) van n⁰. 87 overeenkomt):

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}. \tag{103}$$

In woorden luidt dit:

Een quotiënt verandert niet als men deeltal en deeler met een zelfde getal vermenigvuldigt of door een zelfde getal deelt.

153. Eindelijk komt met de eigenschap van n⁰. 88 overeen:

Men heeft dan en alleen dan:

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$$

als voldaan is aan:

$$ad > bc.$$

De voorwaarde $a > b$ en $c > d$ uit de eigenschap van n⁰. 88 is nu natuurlijk door de voorwaarde van *deelbaarheid van a door b en van c door d* te vervangen.

154. Distributieve eigenschap der deeling. Zijn a en b beide door c deelbaar, dan heeft men volgens de distributieve eigenschap der vermenigvuldiging:

$$\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right).c=\frac{a}{c}.c+\frac{b}{c}.c=a+b. \qquad (104)$$

Hieruit volgt:

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}. \qquad (105)$$

Dit drukt uit, *dat de deeling, wat het deeltal betreft, distributief is ten opzichte van de optelling.*

De distributieve eigenschap geldt echter niet wat den deeler betreft, zooals b.v. kan blijken uit:

$$\frac{2}{1}+\frac{2}{1}=4, \quad \frac{2}{1+1}=1.$$

De formule (105) kan worden uitgebreid tot:

$$\frac{a_1}{b}+\frac{a_2}{b}+\ldots.+\frac{a_n}{b}=\frac{a_1+a_2+\ldots.+a_n}{b}. \qquad (106)$$

155. Onderstel a en b deelbaar door c. Is $a > b$, dan is $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ (zie de eigenschap van n⁰. 151) en volgens de distributieve eigenschap der vermenigvuldiging ten opzichte van de aftrekking (dus volgens de formule (59) van n⁰. 103):

$$\left(\frac{a}{c}-\frac{b}{c}\right).c=\frac{a}{c}.c-\frac{b}{c}.c=a-b. \qquad (107)$$

Hieruit volgt:

$$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}, \qquad (108)$$

hetgeen uitdrukt, *dat de deeling, wat het deeltal betreft, distributief is ten opzichte van de aftrekking.* Dit geldt echter weer niet voor den deeler.

156. Eenige eigenschappen betreffende deelbaarheid. Bij het bewijs van n⁰. 154 is slechts aangenomen, dat a en b door c deelbaar zijn. Dit voert tot (104), waaruit men afleidt, dat $a+b$ door c deelbaar is. Men heeft dus:

Zijn de getallen a en b beide deelbaar door c, dan is ook $a+b$ deelbaar door c.

Het is duidelijk, *dat deze eigenschap tot een som van n termen is uit te breiden.*

Opgemerkt zij nog, dat uit de deelbaarheid van $a + b$ door c niet tot de deelbaarheid van a en b door c kan worden besloten, zoodat het tweede lid van (105) zin kan hebben zonder dat dit met het eerste lid het geval is.

157. Op geheel soortgelijke wijze volgt uit het bewijs van n⁰. 155, dus uit (107):

Is $a > b$ en zijn a en b beide deelbaar door c, dan is ook $a - b$ deelbaar door c.

Heeft het eerste lid der formule (108) zin, dan geldt dus hetzelfde voor het tweede lid, maar niet omgekeerd. Het eerste lid van (108) kan dus steeds door het tweede lid vervangen worden, terwijl het omgekeerde alleen mogelijk is als a en b door c deelbaar zijn.

158. Een onmiddellijk gevolg der eigenschap van n⁰. 157 is.

Zijn a en $a + b$ beide deelbaar door c, dan is ook b deelbaar door c.

Voor b kan nl. $(a + b) - a$ worden geschreven.

Een andere formuleering van dit gevolg der eigenschap van n⁰. 157 is:

Is a wel en b niet deelbaar door c, dan is $a + b$ niet deelbaar door c.

Immers waren a en $a + b$ beide deelbaar door c, dan was (volgens de vorige formuleering) ook b deelbaar door c, in strijd met het onderstelde.

159. Op soortgelijke wijze volgt uit de eigenschap van n⁰. 156:

Is $a > b$ en zijn b en $a - b$ beide deelbaar door c, dan is ook a deelbaar door c.

Is a niet en b wel deelbaar door c, dan is $a - b$ ($a > b$ ondersteld) niet deelbaar door c.

Verder volgt uit de eigenschap van n⁰. 157 nog:

Is a wel en b niet deelbaar door c, dan is $a - b$ ($a > b$ ondersteld) niet deelbaar door c.

Is $a > b$ en zijn a en $a - b$ beide door c deelbaar, dan is ook b door c deelbaar.

160. Is a deelbaar door b, dan kan men een getal q bepalen, waarvoor $a = bq$ is. Is verder aan $ad = bc$ voldaan, dan is:

$$bqd = bc,$$

waaruit in verband met de ondubbelzinnigheid der deeling (zie n⁰. 133) volgt, dat $c = qd$, dus c door d deelbaar is. Hiermede is de volgende aanvulling der eerste eigenschap van n⁰. 152 verkregen:

Is het getal a deelbaar door b en is voldaan aan

$$ad = bc,$$

dan is c deelbaar door d.

Daar

$$a(be) = b(ae)$$

is, ligt hierin als bijzonder geval opgesloten:

Is a deelbaar door b, dan is ae deelbaar door be en omgekeerd.

Hieruit ziet men, dat de deelingen voorkomende in de formule (103) van n⁰. 152 òf beide mogelijk òf beide onmogelijk zijn.

161. Eigenschappen der deeling in verband met de machtsverheffing. Uit de formule (69) van n⁰. 122 volgt:

$$a^{b-c}a^c = a^{(b-c)+c} = a^b,$$

waaruit men afleidt:

$$a^{b-c} = \frac{a^b}{a^c}. \tag{109}$$

Hierbij wordt natuurlijk $b > c$ ondersteld. Is hieraan voldaan, dan is de aftrekking $b - c$ mogelijk en daardoor ook de deeling $a^b : a^c$.

162. Is a deelbaar door b, dan volgt uit de distributieve eigenschap der machtsverheffing, dus uit de formule (67) van n⁰. 119:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^c . b^c = \left(\frac{a}{b} . b\right)^c = a^c,$$

dus:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^c = \frac{a^c}{b^c}. \tag{110}$$

Dit drukt uit, *dat de machtsverheffing, wat het grondtal betreft, distributief is ten opzichte van de deeling.*

De formule (110) is ook te verkrijgen door in de formule (97) van n⁰. 149 de deeltallen a_1, a_2, enz. alle onderling gelijk te nemen, evenals de deelers b_1, b_2, enz.

Blijkens de van (110) gegeven afleiding hebben beide leden dier formule zin als a door b deelbaar is. *Is dus de deeling $a:b$ mogelijk, dan geldt hetzelfde voor de deeling $a^c : b^c$.* Dat ook het omgekeerde waar is, dus *dat uit de deelbaarheid van a^c door b^c de deelbaarheid van a door b volgt*, zal in n⁰. 212 blijken.

163. Merkwaardige producten en quotiënten. Is $a > b$, dan is:

$$(a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) =$$
$$= (a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \dots + a^2b^{n-2} + ab^{n-1}) -$$
$$-(a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \dots + ab^{n-1} + b^n) =$$
$$= \{a^n + (a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \dots + ab^{n-1})\} -$$
$$-\{(a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \dots + ab^{n-1}) + b^n\}.$$

Volgens de eigenschap van n⁰. 87 heeft men dus:

$$(a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1}) = a^n - b^n. \quad (111)$$

Het eerste lid van deze formule wordt een ***merkwaardig product*** genoemd. Voor $n = 2$ luidt de formule:

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2. \quad (112)$$

164. Men kan de formule (111) ook in den volgenden vorm brengen:

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}. \quad (113)$$

Het tweede lid hiervan is een *som van n termen.*

De formule (113) drukt uit, *dat $a^n - b^n$ door $a - b$ deelbaar is.* Het tweede lid van (113) is het quotiënt dier deeling. Men noemt dit een ***merkwaardig quotiënt.***

165. Uit (113) leidt men af door a en b resp. door a^2 en b^2 te vervangen en van de formule (71) van n⁰. 123 gebruik te maken:

$$\frac{a^{2n} - b^{2n}}{a^2 - b^2} = a^{2n-2} + a^{2n-4}b^2 + a^{2n-6}b^4 + \dots + a^2b^{2n-4} + b^{2n-2}.$$

Door beide leden met $a - b$ te vermenigvuldigen vindt men, lettend op (99) en (112), het volgende *merkwaardige quotiënt*:

$$\frac{a^{2n} - b^{2n}}{a + b} = (a - b)(a^{2n-2} + a^{2n-4}b^2 + a^{2n-6}b^4 + \dots + b^{2n-2}) =$$
$$= (a^{2n-1} + a^{2n-3}b^2 + a^{2n-5}b^4 + \dots + ab^{2n-2}) -$$
$$-(a^{2n-2}b + a^{2n-4}b^3 + a^{2n-6}b^5 + \dots + b^{2n-1}). \quad (114)$$

Deze formule geldt als $a > b$ is. Blijkens de afleiding is dan de aftrekking voorkomend in het laatste lid van (114) mogelijk.

166. Is $a > b$, dan is:

$$\frac{a(a^{2n} - b^{2n})}{a+b} + b^{2n} = \frac{a(a^{2n} - b^{2n}) + (a+b)\,b^{2n}}{a+b} = \frac{a^{2n+1} + b^{2n+1}}{a+b};$$

daar de deeling voorkomende in het eerste lid mogelijk is, geldt hetzelfde voor die in het derde lid.

Volgens (114) heeft men dus het volgende *merkwaardige quotiënt:*

$$\frac{a^{2n+1} + b^{2n+1}}{a+b} = (a^{2n} + a^{2n-2}b^2 + a^{2n-4}b^4 + \ldots\ldots + a^2b^{2n-2} + b^{2n}) -$$
$$- (a^{2n-1}b + a^{2n-3}b^3 + a^{2n-5}b^5 + \ldots\ldots + a^3b^{2n-3} + ab^{2n-1}). \qquad (115)$$

Beide leden hiervan blijven onveranderd als men a en b verwisselt, zoodat (115) ook voor $a < b$ geldig is. Dit is eveneens het geval voor $a = b$, daar dan zoowel het eerste als het tweede lid van (115) tot a^{2n} te herleiden is.

De formule (115) is natuurlijk ook rechtstreeks op soortgelijke wijze als (113) aan te toonen, nl. door het tweede lid van (115) met $a + b$ te vermenigvuldigen en het product tot $a^{2n+1} + b^{2n+1}$ te herleiden, hetgeen we aan den lezer overlaten. De onderscheiding der gevallen $a > b$, $< b$ of $= b$ is dan niet noodig [1]).

---

[1]) In n⁰. 631 en 632 zullen de merkwaardige quotiënten (114) en (115) op eenvoudiger wijze uit (113) worden afgeleid.

§ 7. Verdere eigenschappen betreffende deelbaarheid.

167. Opgaande en niet-opgaande deelingen. Is a niet deelbaar door b en $> b$, dan is $b > 1$ (zie n°. 139), dus volgens de eigenschap van n°. 105:

$$ab > a. \tag{116}$$

Van de a getallen

$$b, 2b, 3b, \ldots, ab \tag{117}$$

is dus het eerste $< a$ en het laatste $> a$. Zij qb het grootste der getallen (117), dat nog $< a$ is; volgens de eigenschap van n°. 33 is zulk een grootste getal aanwezig. Blijkens (116) is dan $q < a$, zoodat het getal $(q + 1)b$ ook tot de getallen (117) behoort en dus $> a$ is; wegens het niet deelbaar zijn van a door b is nl. $(q + 1)b = a$ uitgesloten.

We vinden dus:

Is a niet deelbaar door b en $> b$, dan kan men steeds een zoodanig getal q bepalen, dat voldaan is aan:

$$qb < a < (q + 1)b. \tag{118}$$

Door deze ongelijkheden is het getal q ondubbelzinnig bepaald, daar (118) uitdrukt, *dat q het grootste getal is, waarvoor $qb < a$ is.*

168. Hoewel de deeling van a door b, zooals die in n°. 132 gedefiniëerd is, in het in n°. 167 beschouwde geval niet mogelijk is en er dus van geen quotiënt, gedefiniëerd op de wijze van n°. 138, sprake is, wordt toch ook het door (118) bepaalde getal q het ***quotiënt** der deeling van a door b* genoemd. Waar dit ter voorkoming van misverstand noodig is zullen we het getal q (ter onderscheiding van het quotiënt volgens n°. 138) het ***partiëele*** (of gedeeltelijke) ***quotiënt*** noemen.

Men spreekt in het nu beschouwde geval, *waarbij de deeler niet op het deeltal deelbaar is*, van een ***niet-opgaande** deeling*, terwijl in tegenstelling daarmede de deeling, zooals die oorspronkelijk gedefiniëerd is, een ***opgaande** deeling* heet.

169. Bij een niet opgaande deeling volgt uit (118) (zie n⁰. 167), dat de aftrekking $a - qb$ mogelijk is. Is

$$a - qb = r,$$

dus:

$$a = qb + r, \tag{119}$$

dan wordt r de ***rest** der* (niet-opgaande) *deeling* genoemd.

Uit (118) en (119) volgt verder:

$$qb + r < (q + 1)b = qb + b,$$

dus:

$$r < b,$$

zoodat de rest der deeling kleiner dan het deeltal is.

Is omgekeerd *aan (119) voldaan voor* $r < b$, dan kan men daaruit in verband met de tweede eigenschap van n⁰. 158 besluiten, *dat a niet door b deelbaar is;* immers uit $r < b$ volgt, dat r niet door b deelbaar is (zie n⁰. 140).

Verder besluit men uit (119) en $r < b$, dat aan (118) voldaan is, *dus dat q het* (partiëele) *quotiënt en r de rest der* (niet-opgaande) *deeling is.* Quotiënt en rest kunnen dus ook gedefiniëerd worden als *het getal q en het getal* $r < b$, *waarvoor aan (119) voldaan is.*

Is $b = 2$, dan volgt uit $r < b$, dat $r = 1$ is. Volgens (119) *is dus een oneven getal, dat* > 2 *is, steeds in den vorm* $2q + 1$ *te schrijven.* We merken nog op, dat ieder oneven getal, ook 1, in den vorm $2v - 1$ te schrijven is.

170. Gemeene deelers van twee getallen. Onder een ***gemeenen deeler** van twee getallen a en b* wordt een getal verstaan, dat zoowel op a als op b deelbaar is. Voor ieder tweetal getallen is 1 een gemeene deeler. Is 1 de eenige gemeene deeler van a en b, dan worden a en b ***onderling ondeelbaar*** of ***relatief priem*** genoemd; hebben a en b echter een gemeenen deeler, die > 1 is, dan heeten deze getallen ***onderling deelbaar.***

Uit deze definitie volgt, *dat 1 met ieder getal onderling ondeelbaar is.*

171. *Is a een veelvoud van b en* $b > 1$, *dan zijn a en b onderling deelbaar,* daar dan b een gemeene deeler van a en b

is [1]). Iedere deeler van b is dan volgens de eigenschap van n°. 141 ook een deeler van a. Men heeft dus:

Is b een deeler van a, dan zijn de gemeene deelers van a en b de deelers van b.

Dit geldt natuurlijk ook voor $b = 1$.

172. Bepaling der gemeene deelers. Is g een gemeene deeler van a en b en is aan de gelijkheid (119) van n°. 169 voldaan, dan is g volgens de eigenschap van n°. 141 een deeler van qb, dus volgens de eigenschap van n°. 157 een deeler van $r = a - qb$ [2]), dus een gemeene deeler van b en r.

Is omgekeerd g een gemeene deeler van b en r, dan is g volgens de eigenschap van n°. 156 ook een deeler van a, dus een gemeene deeler van a en b.

We vinden dus:

Is aan de gelijkheid (119) van n°. 169 voldaan, dan zijn de gemeene deelers van a en b dezelfde als de gemeene deelers van b en r.

173. De eigenschap van n°. 172 is natuurlijk alleen van belang als b geen deeler van a is (daar men anders de eigenschap van n°. 171 kan toepassen). Verder geeft die eigenschap de grootste vereenvoudiging als men voor q het (partiëele) quotiënt der deeling van a door b neemt, daar r dan zoo klein mogelijk is, nl. de rest der deeling.

De eigenschap van n°. 172 drukt dan uit, *dat men bij de bepaling der gemeene deelers van twee getallen, waarvan het kleinste geen deeler van het grootste is, het grootste door de rest der deeling van het kleinste op het grootste (dus door een getal kleiner dan het kleinste) kan vervangen.*

174. Door de eigenschap van n°. 172 bij herhaling toe te passen kan men de getallen, wier gemeene deelers men zoekt, voortdurend verkleinen zoolang het kleinste niet deelbaar is op het grootste. Daar deze verkleining niet onbepaald voortgezet

---

[1]) Het deelbaar zijn van b op a en het onderling ondeelbaar zijn met a is dus alleen dan met elkaar te rijmen als $b = 1$ is.

[2]) Zie ook de eerste eigenschap van n°. 158.

kan worden (daar dit zeker niet meer mogelijk is als het kleinste getal 1 geworden is [1])), zal men eindelijk op het geval stuiten, dat het kleinste getal deelbaar is op het grootste, waarna dan de gemeene deelers de deelers van het kleinste zijn.

Wanneer men na i-malige toepassing der eigenschap van n°. 172 op het in n°. 171 beschouwde geval stuit krijgt men het volgende schema (waarbij we q_1 en r_1 in de plaats van q en r schrijven):

$$\begin{array}{llll} a &= q_1 b &+ r_1 & (r_1 < b), \\ b &= q_2 r_1 &+ r_2 & (r_2 < r_1), \\ r_1 &= q_3 r_2 &+ r_3 & (r_3 < r_2), \\ r_2 &= q_4 r_3 &+ r_4 & (r_4 < r_3), \\ \ldots & & & \ldots \\ r_{i-2} &= q_i r_{i-1} &+ r_i & (r_i < r_{i-1}), \\ r_{i-1} &= q_{i+1} r_i \,. & & \end{array}$$

Het getallenpaar a, b, waarvan we uitgaan, wordt zoo achtereenvolgens door de getallenparen

$$(b,\ r_1),\ (r_1,\ r_2),\ (r_2,\ r_3),\ \ldots,\ (r_{i-1},\ r_i)$$

vervangen. De gemeene deelers van a en b zijn dus dezelfde als die van r_{i-1} en r_i, dus (daar r_{i-1} een deeler van r_i is) de deelers van r_i. We vinden zoo:

De gemeene deelers der getallen a en b zijn de deelers van de laatste rest r_i uit bovenstaand schema.

175. Grootste gemeene deeler van twee getallen. Daar de grootste deeler van een getal dat getal zelf is (zie n°. 140) is het in de eigenschap van n°. 174 genoemde getal r_i de grootste der gemeene deelers van de getallen a en b, waarom r_i de ***grootste gemeene deeler*** (waarvoor de gebruikelijke afkorting G.G.D.) *van a en b* genoemd wordt.

Het in n°. 174 voorkomende schema wordt de ***algorithmus*** (rekenwijze) ***van Euclides*** [2]) *ter bepaling van den G.G.D.* genoemd, waarbij dus die G.G.D als laatste rest optreedt.

---

[1]) Het is echter niet gezegd, dat dit geval bereikt wordt.

[2]) Van Euclides is niet veel meer bekend dan dat hij omstreeks 300 v. Chr. in Alexandrië leefde. Zijn hoofdwerk vormen de (in 13 boeken ingedeelde) „Elementen".

176. De eigenschap van n°. 174 kan nu ook aldus geformuleerd worden:

De gemeene deelers van twee getallen zijn de deelers van hun grootsten gemeenen deeler.

Dit drukt dus uit, *dat de G.G.D. niet alleen de grootste der gemeene deelers is, maar ook een veelvoud van alle gemeene deelers.*

Opgemerkt zij nog, dat het *onderling ondeelbaar* zijn van twee getallen ook zoo kan worden uitgedrukt, *dat hun grootste gemeene deeler 1 is.*

177. Eigenschappen betreffende den grootsten gemeenen deeler. Men heeft vooreerst:

Is G de grootste gemeene deeler van a en b en

$$a = Ga', \ b = Gb', \qquad (120)$$

dan zijn a′ en b′ onderling ondeelbaar.

Hadden nl. a' en b' een gemeenen deeler g, die > 1 is, dan was

$$a' = ga'', \ b' = gb'',$$

dus:

$$a = G(ga'') = (Gg)a'', \ b = (Gg)b''$$

en dus Gg een gemeene deeler van a en b. Daar nu $Gg > G$ is (zie n°. 140), komt men in strijd met het gegeven, dat G de G.G.D. van a en b is.

178. *Is aan de gelijkheden (120) voldaan, terwijl a′ en b′ onderling ondeelbaar zijn, dan is G de grootste gemeene deeler der getallen a en b.*

Uit (120) blijkt nl., dat G een gemeene deeler van a en b is. Is G' de G.G.D. van a en b, dan is (volgens de eigenschap van n°. 176) G' een veelvoud dan G, dus $G' = kG$. Men heeft nu:

$$a = G'a'' = G(ka''), \ b = G(kb''),$$

waaruit in verband met (120) volgt (zie n°. 133):

$$a' = ka'', \ b' = kb''.$$

Het getal k is dus een gemeene deeler van a' en b', waaruit in verband met de onderlinge ondeelbaarheid van a' en b' volgt, dat $k = 1$, dus $G' = G$ is; bijgevolg is G de G.G.D. van a en b.

179. *Is G de grootste gemeene deeler van a en b, dan is Gc de grootste gemeene deeler van ac en bc.*

Of anders uitgedrukt:

Worden twee getallen met een zelfde getal vermenigvuldigd, dan wordt ook hun G.G.D. met dat getal vermenigvuldigd.

Uit de gelijkheden (120) van n⁰. 177 volgt nl.:

$$ac = (Gc)a', \quad bc = (Gc)b'. \tag{121}$$

Daar a' en b' volgens de eigenschap van n⁰. 177 onderling ondeelbaar zijn, volgt uit (121) in verband met de eigenschap van n⁰. 178, dat Gc de G.G.D. van ac en bc is.

180. De eigenschap van n⁰. 179 kan ook worden aangetoond door van de getallen ac en bc den G.G.D. volgens het schema van n⁰. 174 te bepalen. Men krijgt dan een schema, dat van het schema van n⁰. 174 alleen daarin verschilt, dat alle getallen, met uitzondering van de quotiënten $q_1, q_2, \ldots, q_{i+1}$ [1]), met c vermenigvuldigd zijn. De laatste rest r_i, dus de G.G.D., wordt bijgevolg eveneens met c vermenigvuldigd als men den algorithmus van EUCLIDES op ac en bc in plaats van op a en b toepast.

We merken verder nog op, *dat de eigenschap van n⁰. 178 als bijzonder geval in die van n⁰. 179 ligt opgesloten.* Zijn nl. a' en b' onderling ondeelbaar, dan is hun G.G.D. 1; de G.G.D. van Ga' en Gb' is bijgevolg $G.\ 1 = G$.

181. Hoofdeigenschap der deelbaarheid. De bedoelde eigenschap, die voor de rekenkunde van het grootste belang is en herhaaldelijk wordt toegepast, luidt:

Is het product ab deelbaar door het getal c en zijn a en c onderling ondeelbaar, dan is b deelbaar door c.

Uit de onderlinge ondeelbaarheid van a en c volgt nl., in verband met de eigenschap van n⁰. 178, dat b de G.G.D. van ab en cb is. Daar nu (wegens de deelbaarheid van ab door c) het getal c een gemeene deeler van ab en cb is, is c een deeler van b (zie de eigenschap van n⁰. 176).

182. Ander bewijs der hoofdeigenschap. Zonder gebruik te maken van de theorie van den G.G.D. kan de eigenschap van n⁰. 181 op de volgende wijze worden aangetoond.

De eigenschap is onmiddellijk duidelijk voor $c = 1$, zoodat aan

---

[1]) Vergelijk de eigenschap van n⁰ 456.

het onderstelde nog $c > 1$ kan worden toegevoegd. Zij m het kleinste der getallen x, waarvoor ax door c deelbaar is; daar c zulk een getal x is, heeft men $m \leqq c$.

Neem eerst aan, dat $m < c$ en een deeler van c is. Men heeft dan $c = qm$, waarin $q > 1$ is. Uit de deelbaarheid van am door c of qm volgt verder, dat a door q deelbaar is (zie de tweede eigenschap van n⁰. 160), zoodat q een gemeene deeler van a en c is, in strijd met de onderlinge ondeelbaarheid van a en c.

Vervolgens nemen we aan, dat $m < c$ en geen deeler van c is. Dan kunnen q en r zoo bepaald worden, dat

$$c = qm + r$$

en $r < m$ is. Men heeft dan:

$$ar = ac - qam,$$

zoodat (wegens de deelbaarheid van am door c) ar door c deelbaar is. Dit is echter in strijd daarmede, dat m het kleinste getal is, dat bij vermenigvuldiging met a een door c deelbaar getal oplevert.

Daar $m \leqq c$ is, blijft dus $m = c$ als eenige mogelijkheid over, zoodat we vinden:

Is a onderling ondeelbaar met c, *dan is ac het kleinste veelvoud van a, dat door* c *deelbaar is* [1].

Hieruit nu volgt onmiddellijk de eigenschap van n⁰. 181. Is nl. c onderling ondeelbaar met a en deelbaar op ab, dan is b stellig niet $< c$. Was nu b niet deelbaar door c (dus $> c$), dan zou, zooals zonder moeite is aan te toonen, as deelbaar door c zijn, waarin s de rest der deeling van b door c is. Daar $s < c$ is, komt men hierdoor in strijd met de zoo juist bewezen eigenschap.

183. Omgekeerd kan men ook met behulp van de eigenschap van n⁰. 181 de theorie van den G.G.D. ontwikkelen zonder daarbij den algorithmus van Euclides ter bepaling van dien G.G.D. noodig te hebben. Om dit te doen zien zullen we de eigenschap van n⁰. 176 uit die van n⁰. 181 afleiden.

Voor de getallen a en b kan steeds $a'G$ resp. $b'G$ geschreven

---

[1]) Dit geldt blijkbaar ook voor $c = 1$.

worden, waarin G de G.G.D. van a en b is en dus a' en b' onderling ondeelbaar zijn. Zij g een gemeene deeler van a en b. We stellen:

$$g = g'h, \quad G = G'h,$$

waarin g' en G' onderling ondeelbaar zijn. Dan is:

$$a = a'G'h, \quad b = b'G'h.$$

Nu zijn a en b beide deelbaar door $g'h$, dus $a'G'$ en $b'G'$ deelbaar door g' (zie de tweede eigenschap van n⁰. 160). Daar g' en G' onderling ondeelbaar zijn, zijn dus a' en b' beide door g' deelbaar, zoodat (wegens de onderlinge ondeelbaarheid van a' en b') $g' = 1$, dus $g = h$, dus $G = G'g$ is; bijgevolg is g een deeler van G.

Omgekeerd is iedere deeler van G een gemeene deeler van a en b, zoodat de gemeene deelers van a en b de deelers van G zijn.

184. Gevolgtrekkingen uit de hoofdeigenschap der deelbaarheid. Uit de eigenschap van n⁰. 181 volgt:

Zijn de getallen a en b beide onderling ondeelbaar met c, dan is ook het product ab onderling ondeelbaar met c.

Zij g een gemeene deeler van ab en c. De getallen a en g zijn onderling ondeelbaar, daar een gemeene deeler van a en g volgens de eigenschap van n⁰. 141 ook een gemeene deeler van a en c is, dus (wegens de onderlinge ondeelbaarheid van a en c) gelijk aan 1. Uit de onderlinge ondeelbaarheid van a en g en de deelbaarheid van ab door g volgt verder, dat b door g deelbaar is (zie n⁰. 181). Het getal g is dus een gemeene deeler van b en c, dus (wegens de onderlinge ondeelbaarheid van b en c) gelijk aan 1, waaruit de onderlinge ondeelbaarheid van ab en c volgt.

185. De eigenschap van n⁰. 184 is door volledige inductie aldus uit te breiden:

Is ieder der getallen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ onderling ondeelbaar met c, dan is ook het product $a_1 a_2 \ldots a_n$ onderling ondeelbaar met c.

Voor $n = 1$ is dit een tautologie. Neemt men de juistheid voor een product van n factoren aan, dan blijkt verder uit de eigenschap van n⁰. 184, dat

$$a_1 a_2 \ldots a_{n+1} = (a_1 a_2 \ldots a_n)\, a_{n+1}$$

met c onderling ondeelbaar is als $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ met c onderling ondeelbaar zijn.

186. Uit de eigenschap van n⁰. 181 is verder nog af te leiden: *Zijn de getallen a en b onderling ondeelbaar en beide deelbaar op c, dan is ook het product ab deelbaar op c.*

Uit het ondersteIde volgt nl.:

$$c = va = wb. \tag{122}$$

Het product va is dus door b deelbaar, terwijl a en b onderling ondeelbaar zijn. Hieruit volgt, dat v door b deelbaar is, dus:

$$v = tb,$$

waaruit in verband met (122) volgt:

$$c = t(ab).$$

Dit drukt uit, dat c door ab deelbaar is.

187. Door volledige inductie is de eigenschap van n⁰. 186 aldus uit te breiden:

Zijn de getallen

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \tag{123}$$

alle deelbaar op c, terwijl iedere twee der getallen (123) onderling ondeelbaar zijn, dan is ook het product $a_1a_2 \ldots a_n$ deelbaar op c.

Voor $n = 1$ is dit weer een tautologie. We nemen nu de eigenschap voor een product van n factoren aan en beschouwen het product

$$a_1a_2 \ldots a_{n+1} = (a_1a_2 \ldots a_n)a_{n+1}$$

(iedere twee der getallen $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ onderling ondeelbaar en ieder dier getallen deelbaar op c ondersteld). De beide getallen $a_1a_2 \ldots a_n$ en a_{n+1} zijn dan deelbaar op c en (volgens de eigenschap van n⁰. 185) onderling ondeelbaar. Volgens de eigenschap van n⁰. 186 is dus $a_1a_2 \ldots a_{n+1}$ deelbaar op c.

188. Kleinste gemeene veelvoud van twee getallen. Onder een *gemeen veelvoud* van twee getallen a en b verstaat men een getal, dat zoowel door a als door b deelbaar is. Zulk een gemeen veelvoud is als va en ook als wb te schrijven, zoodat men heeft:

$$va = wb. \tag{124}$$

Volgens de gelijkheden (120) van n°. 177, waarin G de G.G.D. van a en b is, kan voor (124) geschreven worden:

$$G(va') = G(wb'),$$

waaruit volgt (zie n°. 133):

$$va' = wb'. \tag{125}$$

Daar a' en b' onderling ondeelbaar zijn volgt uit (125) (zie het bewijs van n°. 186):

$$v = tb',$$
$$va = t(ab').$$

Ieder gemeen veelvoud van a en b is dus een veelvoud van ab'. Nu is volgens (120):

$$ab' = Ga'b' = a'b, \tag{126}$$

zoodat ab' een veelvoud van a en van b is. Het blijkt dus, *dat ieder veelvoud van ab' een gemeen veelvoud van a en b is.*

We vinden dus:

Is G de grootste gemeene deeler van a en b en verder b = Gb', dan zijn de gemeene veelvouden van a en b de veelvouden van ab'.

189. Uit de eigenschap van n°. 188 blijkt, dat ab' van alle gemeene veelvouden van a en b het kleinste is. Het getal ab' wordt daarom het ***kleinste gemeene veelvoud*** (waarvoor de gebruikelijke afkorting K.G.V.) *der getallen a en b* genoemd. De eigenschap van n°. 188 drukt nu uit:

De gemeene veelvouden van twee getallen zijn de veelvouden van hun kleinste gemeene veelvoud [1]).

Het K.G.V. is dus niet alleen het *kleinste der gemeene veelvouden,* maar ook een *deeler van alle gemeene veelvouden.*

190. Is K het K.G.V. der getallen a en b, dus het getal ab' van n°. 188, dan heeft men volgens de gelijkheden (120) van n°. 177.

$$K = a \cdot \frac{b}{G} = \frac{a}{G} \cdot b = \frac{ab}{G}. \tag{127}$$

Hieruit leest men af:

Het kleinste gemeene veelvoud van twee getallen wordt ge-

---

[1]) Men kan dit ook zoo formuleeren:
Is een getal deelbaar door a en door b, dan is het ook deelbaar door het kleinste gemeene veelvoud van a en b.

vonden door hun product door hun grootsten gemeenen deeler te deelen.

Voor (127) kan ook geschreven worden:

$$GK = ab, \qquad (128)$$

hetgeen in woorden luidt:

Het product van den grootsten gemeenen deeler en het kleinste gemeene veelvoud van twee getallen is gelijk aan het product dier getallen.

191. Zijn de getallen a en b onderling ondeelbaar, dan is $G = 1$, zoodat (128) dan overgaat in:

$$K = ab.$$

Als bijzonder geval ligt dus in de eigenschap van n^0. 190 opgesloten:

Het kleinste gemeene veelvoud van twee onderling ondeelbare getallen is het product dier getallen.

Dit is slechts een andere formuleering der eigenschap van n^0. 186 [1]).

Een ander bijzonder geval der eigenschap van n^0. 190 heeft men als b een deeler van a is. Dan is $G = b$, dus volgens (128) $K = a$, iets dat ook rechtstreeks onmiddellijk is in te zien. *Het K.G.V. van a en een deeler van a is dus a.*

192. Kleinste gemeene veelvoud van meerdere getallen. Ook bij n getallen

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \qquad (123)$$

spreekt men van een ***gemeen veelvoud***, waaronder te verstaan is een *getal, dat door ieder der getallen (123) deelbaar is.*

Zij K_2 het K.G.V. van a_1 en a_2, K_3 dat van K_2 en a_3, enz., dus ten slotte K_n het K.G.V. van K_{n-1} en a_n. Een gemeen veelvoud V der getallen (123) is een veelvoud van a_1 en a_2, dus (volgens de eigenschap van n^0. 189) een veelvoud van K_2. Daar V ook een veelvoud van a_3 (dus een gemeen veelvoud van K_2 en a_3) is, is V een veelvoud van K_3. Evenzoo is V een veelvoud

---

[1]) Men kan die eigenschap nl. ook zoo uitspreken:
Een gemeen veelvoud der onderling ondeelbare getallen a en b is een veelvoud van het product ab.

van K_4, enz., zoodat V een veelvoud van K_n is. Omgekeerd is een veelvoud van K_n een veelvoud van a_n en K_{n-1}, dus van a_{n-1}, enz., dus een gemeen veelvoud der getallen (123).

De gemeene veelvouden der getallen (123) zijn dus de veelvouden van K_n, waaruit blijkt, *dat K_n het kleinste dier gemeene veelvouden is en door de getallen (123) ondubbelzinnig bepaald*, d.w.z. onafhankelijk van de volgorde, die men ter bepaling van K_n aanneemt. Dit getal K_n wordt het ***kleinste gemeene veelvoud*** der getallen (123) genoemd.

Blijkens het voorgaande *is de eigenschap van n^0. 189 ook voor meer dan twee getallen geldig*. Daar het product der getallen (123) een gemeen veelvoud dier getallen is, *is het K.G.V. van eenige getallen een deeler van hun product*.

193. De eigenschap van n^0. 187 drukt uit, dat een gemeen veelvoud der getallen (123), zoo deze twee aan twee onderling ondeelbaar zijn, een veelvoud van $a_1 a_2 \ldots a_n$ is, dus dat $a_1 a_2 \ldots a_n$ dan het K.G.V. dier getallen is.

Zijn twee der getallen (123) onderling deelbaar, b.v. a_1 en a_2, dan is het K.G.V. K_2 van a_1 en a_2 kleiner dan $a_1 a_2$ (zie de eigenschap van n^0. 190). Het in n^0. 192 bepaalde getal K_n wordt dan kleiner dan $a_1 a_2 \ldots a_n$.

We vinden dus:

Het kleinste gemeene veelvoud van n getallen is dan en alleen dan gelijk aan het product dier getallen als iedere twee daarvan onderling ondeelbaar zijn.

---

194. Deelbare getallen en priemgetallen. Een van 1 verschillend getal wordt een ***ondeelbaar getal*** of ***priemgetal*** [1]) genoemd als het geen enkelen echten deeler (zie n^0. 139) heeft, dus geen andere deelers dan 1 en het getal zelf. Heeft het getal minstens één echten deeler, dan spreekt men van een ***deelbaar getal***; *een deelbaar getal heeft dus minstens drie deelers.*

Het getal 1 wordt noch tot de priemgetallen, noch tot de deel-

[1]) Ook zegt men dan, dat het getal ***priem*** is.

bare getallen gerekend [1]), zoodat de getallen naar hun deelbaarheid in *drie soorten* verdeeld worden, nl.:

1°. het getal 1; dit bezit slechts *één deeler;*

2°. de priemgetallen; deze bevatten *twee deelers;*

3°. de deelbare getallen; deze hebben *meer dan twee deelers.*

195. *Ieder van 1 verschillend getal is door minstens één priemgetal deelbaar.*

Dit is onmiddellijk duidelijk als het beschouwde getal, dat we a noemen, een priemgetal is, zoodat we verder a deelbaar kunnen onderstellen. Zij p de kleinste echte deeler van a (zie de eigenschap van n°. 32). Het getal p is stellig een priemgetal, daar het anders een echten deeler had, die $< p$ en een echte deeler van a zou zijn, in strijd met de onderstelling, dat p de kleinste echte deeler van a is.

Een priemgetal, dat op het getal a deelbaar is, wordt een ***priemdeeler*** of ***priemfactor*** *van a* genoemd.

196. *Een deelbaar getal a bevat minstens één priemfactor p, waarvoor* $p^2 \leqq a$ *is.*

Het getal a is als een product van twee factoren b en c te schrijven, die beide $< a$, dus > 1 zijn. Is nu $b \leqq c$, dan is volgens de eigenschap van n°. 105:

$$b^2 \leqq bc = a.$$

Is p een priemfactor van b, dan is $p \leqq b$, dus:

$$p^2 \leqq b^2 \leqq a.$$

Het deelbare getal a bevat een priemfactor p, waarvoor $p^2 < a$ *is, behalve* als voor den kleinsten priemfactor van a geldt: $p^2 = a$, dus *als a het kwadraat van een priemgetal p is* [2]).

197. Bij het onderzoek of een gegeven getal a een priemgetal is heeft men volgens de eigenschap van n°. 196 slechts na te

---

[1]) Op het eerste gezicht lijkt het aangewezen het getal 1 een priemgetal te noemen. Voor de formuleering van verschillende eigenschappen is het echter doelmatig de indeeling te maken zooals in het volgende is aangegeven (zie n°. 204).

[2]) Dit is het eenige geval, waarin a juist drie deelers bezit (nl. 1, p en p^2).

gaan *of a door een priemgetal deelbaar is en kan men zich daarbij beperken tot de priemgetallen p, waarvoor* $p^2 \leqq a$ *is.*

Zoo besluit men, dat 953 een priemgetal is, daar het door geen der priemgetallen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 en 29 deelbaar is en $31^2 = 961 > 953$ is [1]).

198. Eigenschappen betreffende priemgetallen. Neemt men in de eigenschap van n⁰. 181 voor c een priemgetal, dan beteekent de onderlinge ondeelbaarheid van a en c, *dat a niet door c deelbaar is.* De eigenschap luidt dan:

Is het product ab deelbaar door het priemgetal c, maar a niet deelbaar door c, dan is b deelbaar door c.

Men kan dit ook zoo formuleeren:

Is het product ab door het priemgetal c deelbaar, dan is minstens één der beide factoren door c deelbaar.

199. De eigenschap van n⁰. 185 gaat als c priem is over in:

Is geen der getallen $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ *door het priemgetal c deelbaar, dan is ook het product* $a_1 a_2 \ldots\ldots a_n$ *niet door c deelbaar is.*

Door een redeneering uit het ongerijmde volgt hieruit:

Is het product $a_1 a_2 \ldots\ldots a_n$ *door het priemgetal c deelbaar, dan is minstens één der factoren van het product door c deelbaar.*

200. Neemt men voor de getallen (123) van n⁰. 187 verschillende priemgetallen, dan zijn iedere twee dier getallen onderling ondeelbaar. Voor dit geval luidt de eigenschap van n⁰. 187:

Is een getal door n verschillende priemgetallen deelbaar, dan is het ook door het product dier priemgetallen deelbaar.

201. Ontbinding van een getal in priemfactoren. Is a een deelbaar getal, dan is dit door minstens één priemgetal p_1 deelbaar (zie n⁰. 195) en dus te schrijven als $p_1 a_1$, waarin:

$$1 < a_1 < a$$

is. Is a_1 een deelbaar getal, dan is evenzoo a_1 te schrijven als $p_2 a_2$, waarin p_2 priem is en

$$1 < a_2 < a_1.$$

---

[1]) We loopen hier vooruit op de later te bespreken schrijfwijze der getallen in het tientallig stelsel (zie § 5 en 6 van Hoofdst. II), iets dat, waar het slechts een voorbeeld betreft, geen bezwaar kan opleveren.

210525

Men heeft dan:

$$a = p_1 p_2 a_2.$$

Is a_2 deelbaar, dan schrijven we dit getal als $p_3 a_3$, waardoor

$$a = p_1 p_2 p_3 a_3$$

wordt, enz. Daar de getallen a_1, a_2, a_3, enz. voortdurend kleiner worden, breekt de rij dier getallen af; het laatste getal dier rij is dan een priemgetal.

Op deze wijze blijkt, *dat het getal a als een product van priemgetallen te schrijven is* of, zooals men ook zegt, *in priemfactoren te* ***ontbinden***. Dit geldt ook nog als a priem is; het aantal factoren van het product bedraagt dan nl. 1.

202. Bij de in n⁰. 201 besproken ontbinding van het getal a in priemfactoren kunnen gelijke factoren voorkomen. Deze nemen we samen tot een macht, waardoor een ontbinding van den vorm

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots\ldots p^{\alpha_k} \qquad (129)$$

ontstaat. Hierin zijn dan p_1, p_2, ..., p_k alle verschillend.

Zoo dit voordeel oplevert kan men de priemgetallen p_1, p_2, ..., p_k naar de grootte gerangschikt denken (zie n⁰. 36), in welk geval

$$p_1 < p_2 < p_3 < \ldots\ldots < p_k \qquad (130)$$

is.

203. Fundamentaalstelling der rekenkunde. De in n⁰. 201 besproken ontbinding van het getal a in priemfactoren is op verschillende manieren te verkrijgen, daar men het priemgetal p_1, waardoor men begint te deelen, op verschillende manieren kan kiezen (tenminste als a door meerdere priemgetallen deelbaar is), terwijl het getal a ook van dien aard kan zijn, dat dit als een product van twee deelbare getallen te schrijven is, die dan verder ontbonden worden. De vraag is nu of men in al die gevallen tot dezelfde ontbinding in priemfactoren geraakt.

We willen nu aantoonen, dat het antwoord hierop bevestigend luidt. Zij het getal a op de een of andere wijze in priemfactoren ontbonden, dus in den door (129) aangegeven vorm geschreven. Dan is a deelbaar door p_1. Bij een tweede ontbinding van a in priemfactoren zal dus (volgens de tweede formuleering der eigenschap van n⁰. 199) minstens één dier priemfactoren door p_1 deelbaar,

dus p_1 zelf zijn [1]). Daar hetzelfde voor p_2, p_3, ... geldt, zullen bij die tweede ontbinding de priemgetallen p_1, p_2, ..., p_k alle minstens éénmaal als factor optreden. Om dezelfde reden zullen de verschillende priemfactoren der tweede ontbinding ook alle bij de ontbinding (129) voorkomen, zoodat die tweede ontbinding luidt:

$$a = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots . p_k^{\beta_k}.$$

Aangetoond moet nu nog worden, dat de exponenten, waarmede de priemfactóren zijn aangedaan, bij de tweede ontbinding dezelfde zijn als bij de eerste. Daartoe nemen we aan, dat α_1 en β_1 ongelijk waren, b.v. $\alpha_1 > \beta_1$. Uit

$$p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots . p_k^{\alpha_k} = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots . p_k^{\beta_k}$$

volgt dan door beide leden door $p_1^{\beta_1}$ te deelen:

$$p_1^{\alpha_1 - \beta_1} p_2^{\alpha_2} \dots . p_k^{\alpha_k} = p_2^{\beta_2} \dots . p_k^{\beta_k}.$$

Het eerste lid van deze gelijkheid is door p_1 deelbaar en het tweede lid niet (zie de eerste formuleering der eigenschap van n°. 199), zoodat men tot een ongerijmdheid geraakt. Hieruit besluit men tot $\alpha_1 = \beta_1$, terwijl men natuurlijk evenzoo vindt $\alpha_2 = \beta_2$, enz.

Hiermede is aangetoond:

Een getal > 1 is op één en slechts één manier als een product van priemgetallen te schrijven [2]), *waarbij producten, die slechts in de volgorde der factoren verschillen, als dezelfde beschouwd worden.*

Deze stelling is voor de rekenkunde van de grootste beteekenis, waarom ze wel de ***fundamentaalstelling der rekenkunde*** genoemd wordt.

204. Voor de geldigheid der eigenschap van n°. 203 is het noodig *het getal 1 niet tot de priemgetallen te rekenen* (vergelijk n°. 194). Immers was bij de door (129) aangegeven ontbinding $p_1 = 1$, dan zou de exponent α_1 geheel willekeurig te kiezen en dus niet meer door het te ontbinden getal a bepaald zijn. Door 1 onder de priemgetallen op te nemen moet men dus in de for-

---

[1]) Zie de opmerking aan het eind van n°. 204.

[2]) Het aantal factoren van dit product kan ook 1 zijn, nl. als het getal zelf een priemgetal is.

muleering der eigenschap van n⁰. 203 het woord „priemgetallen" door „priemgetallen grooter dan 1" vervangen. Daar men dan ook bij verschillende andere eigenschappen van priemgetallen > 1 zou moeten spreken, is het voordeeliger 1 niet tot de priemgetallen te rekenen.

Bij het bewijs van n⁰. 203 is van de omstandigheid, dat 1 geen priemgetal is, gebruik gemaakt door op te merken, *dat een priemgetal, dat door een priemgetal* p_1 *deelbaar is, aan* p_1 *gelijk is*, iets dat niet meer juist zou zijn als $p_1 = 1$ kon zijn.

205. Toepassing der eigenschap van n⁰. 203 op de bepaling van G.G.D. en K.G.V. Is a deelbaar door b, dus als bc te schrijven, dan is uit de ontbindingen van b en c in priemfactoren onmiddellijk de ontbinding van a af te leiden; bij de gemeenschappelijke priemfactoren van b en c heeft men dan de exponenten op te tellen. Hieruit blijkt, dat de priemfactoren van b ook alle in a voorkomen en wel met denzelfden of grooteren exponent.

Is omgekeerd gegeven, dat de priemfactoren van b met denzelfden of grooteren exponent in a voorkomen, dan blijkt onmiddellijk, dat a door b deelbaar is, zoodat men heeft:

Het getal a is dan en alleen dan door b deelbaar als, bij de ontbinding van a en b in priemfactoren, de priemfactoren van b alle in a voorkomen met denzelfden of grooteren exponent [1]).

Zoo is het getal $2^3 . 3^2 . 5 . 7^2$ deelbaar door $3^2 . 5 . 7$, maar niet door $2^4 . 3 . 7$ en niet door $3^2 . 7 . 11$.

Opgemerkt zij evenwel, dat voor het onderzoek naar de deelbaarheid van a door b de ontbinding in priemfactoren niet de aangewezen weg is, daar die ontbinding vaak zeer tijdroovend is (vooral als het getal meerdere groote priemfactoren bevat).

206. Uit de eigenschap van n⁰. 205 volgt onmiddellijk:

De grootste gemeene deeler van twee getallen a en b wordt gevonden als het product der gemeenschappelijke priemfactoren van a en b, ieder dier priemfactoren voorzien van een exponent

---

[1]) In n⁰. 391 zullen we het bewijs hiervan een meer overzichtelijken vorm geven, hetgeen door invoering van het getal nul mogelijk wordt.

gelijk aan den kleinsten der exponenten [1]), *waarmede die factor in a en b voorkomt. Zijn geen gemeenschappelijke priemfactoren aanwezig, dan is de grootste gemeene deeler 1.*

Zoo is de G.G.D. van $2 . 3^2 . 7 . 11^2$ en $3 . 5 . 11^3$ gelijk aan $3 . 11^2$. Indien echter de ontbinding van a en b in priemfactoren nog niet is uitgevoerd, en a en b groot zijn, is dit niet de aangewezen weg om den G.G.D. te bepalen, maar is de algorithmus van Euclides (zie n⁰. 174 en 175) ver te verkiezen (zie de opmerking aan het eind van n⁰. 205).

207. Natuurlijk kan men ook bij *meer dan twee getallen* van een *grootsten gemeenen deeler* spreken. Deze kan worden verkregen *door de getallen, die we $a_1, a_2, \ldots, a_n$ noemen, in priemfactoren te ontbinden en de priemfactoren, die al deze getallen gemeen hebben, voorzien van den kleinsten exponent waarmede deze in de getallen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ voorkomen, te vermenigvuldigen.*

Eenvoudiger evenwel is de G.G.D. te bepalen door eerst den G.G.D. G_2 van a_1 en a_2 te vormen, daarna den G.G.D. G_3 van G_2 en a_3, enz., waarbij G_n de gezochte G.G.D. is. Op geheel soortgelijke wijze als in n⁰. 192 blijkt dan, dat iedere gemeene deeler van $a_1, a_2, \ldots, a_n$ een deeler van G_n is, waaruit verder volgt, dat G_n onafhankelijk is van de volgorde der getallen $a_1, \ldots, a_n$. Bij deze beschouwing wordt niet van de fundamentaalstelling van n⁰. 203 gebruik gemaakt.

208. Overeenkomstige opmerkingen gelden voor het K.G.V. Zoo heeft men:

Het kleinste gemeene veelvoud der getallen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ wordt gevonden als het product der priemfactoren, die in minstens één dier getallen voorkomen, ieder dier priemfactoren voorzien van een exponent gelijk aan den grootsten der exponenten [1]), *waarmede die factor in de getallen $a_1, a_2 \ldots, a_n$* [2]) *voorkomt.*

---

[1]) Onder *het kleinste van eenige* (al of niet verschillende) *getallen* wordt verstaan een dier getallen, dat $\leqq$ ieder der overige getallen is. Een analoge definitie geldt voor *het grootste van eenige getallen.*

[2]) Hiervan heeft men natuurlijk alleen diegene te nemen, die den beschouwden priemfactor bevatten.

De aangewezen weg om het K.G.V. te bepalen (tenminste zoo de getallen niet reeds in priemfactoren ontbonden zijn) is dit echter niet; dezen vindt men in n°. 190 en 192.

209. Verdere toepassingen der eigenschap van n°. 203. De eigenschappen der deelbaarheid, die in het voorgaande met behulp van den algorithmus van EUCLIDES zijn aangetoond, zijn onmiddellijk uit de fundamentaalstelling van n°. 203 af te leiden. Men verkrijgt echter op deze wijze geen ander bewijs dier eigenschappen [1]), daar deze omgekeerd juist gediend hebben om tot de fundamentaalstelling te geraken. De bedoeling is dus slechts te laten zien, dat deze eigenschappen in de fundamentaalstelling liggen opgesloten, om daarmede de groote draagwijdte dier fundamentaalstelling te doen uitkomen.

210. Zoo blijkt de juistheid der eigenschap van n°. 176 onmiddellijk uit die van n°. 205 (welke eigenschap weer een uitvloeisel van die van n°. 203 is). Met behulp daarvan kan men nl. uit de ontbindingen van a en b in priemfactoren alle gemeene deelers van a en b afleiden (zie ook de eigenschap van n°. 206). We laten het verder aan den lezer over dit na te gaan.

Evenzoo vloeit de eigenschap van n°. 189 (en de uitbreiding daarvan tot n getallen) uit de ontbinding in priemfactoren voort, terwijl de eigenschap van n°. 190 gemakkelijk uit de eigenschappen van n°. 206 en 208 is af te leiden. Wat het laatste betreft, heeft men slechts aan te toonen, dat in het product van G.G.D. en K.G.V. van a en b iedere priemfactor van a of b voorkomt en wel met denzelfden exponent als in het product ab [2]).

211. Om de hoofdeigenschap der deelbaarheid (zie n°. 181) uit de ontbinding in priemfactoren terug te vinden merken we op, dat uit de onderlinge ondeelbaarheid van a en c volgt, dat geen enkele priemfactor van c in a voorkomt. Een priemfactor

---

[1]) Tenminste niet van al die eigenschappen. De deelbaarheidseigenschappen, die voor het bewijs der fundamentaalstelling niet gebruikt zijn (zooals de eigenschap van n°. 187 en de eigenschappen betreffende het K.G.V.), kunnen echter op deze wijze als opnieuw bewezen worden beschouwd.

[2]) Zie nader hierover n°. 403.

p, die α-maal (d.w.z. met den exponent α) in c voorkomt, komt nu, wegens de deelbaarheid van ab door c, minstens α-maal in ab, dus in b voor. Volgens de eigenschap van n⁰. 205 is b dus door c deelbaar.

We laten het aan den lezer over de eigenschappen van n⁰. 185 en 187 rechtstreeks uit de ontbinding der daarin voorkomende getallen in priemfactoren af te leiden.

212. Met behulp van de fundamentaalstelling bewijzen we nog de volgende eigenschap:

Is a^n deelbaar door b^n, dan is a deelbaar door b.

Zij p een priemfactor van b, die daarin met den exponent β voorkomt; in b^n is p dan met den exponent $n\beta$ aangedaan. Daar a^n een veelvoud van b^n is, bevat ook a^n den priemfactor p, hetgeen alleen mogelijk is als a dien priemfactor bevat. Komt nu p met den exponent α in a voor, dus met den exponent $n\alpha$ in a^n, dan is blijkens de eigenschap van n⁰. 205 (gezien de deelbaarheid van a^n door b^n):

$$n\alpha \geqq n\beta,$$

dus $\alpha \geqq \beta$. Iedere priemfactor van b komt dus met denzelfden of grooteren exponent in a voor, waaruit men (weer volgens de eigenschap van n⁰. 205) besluit, dat a door b deelbaar is.

We merken verder nog op, *dat men voor $m < n$ uit de deelbaarheid van a^m door b^n eveneens tot de deelbaarheid van a door b kan besluiten*; dan is nl. $b^n = b^m b^{n-m}$, dus a^m deelbaar door b^m.

213. Gevallen, waarin de machtsverheffing commutatief is. Als toepassing bespreken we nog de vraag na te gaan *in welke gevallen*

$$a^b = b^a\,, \tag{131}$$

dus de machtsverheffing commutatief is.

Aan (131) is zeker voldaan als $a = b$ is, zoodat we in het volgende a en b ongelijk, b.v. $a > b$, kunnen onderstellen. Dan is b^a door b^b deelbaar, zoodat als aan (131) voldaan is ook a^b door b^b deelbaar is, dus a door b (zie de eigenschap van n⁰. 212). Men kan dus $a = bc$ stellen, waardoor (131) overgaat in:

$$(bc)^b = b^{bc} = (b^c)^b.$$

Daaruit besluit men tot:

$$bc = b^c \text{ [1]).}$$

Aan deze vergelijking (waarin $c > 1$ is, daar anders $a = b$ was) is, blijkens het in n⁰. 127 gevondene, alleen voldaan als $b = c = 2$ is; in dat geval is $a = bc = 4$.

We vinden dus:

Aan de vergelijking (131) is, behalve door $a = b$, slechts voldaan als $a = 4$ en $b = 2$ is of omgekeerd $a = 2$ en $b = 4$.

---

[1]) Uit $bc \lesseqgtr b^c$ zou nl. volgen:

$$(bc)^b \lesseqgtr (b^c)^b;$$

zie de eerste eigenschap van n⁰. 124.

---

§ 8. Oneindige hoeveelheden en cardinaalgetallen.

214. Gelijkwaardigheid van hoeveelheden. Een natuurlijk getal treedt op als *aantal elementen van een eindige hoeveelheid.* We willen hier het een en ander mededeelen aangaande de uitbreiding, die het begrip „natuurlijk getal" ondergaan heeft door de voorwaarde van eindigheid der hoeveelheid los te laten; de beschouwingen daaromtrent zijn voor een groot deel afkomstig van Georg Cantor (1872 en volgende jaren).

Genoemde uitbreiding van het getalbegrip neemt in dit leerboek een op zich zelf staande plaats in doordat voor de getallen, waartoe men door de beschouwing van oneindige hoeveelheden gevoerd wordt, niet alle rekenregels gelden, die men bij de natuurlijke getallen heeft [1]), terwijl we ons overigens juist bepalen tot die uitbreidingen van het getalbegrip, waarvoor genoemde rekenregels van kracht blijven.

215. Twee (eindige of oneindige) hoeveelheden A en B, ook wel ***verzamelingen*** genoemd, heeten ***gelijkwaardig*** of ***aequivalent*** *als ze op elkaar kunnen worden afgebeeld* (zie n⁰. 14), dus als een een-eenduidige correspondentie tusschen de elementen van A en die van B kan worden vastgelegd. Men schrijft dit:

$$A \sim B.$$

Een voorbeeld van twee gelijkwaardige hoeveelheden wordt opgeleverd door twee eindige hoeveelheden met hetzelfde aantal elementen (zie de eigenschap van n⁰. 23).

216. Voor het begrip „gelijkwaardig" geldt de volgende ***transitieve eigenschap:***

---

[1]) Nl. niet die betreffende de omgekeerde verbindingen (aftrekken en deelen) en die betreffende grooter en kleiner; zie n⁰. 249—252.

Zijn A, B en C drie hoeveelheden en is

$$A \sim B \quad en \quad B \sim C,$$

dan is ook $A \sim C$ [1]).

Immers is B zoowel op A als op C afgebeeld, dan verkrijgt men een afbeelding van A op C door elementen van A en C, die met hetzelfde element van B correspondeeren als correspondeerend te beschouwen.

Om de eigenschap ook te doen doorgaan als de hoeveelheden A en C dezelfde zijn is het noodig *iedere hoeveelheid met zich zelf gelijkwaardig te noemen*, zoodat dus

$$A \sim A$$

is. Bij de afbeelding van A op A kan men ieder element met zich zelf laten correspondeeren.

217. Cardinaalgetal van een hoeveelheid. Vormt men eenige hoeveelheden, die alle met een zelfde hoeveelheid A gelijkwaardig zijn, dan zijn, volgens de eigenschap van 216, iedere twee dier hoeveelheden gelijkwaardig. Men kan nu een bepaald *teeken* kiezen *om deze hoeveelheden te onderscheiden van hoeveelheden, die daarmede niet gelijkwaardig zijn.* Dit teeken wordt het ***cardinaalgetal*** of de ***machtigheid*** der hoeveelheid genoemd.

Om een cardinaalgetal te definiëeren heeft men dus slechts één hoeveelheid te noemen, die dat cardinaalgetal bezit.

218. De cardinaalgetallen der eindige hoeveelheden (zie n⁰. 26) wordig ***eindig***, die der oneindige hoeveelheden ***oneindig*** of ***transfiniet*** genoemd. De eindige cardinaalgetallen zijn niets anders dan de natuurlijke getallen.

Een voorbeeld van een transfiniet cardinaalgetal levert het cardinaalgetal der hoeveelheid van alle natuurlijke getallen (die volgens n⁰. 28 oneindig is). Dit cardinaalgetal wordt ***aftelbaar oneindig***, of kortweg ***aftelbaar***, genoemd.

Een hoeveelheid, waarvan het cardinaalgetal aftelbaar oneindig is, wordt eveneens ***aftelbaar oneindig*** of ***aftelbaar*** genoemd. Een *aftelbare hoeveelheid* kan dus gedefiniëerd worden als een *hoeveelheid, die op de hoeveelheid der natuurlijke getallen is af te beelden.*

---

[1]) Deze eigenschap is reeds enkele malen toegepast zonder haar uitdrukkelijk te formuleeren zie; n⁰. 23 en 27.

219. Grooter en kleiner bij cardinaalgetallen. *Zijn A en B twee ongelijkwaardige hoeveelheden en is B gelijkwaardig met een deel*[1]) *van A*, dan wordt het *cardinaalgetal van A* ***grooter*** *dan dat van B* genoemd en dat van *B* ***kleiner*** dan dat van *A*. Zijn a en b die cardinaalgetallen, dan wordt dit als $a > b$ of $b < a$ geschreven.

Daar voor $a > b$ vereischt wordt, *dat de hoeveelheden A en B* ongelijkwaardig zijn, dus *niet hetzelfde cardinaalgetal hebben*, blijkt onmiddellijk, *dat grooter of kleiner de gelijkheid der cardinaalgetallen uitsluit.* Dat ook grooter en kleiner elkaar uitsluiten zal eerst later blijken (zie n⁰. 228).

220. We merken nog op, *dat men niet tot $a > b$ kan besluiten als men slechts weet, dat de hoeveelheid B op een echt deel van A is af te beelden.* Wel is dit geoorloofd als *B* eindig is, maar niet als *B*, en dus ook *A*, oneindig is. Dan is nl. *A* op een echt deel *D* van zich zelf af te beelden (zie de eigenschap van n⁰. 30); is nu de hoeveelheid *B* met *D* gelijkwaardig, dan is ze dat ook met *A*, zoodat *A* en *B* dan hetzelfde cardinaalgetal bezitten. Daarom wordt voor $a > b$ nog uitdrukkelijk verlangd, *dat A en B ongelijkwaardig zijn.*

221. De definitie van n⁰. 219 is voor eindige hoeveelheden, in welk geval (zooals reeds is opgemerkt) de cardinaalgetallen natuurlijke getallen zijn, met het begrip „grooter" voor natuurlijke getallen in overeenstemming (zie de eigenschap van n⁰. 25).

Past men de in n⁰. 219 gegeven definitie toe op een eindige en een oneindige hoeveelheid, dan blijkt onmiddellijk, *dat een transfiniet cardinaalgetal grooter is dan ieder natuurlijk getal.* Bij een oneindige hoeveelheid kan men nl. de telling onbepaald voortzetten en is dus voor ieder natuurlijk getal n een echt deel der hoeveelheid te vormen, dat n elementen bevat.

222. Kleinste transfiniete cardinaalgetal. In n⁰. 30 is gebleken: *Iedere oneindige hoeveelheid heeft een aftelbaar oneindig deel.* Dit kan ook zoo worden uitgedrukt:

---

[1]) Wegens de ongelijkwaardigheid van *A* en *B* is dit uit den aard der zaak een echt deel.

Ieder transfiniet cardinaalgetal, dat niet aftelbaar oneindig is, is grooter dan aftelbaar oneindig.

De hoeveelheid der natuurlijke getallen is dan nl. niet af te beelden op een hoeveelheid, waarbij het transfiniete cardinaalgetal behoort, maar wel op een echt deel daarvan.

223. Heeft men een oneindige hoeveelheid van natuurlijke getallen, dan kan men deze op de in n°. 36 aangegeven wijze naar de grootte rangschikken, waardoor ieder getal der hoeveelheid een rangnummer verkrijgt en (wegens de oneindigheid der hoeveelheid) ook omgekeerd ieder natuurlijk getal als rangnummer optreedt. Op deze wijze krijgt men de hoeveelheid op die van alle natuurlijke getallen afgebeeld. Men heeft dus:
Een oneindige getallenhoeveelheid is aftelbaar.

224. Hieruit volgt onmiddellijk:
Ieder oneindig deel van een aftelbaar oneindige hoeveelheid is aftelbaar.

Volgens de eigenschap van n°. 223 geldt dit nl. voor de hoeveelheid der natuurlijke getallen, dus ook voor een hoeveelheid, die daarop is af te beelden, dus voor een aftelbaar oneindige hoeveelheid.

225. De eigenschap van n°. 224 kan ook zoo geformuleerd worden:
Er is geen transfiniet cardinaalgetal, dat kleiner is dan aftelbaar oneindig.

Immers een hoeveelheid met een transfiniet cardinaalgetal, dat kleiner is dan aftelbaar oneindig, zou af te beelden moeten zijn op een oneindig deel van de hoeveelheid der natuurlijke getallen, dus volgens de eigenschap van n°. 223 aftelbaar zijn, in strijd daarmede, dat het cardinaalgetal der hoeveelheid kleiner dan aftelbaar oneindig is.

226. De eigenschap van n°. 225 drukt, gecombineerd met die van n°. 222 (tweede formuleering) uit, *dat aftelbaar oneindig het kleinste transfiniete cardinaalgetal is.*

Opgemerkt zij nog, dat beide eigenschappen niet hetzelfde uitdrukken, daar nog niet is aangetoond, dat de begrippen grooter

en kleiner elkaar uitsluiten. Zoolang dit nl. nog niet bewezen is (hetgeen in n⁰. 228 algemeen geschieden zal) volgt uit de omstandigheid, dat een niet-aftelbaar transfiniet cardinaalgetal grooter dan aftelbaar oneindig is, nog niet, dat het niet kleiner dan aftelbaar oneindig is.

227. Gelijkwaardigheidsstelling van Schröder en Bernstein. Deze onafhankelijk van elkaar omstreeks 1896 door E. Schröder en F. Bernstein gevonden stelling luidt:

Is de hoeveelheid A gelijkwaardig met een deel der hoeveelheid B en omgekeerd B gelijkwaardig met een deel van A, dan zijn A en B gelijkwaardig.

Dit is natuurlijk alleen van belang voor het geval, dat de deelen van B en A, die resp. met A en B gelijkwaardig zijn, echte deelen zijn, daar de eigenschap anders een tautologie is.

Ondersteld is

$$A \sim B' \qquad (132)$$

en

$$B \sim A', \qquad (133)$$

waarin B' een deel van B en A' een deel van A is. Met een element a_1 van A correspondeert, zoo dit tot A' behoort, volgens (133) een element b_1 van B. Behoort b_1 ook tot B', dan correspondeert daarmede volgens (132) een element a_2 van A. Behoort a_2 tot A', dan correspondeert daarmede een element b_2 van B, enz. Men krijgt zoo de rij

$$a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots, \qquad (134)$$

die òf onbepaald voortloopt, òf afbreekt doordat een element van A bereikt wordt, dat niet tot A' behoort, of een element van B, dat niet tot B' behoort.

We construeeren op de volgende wijze een correspondentie, die we C noemen. Eindigt de rij (134) met een element b_n van B, dat niet tot B' behoort, dan laten we met het element a_1 van A het element b_1 van B correspondeeren [1]). In de overige gevallen laten we met a_1 het element b van B correspondeeren, dat daarmede volgens (132) correspondeert.

---

[1]) Het element b_1 is dan aanwezig, daar anders de rij (134) met een element van A (nl. a_1) eindigde.

Bij de zoo gevormde correspondentie C correspondeert met ieder element van A één en slechts één element van B. Ook is het omgekeerde het geval. Men kan nl. bij de vorming van de rij (134) ook van een willekeurig element b_1 van B uitgaan (waarbij dan a_1 het element van A is, dat volgens (133) met b_1 correspondeert); bij de correspondentie C zal nu één en slechts één der elementen a_1 en a_2 (en stellig geen ander element van A) met b_1 correspondeeren [1]).

De correspondentie C levert dus een afbeelding der hoeveelheden A en B op elkaar.

228. Uit de eigenschap van n⁰. 227 volgt:

Het is onmogelijk, dat het cardinaalgetal van een hoeveelheid A zoowel grooter als kleiner is dan dat van een hoeveelheid B.

Was nl. het cardinaalgetal van A zoowel grooter als kleiner dan dat van B, dan was (volgens de definitie van n⁰. 219) A met een deel van B en B met een deel van A gelijkwaardig, dus A met B. Dit is echter in strijd met de definitie van „grooter".

De eigenschap drukt uit, *dat ook bij cardinaalgetallen de begrippen „grooter" en „kleiner" elkaar uitsluiten.*

229. Een verder gevolg der gelijkwaardigheidsstelling is de *transitieve eigenschap voor cardinaalgetallen van het praedicaat „grooter"*. Deze eigenschap, waarin die van n⁰. 5 voor natuurlijke getallen ligt opgesloten, luidt:

Voldoen de cardinaalgetallen a, b en c aan

$$a > b \text{ en } b > c,$$

dan is $a > c$.

Zijn nl. A, B en C hoeveelheden, die resp. a, b en c tot cardinaalgetal hebben, dan is volgens het ondersteld e:

$$A' \sim B,\ B' \sim C, \qquad (135)$$

waarin A' een deel van A en B' een deel van B is. Door de afbeelding van B op A' is nu ook B' op een deel A'' van A' afgebeeld; hierin is A'' ook een deel van A. Uit

$$A'' \sim B',\ B' \sim C$$

---

[1]) Ontbreekt het element a_2, doordat reeds b_1 niet tot B' behoort, dan correspondeert a_1 volgens den gegeven regel met b_1.

volgt nu (blijkens de eigenschap van n⁰. 216):

$$A'' \sim C.$$

Verder zijn A en C ongelijkwaardig, daar men uit $A \sim C$ in verband met (135) tot

$$A' \sim B,\ B' \sim A,$$

dus (in verband met de eigenschap van n⁰. 227) tot $A \sim B$ zou kunnen besluiten, in strijd met het ondersteld $a > b$.

230. Vergelijkbaarheid van hoeveelheden. Een vraag, die zich ten aanzien van de begrippen „grooter" en „kleiner" verder nog voordoet, is deze:

Is bij twee verschillende cardinaalgetallen steeds het eene grooter dan het andere?

Was dit bij de cardinaalgetallen der hoeveelheden A en B niet het geval, dan was A niet met een deel van B gelijkwaardig en B niet met een deel van A. Is omgekeerd A niet met een deel van B en B niet met een deel van A gelijkwaardig, waarin opgesloten ligt dat A en B ongelijkwaardig zijn (daar B ook een deel van B is), dan bestaat tusschen de cardinaalgetallen a en b dier hoeveelheden geen der betrekkingen $a = b$, $a > b$, $a < b$. De gestelde vraag kan dus ook zoo worden ingekleed:

Kan het bij twee hoeveelheden A en B voorkomen dat A met geen enkel deel van B en B met geen enkel deel van A gelijkwaardig is?

231. *Twee hoeveelheden A en B, tusschen wier cardinaalgetallen a en b een der betrekkingen $a = b$, $a > b$, $a < b$ bestaat*, dus waarbij A op een deel van B of B op een deel van A is af te beelden, worden ***vergelijkbaar*** genoemd. Men is geneigd die vergelijkbaarheid voor ieder tweetal hoeveelheden als iets van zelf sprekends aan te nemen. Evenwel is zonder de een of andere axiomatische onderstelling omtrent de beschouwde hoeveelheden de vergelijkbaarheid niet algemeen aan te toonen. Het zou ons te ver voeren hierop nader in te gaan.

232. De verschillende gevallen, die bij twee hoeveelheden A en B denkbaar zijn, kunnen ook aldus worden geformuleerd:

I. A is met een deel van B en B met een deel van A gelijkwaardig.
II. A is niet met een deel van B, maar B wel met een deel van A gelijkwaardig.
III. A is met een deel van B, maar B niet met een deel van A gelijkwaardig.
IV. A is niet met een deel van B en B niet met een deel van A gelijkwaardig.

Aan deze indeeling ziet men direct, dat de vier gevallen elkaar logisch uitsluiten en dat geen andere gevallen denkbaar zijn.

Volgens de gelijkwaardigheidsstelling van n⁰. 227 is in het geval I A gelijkwaardig met B, dus $a = b$ als a en b de cardinaalgetallen van A en B zijn. De gevallen II en III komen overeen met $a > b$ resp. $a < b$, terwijl IV het geval van onvergelijkbaarheid vertegenwoordigt (zie n⁰. 231).

---

233. Optelling van cardinaalgetallen. De beschouwingen van n⁰. 38—41 gaan ook voor oneindige hoeveelheden door. Zijn a en b de cardinaalgetallen der hoeveelheden A en B, die we zonder gemeenschappelijke elementen onderstellen, dan verstaat men (geheel in overeenstemming met de in n⁰. 43 gegeven definitie) onder $a + b$ het *cardinaalgetal der somhoeveelheid* $A + B$, die ontstaat door A en B tot één enkele hoeveelheid te vereenigen.

De door de formules (5) en (7) van n⁰. 39 en 41 uitgedrukte eigenschappen van hoeveelheden doen zien, *dat ook voor cardinaalgetallen de commutatieve en de associatieve eigenschap der optelling gelden, dus de formules (9) en (10) van n⁰. 48.*

234. Daar men ook oneindig veel hoeveelheden tot één enkele hoeveelheid vereenigen kan, is de optelling van cardinaalgetallen niet tot een eindig aantal termen beperkt.

Het is onmiddellijk in te zien, *dat ook bij een som van oneindig veel cardinaalgetallen de algemeene associatieve en commutatieve eigenschap gelden* (zie n⁰. 53 en 56).

Opgemerkt zij nog, dat zulk een som niet te verkrijgen is door eerst de som van twee cardinaalgetallen te vormen, daarna deze som te vermeerderen met een derde cardinaalgetal, enz., daar men zoo steeds een eindig aantal termen behoudt. Ook is een som van oneindig veel cardinaalgetallen niet te vergelijken met de som van een oneindig voortloopende reeks [1]); bij laatstgenoemde som heeft men nl. niet met een som in de gewone beteekenis, maar met de limiet van een som te doen; bovendien is het aantal termen van zulk een reeks aftelbaar oneindig, hetgeen bij een som van oneindig veel cardinaalgetallen niet het geval behoeft te zijn.

235. Vermenigvuldiging van cardinaalgetallen. Op de in n°. 112 aangegeven wijze kan men uit twee hoeveelheden A en B de *producthoeveelheid* $A . B$ vormen, door nl. telkens een element van A met een element van B tot een paar te vereenigen en de hoeveelheid van alle zoo te vormen paren te beschouwen. Onder het product ab der cardinaalgetallen a en b van A resp. B wordt nu het *cardinaalgetal der hoeveelheid* $A . B$ verstaan.

Uit de beschouwingen van n°. 112—116 blijkt onmiddellijk, *dat de commutatieve, associatieve en distributieve eigenschap der vermenigvuldiging*, dus de formules (50), (51) en (52) van n°. 94, 95 en 97, ook voor cardinaalgetallen gelden.

236. Op soortgelijke wijze als in n°. 112 (waar de hoeveelheden eindig ondersteld zijn) blijkt verder, *dat de producthoeveelheid* $A . B$ *ook op te vatten is als een som van* a *hoeveelheden, die alle het cardinaalgetal* b *bezitten* [2]). Ieder dier a hoeveelheden wordt gevormd door diegene der in n°. 235 genoemde paren, waarin een zelfde element van A voorkomt, als elementen van een hoeveelheid te beschouwen.

Ook bij cardinaalgetallen is dus het product ab als som van a gelijke termen b (of b gelijke termen a) te beschouwen. Dit

---

[1]) Met deze opmerking loopen we op bekende, maar hier nog niet besproken zaken vooruit.

[2]) En natuurlijk ook als een som van b hoeveelheden, die alle het cardinaalgetal a hebben.

maakt, dat de in n⁰. 97 gegeven bewijzen der beide grondvormen (52) en (53) van de distributieve eigenschap ook voor cardinaalgetallen doorgaan.

237. De vermenigvuldiging van hoeveelheden, zooals die in n⁰. 235 is beschreven, is tot meerdere hoeveelheden, ook oneindig veel hoeveelheden, uit te breiden. Een element der producthoeveelheid ontstaat door van ieder der oorspronkelijke hoeveelheden een element te nemen en deze elementen tot een hoeveelheid vereenigd te denken; die hoeveelheid is dan een element der producthoeveelheid.

Het is nu weer gemakkelijk in te zien, *dat voor de bijbehoorende cardinaalgetallen de algemeene commutatieve, associatieve en distributieve eigenschap der vermenigvuldiging geldig zijn.*

238. Machtsverheffing van cardinaalgetallen. De beschouwingen van n⁰. 130 en 131 zijn zonder moeite op oneindige hoeveelheden over te dragen. Zijn A en B twee hoeveelheden met cardinaalgetallen a en b, dan kan men de hoeveelheid A^B vormen, waarvan de elementen de beleggingen der hoeveelheid B met elementen van A zijn (zie n⁰. 131). Onder a^b verstaat men nu het *cardinaalgetal der hoeveelheid* A^B.

239. Wanneer men een element van B met de verschillende elementen van A tot paren vereenigt, krijgt men een hoeveelheid van a elementen (de zoo juist genoemde paren). Daar ieder element van B tot zulk een hoeveelheid voert, krijgt men b hoeveelheden ieder van a elementen. Deze b hoeveelheden duiden we door C aan.

Door nu van ieder der hoeveelheden C een element te nemen verkrijgt men alle elementen van B, ieder gepaard aan een element van A, dus een belegging van B met elementen van A, terwijl men ook iedere zoodanige belegging op deze wijze kan laten ontstaan. Hieruit blijkt, *dat de hoeveelheid* A^B *het product der* b *hoeveelheden* C *is.* Dit beteekent, *dat ook bij cardinaalgetallen* a^b *als het product van* b *gelijke cardinaalgetallen* a *te beschouwen is.*

240. Op geheel dezelfde wijze als bij natuurlijke getallen is dus de machtsverheffing tot vermenigvuldiging terug te brengen.

De daaruit in n⁰. 118—123 afgeleide eigenschappen der machtsverheffing, die door de formules (65), (66) [1]), (67), (69) en (71) zijn uitgedrukt, gelden dus ook voor cardinaalgetallen. We laten het aan den lezer over zich er van te overtuigen, dat de bewijsvoeringen geldig gebleven zijn; bij de uitbreiding der formules (67) en (69) heeft men zich dan echter niet op volledige inductie te beroepen, maar op de eigenschappen der vermenigvuldiging voor een willekeurig (eindig of oneindig) aantal factoren.

241. Men kan de formule (67) van n⁰. 119 ook bewijzen door op te merken, dat $a^c\, b^c$ het cardinaalgetal der hoeveelheid

$$A^C \,.\, B^C$$

is (waarbij A, B en C resp. hoeveelheden met de cardinaalgetallen a, b en c zijn). Wanneer men de hoeveelheid C met elementen van A belegt en vervolgens met elementen van B (ten einde de hoeveelheden A^C en B^C te vormen) en beide beleggingen tot een paar vereenigt, is dit te beschouwen als een belegging van C met elementen van $A \,.\, B$; immers aan ieder element van C is dan een element van A en een element van B toegevoegd, hetgeen als een toevoeging van een element van $A \,.\, B$ is op te vatten. Men vindt zoo:

$$A^C \,.\, B^C = (A \,.\, B)^C, \tag{136}$$

hetgeen onmiddellijk tot (67) voert.

242. Om op deze wijze de formule (69) van n⁰. 122 aan te toonen gaan we er van uit, dat $a^b\, a^c$ het cardinaalgetal der hoeveelheid

$$A^B \,.\, A^C$$

is. Een element dier hoeveelheid krijgt men door B zoowel als C met elementen van A te beleggen en beide beleggingen te zamen te beschouwen; dit voert dan tot een belegging der hoeveelheid $B + C$ met elementen van A. Men vindt zoo:

$$A^B \,.\, A^C = A^{B+C}, \tag{137}$$

hetgeen tot (69) voert.

We laten het aan den lezer over aan te toonen:

$$(A^B)^C = A^{BC}, \tag{138}$$

---

[1]) Omtrent de formule (66) zie nader n⁰. 255.

waarmede dan een ander bewijs der formule (71) van n⁰. 123 verkregen is.

243. Som van aftelbaar oneindig veel aftelbare hoeveelheden. We denken ons een aftelbaar oneindig aantal aftelbaar oneindige hoeveelheden

$$A_1, A_2, A_3, \dots . \qquad (139)$$

De elementen van een willekeurige dezer hoeveelheden, b.v. A_n, noemen we

$$a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \dots ,$$

zoodat dus a_{np} het p^{de} element der n^{de} hoeveelheid is.

We denken ons nu de hoeveelheden (139) tot één enkele hoeveelheid A vereenigd en toonen aan, dat ook A aftelbaar oneindig is. Daartoe moet bewezen worden, dat men de hoeveelheid der elementen a_{np} op de hoeveelheid der natuurlijke getallen kan afbeelden, dus die elementen van rangnummers kan voorzien. Dit nu kan op de volgende wijze geschieden:

$$\begin{array}{cccccccccccc} a_{11}, & a_{12}, & a_{21}, & a_{13}, & a_{22}, & a_{31}, & a_{14}, & a_{23}, & a_{32}, & a_{41}, & a_{15}, & \dots . \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & \dots . \end{array}$$

We vereenigen dus de elementen in groepen van elementen met gelijke indexsom, aldus:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & a_{11} & & & \\ & & a_{12} & & a_{21} & & \\ & a_{13} & & a_{22} & & a_{31} & \\ a_{14} & & a_{23} & & a_{32} & & a_{41} \end{array}$$

enz.

De elementen van een zelfde groep worden naar den eersten index gerangschikt, terwijl men op iedere groep de groep laat volgen, waarvoor de indexsom 1 grooter is. Het is duidelijk, dat zoo ieder element a_{np} een rangnummer krijgt. We vinden dus: *Door een aftelbaar oneindig aantal aftelbaar oneindige hoeveelheden tot één enkele hoeveelheid te vereenigen ontstaat weer een aftelbaar oneindige hoeveelheid.*

244. Bij de in n⁰. 243 beschouwde rangschikking der elementen a_{np} is zonder moeite het rangnummer van een willekeurig element a_{np} aan te geven. Het element a_{np} is nl. het n^{de} element van de

groep met indexsom $n+p$. Aan die groep gaan $n+p-2$ groepen vooraf resp. met indexsom 2, 3, 4, ..., $n+p-1$; de aantallen elementen dier groepen zijn resp. 1, 2, 3, ..., $n+p-2$. Het rangnummer van het element a_{np} is dus:

$$1+2+3+\ldots\ldots+(n+p-2)+n=\frac{(n+p-1)(n+p-2)}{2}+n \text{ [1]}.$$

Voor het bewijs van n°. 243 is deze uitdrukking voor het rangnummer echter zonder belang.

245. Uit de eigenschap van n°. 243 volgt:

De som van een eindig aantal aftelbaar oneindige hoeveelheden is aftelbaar oneindig [2]*. Hetzelfde geldt voor de som van een aftelbaar oneindig aantal eindige hoeveelheden.*

Het is nl. onmiddellijk te zien, dat de genoemde som een oneindige hoeveelheid is. Verder is die som door weglating van elementen uit de in n°. 243 beschouwde somhoeveelheid af te leiden, zoodat men met een oneindig deel van een aftelbaar oneindige hoeveelheid te doen heeft; zulk een deel nu is aftelbaar oneindig (zie de eigenschap van n°. 224).

246. Volgens het in n°. 236 gevondene is de eigenschap van n°. 243 ook aldus te formuleeren:

Het product van twee aftelbaar oneindige hoeveelheden is aftelbaar oneindig.

Door volledige inductie kan dit aldus worden uitgebreid:

Het product van een eindig aantal aftelbaar oneindige hoeveelheden is aftelbaar oneindig.

247. Formules, waarin het cardinaalgetal „aftelbaar onein-

---

[1]) Men heeft nl.:

$$2(1+2+3+\ldots\ldots+k)=\{1+2+3+\ldots\ldots+(k-1)+k\}+$$
$$+\{k+(k-1)+(k-2)+\ldots\ldots+2+1\}=$$
$$=(1+k)+\{2+(k-1)\}+\{3+(k-2)\}+\ldots\ldots+\{(k-1)+2\}+(k+1)=$$
$$=(k+1)+(k+1)+\ldots\ldots+(k+1)\,(k \text{ termen})=k(k+1).$$

Zie overigens n°. 640.

[2]) Dit drukt uit, *dat het product van een eindige en een aftelbaar oneindige hoeveelheid aftelbaar oneindig is* (zie n°. 236).

dig" voorkomt. Stelt men het aftelbaar oneindige cardinaalgetal door $\mathfrak{a}$ voor, dan volgt uit de eigenschap van n⁰. 245:

$$n\mathfrak{a} = \mathfrak{a}, \tag{140}$$

waarin n een eindig cardinaalgetal, dus een natuurlijk getal is. In het bijzonder heeft men:

$$2\mathfrak{a} = \mathfrak{a} + \mathfrak{a} = \mathfrak{a}. \tag{141}$$

Evenzoo heeft men natuurlijk:

$$\mathfrak{a} + n = \mathfrak{a}, \tag{142}$$

waarin n weer een natuurlijk getal is.

Verder volgt uit de tweede eigenschap van n⁰. 246:

$$\mathfrak{a}^n = \mathfrak{a}. \tag{143}$$

248. Uit de eerste eigenschap van n⁰. 222 volgt, dat ieder transfiniet cardinaalgetal a als $\mathfrak{a} + b$ te schrijven is [1]). Volgens de eigenschap van n⁰. 224 geldt dit nl. ook nog voor $a = \mathfrak{a}$; men kan zich hiervoor ook op (141) of (142) beroepen. Men heeft dus:

$$a = \mathfrak{a} + b,$$

of in verband met (141):

$$\mathfrak{a} + a = \mathfrak{a} + (\mathfrak{a} + b) = (\mathfrak{a} + \mathfrak{a}) + b = \mathfrak{a} + b = a.$$

Voor ieder transfiniet cardinaalgetal a geldt dus:

$$a + \mathfrak{a} = a \tag{144}$$

en evenzoo (wegens $a + n = (\mathfrak{a} + b) + n = (\mathfrak{a} + n) + b = \mathfrak{a} + b = a$):

$$a + n = a, \tag{145}$$

waarin n een natuurlijk getal is. In het bijzonder geldt:

$$a + 1 = a. \tag{146}$$

Door deze laatste formule onderscheiden zich de oneindige cardinaalgetallen van de eindige.

249. Onbepaaldheid der omgekeerde verbindingen. Terwijl de eigenschappen der optelling, vermenigvuldiging en machtsverheffing voor cardinaalgetallen onveranderd bleken door te gaan, hebben we in n⁰. 247 en 248 formules verkregen, die bij natuurlijke getallen niet gelden. Deze formules doen zien, *dat men in verschillende gevallen bij transfiniete cardinaalgetallen*

---

[1]) Opgemerkt zij, dat, als a niet-aftelbaar oneindig is, hetzelfde voor b geldt, daar anders uit (141) zou volgen:

$$a = \mathfrak{a} + b = \mathfrak{a},$$

in strijd met het gegeven, dat a niet-aftelbaar is.

gelijkheid krijgt, waar men bij natuurlijke getallen ongelijkheid aantreft.

250. Dit maakt, dat bij transfiniete cardinaalgetallen de omgekeerde verbindingen „aftrekken" en „deelen" tot onbepaaldheid kunnen voeren. Zoo doen de formules (144) en (145) zien, dat, als a een oneindig cardinaalgetal is, aan de vergelijking

$$a + x = a$$

voldaan wordt door ieder natuurlijk getal en ook door $x = \mathfrak{a}$.

Evenzoo ziet men aan de formules (140) en (143), dat aan

$$x\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$$

door ieder natuurlijk getal en door $x = \mathfrak{a}$ wordt voldaan.

De eigenschappen der aftrekking en deeling, die toch op de ondubbelzinnigheid van deze verbindingen steunen, vervallen dus voor transfiniete cardinaalgetallen.

251. Het rekenen met cardinaalgetallen is dus tot de rechtstreeksche verbindingen beperkt. De omstandigheid, dat hiervoor nog dezelfde rekenregels gelden als bij de natuurlijke getallen, verliest echter een groot deel van haar belang tengevolge van de in n⁰. 247 en 248 verkregen formules. Zoo is het b.v. weinig interessant, dat

$$2(3 + \mathfrak{a}) = 2 \,.\, 3 + 2\mathfrak{a}$$

is, daar zoowel het eerste als het tweede lid hiervan $\mathfrak{a}$ is. Men had even goed

$$2(3 + \mathfrak{a}) = 2 + 3 + \mathfrak{a}$$

of

$$2(3 + \mathfrak{a}) = 2 \,.\, 3 + \mathfrak{a}$$

kunnen schrijven, zonder dat de formule ophoudt juist te zijn.

252. Ook bij ongelijkheden kan men met transfiniete cardinaalgetallen niet op de gewone wijze rekenen. *De eigenschappen van n⁰. 49 en 105 zijn nl. niet op transfiniete cardinaalgetallen van toepassing* [1]).

Immers zijn m en n natuurlijke getallen en is $m > n$, dan

---

[1]) Dit volgt ook daaruit, dat als genoemde eigenschappen van toepassing bleven de aftrekking en de deeling ondubbelzinnig waren (zie n⁰. 69 en 133), hetgeen in n⁰. 250 gebleken is niet het geval te zijn.

heeft men niet (zooals de eigenschap van n⁰. 49 dat zou eischen) $m + \mathfrak{a} > n + \mathfrak{a}$, maar volgens de formule (142) van n⁰. 247:

$$m + \mathfrak{a} = n + \mathfrak{a}.$$

Ook heeft men dan niet $m\mathfrak{a} > n\mathfrak{a}$, maar volgens (140):

$$m\mathfrak{a} = n\mathfrak{a}.$$

---

253. Vergrooting van cardinaalgetallen. De omstandigheid, dat $\mathfrak{a}^n$ (n een natuurlijk getal) nog hetzelfde cardinaalgetal is als $\mathfrak{a}$ [1]) doet de vraag rijzen *of er, behalve aftelbaar oneindig, nog andere transfiniete cardinaalgetallen bestaan.* Dit is hetzelfde als de vraag *of er niet-aftelbaar oneindige hoeveelheden bestaan.*

Deze vraag moet bevestigend beantwoord worden. *Men kan nl. uit ieder cardinaalgetal een ander afleiden, dat grooter is,* zooals uit een in n⁰. 254 te bespreken eigenschap blijkt. Tevens ziet men zoo, *dat er geen grootste cardinaalgetal bestaat.*

254. *Zijn a en b cardinaalgetallen en is $a > 1$, dan is:*

$$a^b > b.$$

Laten nl. A en B hoeveelheden zijn, die a resp. b tot cardinaalgetal hebben, zoodat a^b het cardinaalgetal van de hoeveelheid A^B is (zie n⁰. 238). Aangetoond moet dan worden, dat B met een deel van A^B, maar niet met A^B zelf gelijkwaardig is.

Zijn e_1 en e_2 twee bepaalde elementen van A; deze zijn wegens $a > 1$ te vinden. Men kan nu een belegging van B met elementen van A vormen door aan een bepaald element E van B het element e_2 en aan alle overige elementen van B het element e_1 toe te voegen. Het aantal beleggingen van deze soort bedraagt b, daar men voor E ieder der b elementen van B kiezen kan. De hoeveelheid dier bijzondere beleggingen is een deel van A^B en gelijkwaardig met B.

Om te bewijzen, dat A^B en B niet gelijkwaardig zijn, nemen we aan, dat dit wel het geval was en men dus een afbeelding C van A^B op B kon vormen. Met een element E van B

---

[1]) Zie de formule (143) van n⁰. 247.

correspondeert dan een element van A^B, dus een belegging F van B; bij deze belegging is aan E een element e van A toegevoegd. Onder e' verstaan we nu het element e_1 of e_2 al naar gelang e niet of wel het element e_1 is; *in beide gevallen is e' van e verschillend.* We beschouwen thans de belegging $\mathbf{F}$, waarbij aan ieder element E van B op de boven aangegeven wijze een element e' van A is toegevoegd. Deze belegging $\mathbf{F}$ verschilt van de belegging F, die bij de afbeelding C met E correspondeert, daar bij de belegging F aan E het element e en bij de belegging $\mathbf{F}$ aan E het (van e verschillende) element e' van A is toegevoegd. Daar dit voor ieder element E van B geldt, is er geen element van B, dat bij de afbeelding C met de belegging $\mathbf{F}$ correspondeert, hetgeen in strijd is met de omstandigheid, dat C een afbeelding van A^B op B is.

255. De eigenschap van n⁰. 254 geldt niet voor $a = 1$, daar (ook als b oneindig is) $1^b = 1$ is. In dat geval is er nl. slechts één belegging van de hoeveelheid B met elementen van A mogelijk, waarbij dan aan ieder element van B het eenige element van A is toegevoegd.

Voor $a = 2$ is echter (zooals uit het bewijs blijkt) de eigenschap van n⁰. 254 reeds van kracht, *zoodat men voor ieder* (eindig of oneindig) *cardinaalgetal b heeft*:

$$2^b > b. \tag{147}$$

256. Rijen van cardinaalgetallen. De ongelijkheid (147) stelt ons in staat, uitgaande van het aftelbaar oneindige cardinaalgetal $\mathfrak{a}$, steeds grootere cardinaalgetallen te vormen, nl.:

$$\mathfrak{a}_1 = 2^{\mathfrak{a}},\ \mathfrak{a}_2 = 2^{\mathfrak{a}_1},\ \mathfrak{a}_3 = 2^{\mathfrak{a}_2},\ \mathfrak{a}_4 = 2^{\mathfrak{a}_3},\ \ldots\ldots, \tag{148}$$

waarbij dan:

$$\mathfrak{a} < \mathfrak{a}_1 < \mathfrak{a}_2 < \mathfrak{a}_3 < \ldots\ldots$$

is.

257. Echter is men tot de rij (148) van cardinaalgetallen niet beperkt. Zijn nl. $A, A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots$ hoeveelheden, wier cardinaalgetallen $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \ldots\ldots$ zijn, dan verkrijgt men, door de som van al deze hoeveelheden te vormen, een hoeveelheid A_ω, waarvan het cardinaalgetal minstens $\mathfrak{a}_{n+1}$ (n een natuurlijk getal),

dus $> a_n$ is. Het cardinaalgetal van A_ω, dat we a_ω noemen, is dus grooter dan ieder der cardinaalgetallen (148).

258. Uit a_ω kan men nu verder weer een rij van steeds grooter wordende cardinaalgetallen

$$a_{\omega+1} = 2^{a_\omega},\ a_{\omega+2} = 2^{a_{\omega+1}},\ a_{\omega+3} = 2^{a_{\omega+2}},\ \ldots\ldots \quad (149)$$

afleiden, waaruit men (door de bijbehoorende hoeveelheden $A_{\omega+1}, A_{\omega+2}, A_{\omega+3}, \ldots\ldots$ te vereenigen) een cardinaalgetal $a_{2\omega}$ afleidt, dat grooter dan ieder der cardinaalgetallen (149) is. Uit $a_{2\omega}$ kan men verder weer een rij grooter wordende cardinaalgetallen $a_{2\omega+1}, a_{2\omega+2}, \ldots\ldots$ afleiden, enz.

259. Zoo kan men de cardinaalgetallen $a_{3\omega}, a_{4\omega}, a_{5\omega}, \ldots\ldots$ verkrijgen, waaruit men, door vereeniging der bijbehoorende hoeveelheden $A_\omega, A_{2\omega}, A_{3\omega}, A_{4\omega}, \ldots\ldots$, een hoeveelheid A_{ω^2} verkrijgt, waarvan het cardinaalgetal a_{ω^2} grooter is dan ieder der cardinaalgetallen

$$a_\omega,\ a_{2\omega},\ a_{3\omega},\ a_{4\omega},\ \ldots\ldots$$

Steeds kan men zoo uit iedere oneindig voortloopende rij van cardinaalgetallen een cardinaalgetal afleiden, dat grooter is dan alle cardinaalgetallen dier rij, en daarna met de vorming van grootere cardinaalgetallen doorgaan.

260. Ordinaalgetallen. De indices der in n⁰. 256—259 gevonden cardinaalgetallen worden ***ordinaalgetallen*** genoemd. Deze zijn de volgende, waarbij we de vormingswijze verder voortzetten dan in het voorgaande geschied is:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\ldots$$
$$\omega,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \omega+3,\ \ldots\ldots$$
$$2\omega,\ 2\omega+1,\ 2\omega+2,\ 2\omega+3,\ \ldots\ldots$$
$$3\omega,\ \ldots\ldots,\ 4\omega,\ \ldots\ldots,\ 5\omega,\ \ldots\ldots$$
$$\omega^2,\ \omega^2+1,\ \omega^2+2,\ \omega^2+3,\ \ldots\ldots$$
$$\omega^2+\omega,\ \omega^2+\omega+1,\ \omega^2+\omega+2,\ \ldots\ldots$$
$$\omega^2+2\omega,\ \ldots\ldots,\ \omega^2+3\omega,\ \ldots\ldots,\ \omega^2+4\omega,\ \ldots\ldots$$
$$2\omega^2,\ \ldots\ldots,\ 3\omega^2,\ \ldots\ldots,\ 4\omega^2,\ \ldots\ldots$$
$$\omega^3,\ \ldots\ldots,\ \omega^4,\ \ldots\ldots,\ \omega^5,\ \ldots\ldots$$
$$\omega^\omega,\ \ldots\ldots,\ \omega^{2\omega},\ \ldots\ldots,\ \omega^{3\omega},\ \ldots\ldots$$
$$\omega^{\omega^2},\ \ldots\ldots,\ \omega^{\omega^3},\ \ldots\ldots,\ \omega^{\omega^4},\ \ldots\ldots$$

$$\omega^{\omega^{\omega}}, \ldots, \omega^{\omega^{\omega^{\omega}}}, \ldots, \omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\omega}}}}, \ldots$$

$$\omega_1, \ldots, \omega_1^{\omega_1}, \ldots, \omega_1^{\omega_1^{\omega_1}}, \ldots, \omega_1^{\omega_1^{\omega_1^{\omega_1}}}, \ldots$$

$$\omega_2, \ldots, \omega_3, \ldots, \omega_4, \ldots$$

$$\omega_\omega, \ldots, \omega_{2\omega}, \ldots, \omega_{3\omega}, \ldots$$

$$\omega_{\omega^2}, \ldots, \omega_{\omega^3}, \ldots, \omega_{\omega^4}, \ldots$$

$$\omega_{\omega^\omega}, \ldots, \omega_{\omega^{\omega^\omega}}, \ldots, \omega_{\omega^{\omega^{\omega^\omega}}}, \ldots$$

$$\omega_{\omega_1}, \ldots, \omega_{\omega_2}, \ldots, \omega_{\omega_3}, \ldots$$

$$\omega_{\omega_\omega}, \ldots, \omega_{\omega_{\omega_\omega}}, \ldots, \omega_{\omega_{\omega_{\omega_\omega}}}, \ldots$$

$$\Omega, \ldots$$

261. De eindige ordinaalgetallen zijn weer de natuurlijke getallen. Deze komen in alle eigenschappen met de eindige cardinaalgetallen overeen, zoodat bij eindige getallen nog geen behoefte aan onderscheiding tusschen cardinaalgetallen en ordinaalgetallen bestaat.

Voor de oneindige ordinaalgetallen geldt echter niet hetzelfde als voor de oneindige cardinaalgetallen. Dit blijkt direct daaruit, dat voor een oneindig cardinaalgetal a de formule (146) van n⁰. 248 geldt, terwijl dit voor een oneindig ordinaalgetal niet het geval is. Is nl. a een oneindig ordinaalgetal en

$$\mathfrak{a}_{a+1} = 2^{\mathfrak{a}_a},$$

dan is, volgens de ongelijkheid (147) van n⁰. 255, $\mathfrak{a}_{a+1}$ een grooter cardinaalgetal dan $\mathfrak{a}_a$, zoodat de indices a en $a+1$ niet als gelijk te beschouwen zijn; wel is dit met a en $1+a$ het geval [1]), waaruit men ziet, dat voor oneindige ordinaalgetallen de commutatieve eigenschap der optelling niet geldt. Overigens gaan we echter op de rekenregels voor ordinaalgetallen niet in.

262. Ook in andere gevallen treden de in n⁰. 260 genoemde ordinaalgetallen als rangnummers op, zoodat ze niet noodzakelijk

---

[1]) Voor $a = \omega$ beteekent dit, dat, als men, op dezelfde wijze als waarop $\mathfrak{a}_\omega$ uit $\mathfrak{a}$ is afgeleid, uit $\mathfrak{a}_1$ een cardinaalgetal afleidt, dit eveneens $\mathfrak{a}_\omega$ is, iets dat zonder moeite is in te zien. Daaruit volgt dan verder de juistheid voor de overige oneindige ordinaalgetallen.

rangnummers van cardinaalgetallen zijn. De ordinaalgetallen treden nl. steeds op bij zoogenaamde ***welgeordende hoeveelheden.***

Een hoeveelheid heet ***geordend*** als een wet gegeven is, waardoor voor ieder tweetal harer elementen uitgemaakt is *welk het voorafgaande en welk het volgende is* en wel zoodanig, *dat daarvoor de transitieve eigenschap* (volgt E_1 op E_2 en E_2 op E_3, dan volgt E_1 op E_3) *geldt.* De hoeveelheid heet ***welgeordend*** *als bovendien ieder deel der hoeveelheid* (dus ook de hoeveelheid zelf) *een eerste element bezit,* d.w.z. een element, dat aan ieder ander element van dat deel voorafgaat. De in n⁰. 256—259 besproken cardinaalgetallen vormen, naar de grootte gerangschikt, zulk een welgeordende hoeveelheid.

Men kan nu aan het eerste element van een welgeordende hoeveelheid A het rangnummer 1 toekennen, aan het eerste element van de hoeveelheid, die uit A ontstaat door het element met rangnummer 1 te verwijderen, het rangnummer 2, enz. De hoeveelheid, die overblijft door alle elementen met eindige rangnummers te verwijderen, heeft weer een eerste element; hieraan wordt het rangnummer ω toegekend, dat dus het kleinste oneindige ordinaalgetal is. Het eerste element der hoeveelheid, die overblijft door ook het element met rangnummer ω te verwijderen, krijgt het rangnummer $\omega + 1$. Verwijdert men alle elementen met rangnummers $\omega + n$ (n eindig), dan is 2ω het rangnummer van het eerste element der overblijvende hoeveelheid. Zoo doorgaande ziet men de in n⁰. 260 genoemde ordinaalgetallen verschijnen.

Met deze korte aanduiding omtrent de beteekenis der ordinaalgetallen moeten we hier volstaan.

263. Betrekkingen tusschen de cardinaalgetallen $\mathfrak{a}_n$. Uit de in n⁰. 247 gevonden formules kan men, in verband met de gelijkheden (148) van n⁰. 256, enkele betrekkingen tusschen de cardinaalgetallen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, ... afleiden.

Zoo volgt uit $2^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}_1$:

$$\mathfrak{a}_1^{\mathfrak{a}} = (2^{\mathfrak{a}})^{\mathfrak{a}} = 2^{\mathfrak{a}^2},$$

dus volgens de formule (143) van n⁰. 247 als men daarin $n = 2$ stelt:

$$\mathfrak{a}_1^{\mathfrak{a}} = 2^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}_1.$$

Men vindt zoo de formule:

$$\mathfrak{a}_1^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}_1. \qquad (150)$$

264. Voor het volgende leiden we eerst deze hulpstelling af: *Zijn a, b en c cardinaalgetallen en $a > b$, dan is:*

$$a^c \geqq b^c \text{ en } c^a \geqq c^b. \qquad (151)$$

Zijn nl. A, B en C hoeveelheden met resp. a, b en c als cardinaalgetal, terwijl B een deel van A is, dan is de hoeveelheid B^C een deel van A^C, waaruit de eerste der betrekkingen (151) volgt.

Neemt men van de hoeveelheid C^A die elementen (beleggingen van A), waarbij aan de niet tot B behoorende elementen van A een bepaald aangewezen element van C is toegevoegd, dan krijgt men een deel van C^A, dat met C^B gelijkwaardig is. Hieruit volgt de tweede der betrekkingen (151).

265. Is a een cardinaalgetal, dat aan

$$2 \leqq a < \mathfrak{a}_1$$

voldoet, dan is volgens de eigenschap van n⁰. 264:

$$\mathfrak{a}_1 = 2^{\mathfrak{a}} \leqq a^{\mathfrak{a}} \leqq \mathfrak{a}_1{}^{\mathfrak{a}},$$

dus volgens (150):

$$\mathfrak{a}_1 \leqq a^{\mathfrak{a}} \leqq \mathfrak{a}_1,$$

waaruit volgt:

$$a^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}_1,$$

dus:

$$n^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}_1, \qquad (152)$$

waarin n een natuurlijk getal > 1 is.

Verder volgt uit de eigenschap van n⁰. 264:

$$\mathfrak{a}_1 \leqq \mathfrak{a}_1^{n} \leqq \mathfrak{a}_1^{\mathfrak{a}},$$

waaruit in verband met (150) volgt:

$$\mathfrak{a}_1^{n} = \mathfrak{a}_1. \qquad (153)$$

266. Door volledige inductie toonen we aan:

$$\mathfrak{a}_n^{\mathfrak{a}_{n-1}} = \mathfrak{a}_n. \qquad (154)$$

Deze formule is nl. juist voor $n = 1$ (als men $\mathfrak{a}_{1-1}$ als $\mathfrak{a}$ interpreteert), daar ze dan in (150) overgaat.

Verder leidt men uit (154) in verband met de eigenschap van n⁰. 264 af:

$$\mathfrak{a}_n^{a} = \mathfrak{a}_n$$

voor $a < \mathfrak{a}_{n-1}$, dus in het bijzonder:

$$\mathfrak{a}_n^2 = \mathfrak{a}_n. \tag{155}$$

Nu is:

$$\mathfrak{a}_{n+1}^{\mathfrak{a}_n} = (2^{\mathfrak{a}_n})^{\mathfrak{a}_n} = 2^{\mathfrak{a}_n^2},$$

dus in verband met (155):

$$\mathfrak{a}_{n+1}^{\mathfrak{a}_n} = 2^{\mathfrak{a}_n} = \mathfrak{a}_{n+1}.$$

Hiermede is de formule verkregen, die uit (154) ontstaat door n door $n+1$ te vervangen, waarmede het bewijs door volledige inductie geleverd is.

267. We vestigen nog de aandacht op het volgende probleem, waarvan de oplossing nog niet gevonden is:

Liggen tusschen de cardinaalgetallen $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots\ldots$ *van n°. 256 nog andere cardinaalgetallen?*

In het bijzonder is het dus de vraag of er een cardinaalgetal a bestaat, waarvoor geldt:

$$\mathfrak{a} < a < \mathfrak{a}_1.$$

Een andere onopgeloste vraag betreffende cardinaalgetallen is deze *of voor een transfiniet cardinaalgetal a steeds 2a = a is.* Het vermoeden ligt voor de hand, dat deze vraag bevestigend moet worden beantwoord.

268. Hoeveelheid van alle deelen eener hoeveelheid. Zij D een deel van een hoeveelheid A. Aan een element van A voegen we het getal 1 of 2 toe al naar gelang het al of niet tot D behoort. Hierdoor wordt de hoeveelheid A belegd met de elementen der hoeveelheid, die uit de beide getallen 1 en 2 bestaat.

Omgekeerd voert iedere zoodanige belegging tot een deel van A, behalve als aan ieder element van A het getal 2 is toegevoegd. Men heeft dus:

Is a het cardinaalgetal van een hoeveelheid, dan bedraagt het aantal deelen dier hoeveelheid $2^a - 1$ [1]).

---

[1]) Is b het cardinaalgetal eener hoeveelheid B, dan is onder $b - 1$ te verstaan het cardinaalgetal der hoeveelheid, die uit B door weglating van één element ontstaat. Het is gemakkelijk aan te toonen, dat de keus van dit element op het cardinaalgetal der overblijvende hoeveelheid geen invloed heeft. Men heeft hier dus een geval, waarin de aftrekking ondubbelzinnig is.

Wegens de formule (146) van n⁰. 248 *kan, als a transfiniet is, voor het aantal deelen der hoeveelheid ook 2^a geschreven worden.*

269. *Is A een hoeveelheid, die uit meer dan 1 element bestaat, dan heeft de hoeveelheid der deelen van A een grooter cardinaalgetal dan A zelf.*

Is het cardinaalgetal a van A transfiniet, dan volgt dit onmiddellijk uit het aan het eind van n⁰. 268 opgemerkte in verband met de eigenschap van n⁰. 254.

Is a eindig, dan is het cardinaalgetal van de hoeveelheid der deelen van A gelijk aan $2^a - 1$. Hiervoor geldt volgens de eigenschap van n⁰. 126 (daar $a > 1$ ondersteld wordt):

$$2^a - 1 = (1 + 1)^a - 1 > (1 + a) - 1 = a.$$

270. De eigenschap van n⁰. 269 kan ook aldus, zoowel voor eindige als oneindige hoeveelheden, worden aangetoond. Zij B de hoeveelheid der deelen van A. De elementen van A zijn ook als deelen van A op te vatten (deelen met 1 element) en vormen dus een deel van B, dat met A gelijkwaardig is. Aangetoond moet dus nog worden, dat A niet met B gelijkwaardig is.

Onderstel, dat A op B was afgebeeld. Met een element E van A correspondeert dan een deel D van A; we noemen nu E een element van de eerste of van de tweede soort al naar gelang het wel of niet tot D behoort.

Zij **D** het deel van A gevormd door de elementen van de tweede soort en **E** het met **D** correspondeerende element van A. Neemt men nu aan, dat **E** een element van de eerste soort is, dan behoort het (volgens de definitie van eerste soort) tot **D** en is dus (volgens de definitie van **D**) van de tweede soort. Neemt men aan, dat **E** van de tweede soort is, dan behoort het niet tot **D** en is dus van de eerste soort. In beide gevallen komt men tot een ongerijmdheid, zoodat een afbeelding van A op B niet mogelijk is.

271. Aan het bewijs van n⁰. 270 moet nog toegevoegd worden het betoog, dat **D** bestaat, dus dat A elementen van de tweede soort bevat (altijd in de onderstelling, dat A op B is afgebeeld).

Daartoe merken we op, dat de elementen van A, als deelen van A opgevat, met elementen van A correspondeeren. Correspondeert zoo het element E_1, als deel van A opgevat, met het element E_2 en is E_2 van E_1 verschillend, dan is E_2 een element van de tweede soort. Op deze wijze zou men alleen dan geen element van de tweede soort vinden als steeds E_1 en E_2 hetzelfde waren, dus als ieder element van A, als deel van A opgevat, met zich zelf correspondeerde. Dan zou echter voor een deel van A, dat twee elementen bevat, geen element meer overblijven om mede te correspondeeren; we maken er hier gebruik van, dat A een deel met twee elementen bezit (welk deel ook A zelf zijn kan), dus dat A minstens twee elementen bevat.

272. We merken nog op, dat het bewijs van n⁰. 270 (afgezien van de gebezigde terminologie) slechts daarin van dat van n⁰. 254 verschilt, dat de in n⁰. 271 gegeven aanvulling noodig is dienende om het bestaan van elementen van de tweede soort aan te toonen. De noodzakelijkheid dier aanvulling komt daar vandaan, dat de belegging, waarbij aan ieder element van A het getal 2 wordt toegevoegd, tot geen deel van A voert (zie n⁰. 268).

Wanneer we zeggen, *dat in n⁰. 271 het bestaan van elementen van de tweede soort is aangetoond*, is dit natuurlijk zoo op te vatten, dat dit geschied is uitgaande van de onderstelling, dat een afbeelding van A op de hoeveelheid B der deelen van A mogelijk is. Doordat echter die afbeelding onmogelijk blijkt, vervalt daarmede de geheele indeeling der elementen van A in die van de eerste en die van de tweede soort. Aangetoond is dus, dat elementen van de tweede soort zouden bestaan als een afbeelding van A op B mogelijk was, waaruit dan juist (volgens de redeneering van n⁰. 270) afgeleid wordt, dat zulk een afbeelding niet mogelijk is.

273. Hoeveelheden, wier elementen getallenhoeveelheden zijn. Past men de eigenschappen van n⁰. 268 en 269 toe op een aftelbaar oneindige hoeveelheid, waarvan we het cardinaalgetal door α hebben voorgesteld, dan kan men voor die hoeveelheid zonder beperking de hoeveelheid der natuurlijke getallen nemen,

waarop ze is af te beelden. Men vindt dan (lettend op de opmerking aan het eind van n⁰. 268):

Het aantal (eindige of oneindige) getallenhoeveelheden bedraagt $2^{\mathfrak{a}}$. *De hoeveelheid dier getallenhoeveelheden is niet aftelbaar.*

274. Het cardinaalgetal $2^{\mathfrak{a}}$, dat we in n⁰. 256 $\mathfrak{a}_1$ genoemd hebben, wordt (om een reden, waarop we hier niet ingaan) de *machtigheid van het continuum* genoemd en gewoonlijk door $\mathfrak{c}$ voorgesteld. Voor de formules (150) en (152) van n⁰. 263 en 265 kan men dus ook schrijven:

$$n^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c}^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c}, \qquad (156)$$

waarin n een natuurlijk getal > 1 is.

De eigenschap van n⁰. 273 zegt dus, *dat de hoeveelheid der getallenhoeveelheden de machtigheid van het continuum heeft.*

275. *Het aantal eindige getallenhoeveelheden bedraagt* $\mathfrak{a}$.

Men kan dit ook zoo formuleeren:

De hoeveelheid der eindige getallenhoeveelheden is aftelbaar oneindig.

Dit blijkt onmiddellijk daaruit, dat de getallenhoeveelheden, wier getallen alle $\leqq n$ zijn, de deelen der (uit n getallen bestaande) hoeveelheid 1, 2, 3, ..., n zijn en dus ten getale van $2^n - 1$ aanwezig (zie de eigenschap van n⁰. 268). *Het aantal getallenhoeveelheden, die n tot grootste getal hebben, bedraagt dus* 2^{n-1}; dit aantal is nl.:

$$(2^n - 1) - (2^{n-1} - 1) = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}.$$

De hoeveelheid A_n der getallenhoeveelheden, die n tot grootste getal hebben, is dus eindig. Daar iedere eindige getallenhoeveelheid een grootste getal bezit (zie de eigenschap van n⁰. 33), verkrijgt men de hoeveelheid van alle eindige getallenhoeveelheden door de hoeveelheden A_1, A_2, A_3, ... (wier aantal aftelbaar oneindig is) tot één enkele hoeveelheid te vereenigen. Volgens het tweede deel der eigenschap van n⁰. 245 is die hoeveelheid dus aftelbaar oneindig.

276. Men verkrijgt een afbeelding van de hoeveelheid der eindige getallenhoeveelheden op de hoeveelheid der natuurlijke

getallen door de eindige getallenhoeveelheden naar hun grootste getal te rangschikken, de getallenhoeveelheden, die hetzelfde grootste getal bezitten, naar het op een na het grootste getal (daarbij beginnend met de getallenhoeveelheid, waarbij dit op een na het grootste getal ontbreekt en die dus uit één enkel getal bestaat), enz. Deze rangschikking wordt door het volgende schema verduidelijkt:

(1);				grootste getal 1,
(2),	(1, 2);			grootste getal 2,
(3),	(1, 3),	(2, 3),	(1, 2, 3);	grootste getal 3,
(4),	(1, 4),	(2, 4),	(1, 2, 4),	grootste getal 4,
(3, 4),	(1, 3, 4),	(2, 3, 4),	(1, 2, 3, 4);	
(5),	(1, 5),	(2, 5),	(1, 2, 5),	grootste getal 5.
(3, 5),	(1, 3, 5),	(2, 3, 5),	(1, 2, 3, 5),	
(4, 5),	(1, 4, 5),	(2, 4, 5),	(1, 2, 4, 5),	
(3, 4, 5),	(1, 3, 4, 5),	(2, 3, 4, 5),	(1, 2, 3, 4, 5).	

Men ziet hoe dit voort te zetten is.

We laten het aan den lezer over aan te toonen, *dat bij deze rangschikking het rangnummer van een eindige getallenhoeveelheid*

$$2^{a_1-1}+2^{a_2-1}+2^{a_3-1}+\dots+2^{a_k-1}$$

bedraagt, waarin a_1, a_2, a_3, ..., a_k *de tot die hoeveelheid behoorende getallen zijn*; hierin is voor 2^{a_1-1} het getal 1 te nemen als $a_1=1$ is (zie n⁰. 315 en 321).

277. Uit de eigenschappen van n⁰. 273 en 275 volgt:

De hoeveelheid der oneindige getallenhoeveelheden heeft de machtigheid $\mathfrak{c}$ *van het continum.*

Door nl. deze hoeveelheid met de in n⁰. 275 en 276 beschouwde hoeveelheid der eindige getallenhoeveelheden (waarvan het cardinaalgetal $\mathfrak{a}$ is) te vereenigen ontstaat de in n⁰. 273 en 274 beschouwde hoeveelheid der getallenhoeveelheden (waarvan het cardinaalgetal $\mathfrak{c}$ is). Is a het cardinaalgetal van de hoeveelheid der oneindige getallenhoeveelheden, dan is dus:

$$a+\mathfrak{a}=\mathfrak{c}.$$

Hieruit wordt (daar a ten duidelijkste transfiniet is) in verband met de formule (144) van n⁰. 248 tot $a=\mathfrak{c}$ besloten.

278. Hoeveelheden, die tot paradoxen voeren. Het in n°. 253—255 verkregen resultaat, dat er geen grootste cardinaalgetal bestaat, doet zien, dat men hoeveelheden kan beschouwen, die tot onoverkomelijke paradoxen voeren. Daarvoor denken we ons de *hoeveelheid van alle dingen*. Een grooter cardinaalgetal dan van deze hoeveelheid is natuurlijk niet mogelijk, daar toch iedere hoeveelheid een deel van de hoeveelheid van alle dingen is. Toch zou met behulp van de ongelijkheid (147) van n°. 255 een grooter cardinaalgetal te vormen zijn.

279. Een ander zeer frappant voorbeeld van een hoeveelheid, die tot een paradox voert, is door B. Russell gegeven; het opmerkelijke daarvan is, dat het geen bijzondere kennis van de theorie der hoeveelheden vereischt en dus voor ieder begrijpelijk is.

Een hoeveelheid kan de eigenschap hebben zich zelf als element te bevatten. Zoo is b.v. de hoeveelheid van alle hoeveelheden (of dingen) zelf ook een hoeveelheid (of ding) en dus zelf een element dier hoeveelheid. De hoeveelheid van alle dingen, die niet leven, leeft zelf ook niet en behoort dus als element tot die hoeveelheid.

Hoeveelheden, die de genoemde eigenaardigheid vertoonen, zullen we als *hoeveelheden van de tweede soort* aanduiden om dan van een *hoeveelheid van de eerste soort* te spreken in het meer gewone geval, dat de hoeveelheid zich zelf niet als element bevat. Een voorbeeld van een hoeveelheid van de eerste soort krijgt men door vijf stoelen te beschouwen; geen dier stoelen is hetzelfde als het vijftal stoelen, zoodat de hoeveelheid zelf geen element der hoeveelheid is. Hetzelfde geldt blijkbaar voor iedere eindige hoeveelheid.

We vormen nu *de hoeveelheid A van alle hoeveelheden van de eerste soort, dus van alle hoeveelheden, die zich zelf niet als element bevatten*, en vragen ons af *of A een hoeveelheid van de eerste dan wel van de tweede soort is*.

Neemt men aan, dat A van de eerste soort is, dan behoort A als element tot A (volgens de definitie van A) en is dus een hoeveelheid van de tweede soort (volgens de definitie van „tweede soort"). Neemt men aan, dat A een hoeveelheid van de tweede

soort is, dan behoort *A* niet tot *A* (volgens de definitie van *A*) en is dus van de eerste soort (volgens de definitie van „eerste soort"). Door aan te nemen, dat *A* van de eerste of tweede soort is, kan men dus aantoonen, dat *A* van de tweede resp. eerste soort is, zoodat men in ieder geval tot een ongerijmdheid geraakt.

280. De in het voorgaande besproken paradox van Russell is geheel te vergelijken met de bekende paradox van Epimenides, den steeds liegenden Cretenzer. Laatstgenoemde paradox formuleeren we zoo, dat een man, die nog nooit waarheid gesproken heeft, zegt: „alles wat ik ooit gezegd heb, wat ik nu zeg medegerekend, is een leugen".

Neemt men aan, dat de man nu waarheid spreekt, dan liegt hij nu (volgens hetgeen hij nu zegt). Neemt men aan, dat de man nu liegt, dan heeft hij niet altijd gelogen (daar het anders waar zou zijn wat hij nu zegt) en spreekt dus nu waarheid, daar hij vroeger altijd gelogen heeft. Evenals bij de paradox van Russell voert dus iedere denkbare onderstelling tot het tegendeel daarvan.

281. Discussie der uit hoeveelheden voortvloeiende paradoxen. De in n°. 278 en 279 besproken paradoxen vloeien voort uit de beschouwing der hoeveelheden, die daartoe aanleiding gegeven hebben. Dit voert er toe de aan die hoeveelheden verbonden begrippen als ontoelaatbaar te beschouwen.

Dat men de hoeveelheid van alle dingen niet als een begrip, dat zin heeft, kan aanvaarden, blijkt uit den eisch, die men uit den aard der zaak aan het vormen van begrippen stellen moet, dat deze een vaste en onveranderlijke beteekenis dienen te hebben en dat de begrippen, waarover men spreekt, niet onder het spreken mogen veranderen. Wanneer men echter alle dingen tot een hoeveelheid vereenigd denkt, wordt daarmede een nieuw ding, het begrip dier hoeveelheid, geschapen, waardoor het begrip „alle dingen" een wijziging ondergaat. Door de vorming van het eene begrip (dat der hoeveelheid van alle dingen) wijzigt zich dus een ander begrip (dat van alle dingen), dat juist bij de definitie van eerstgenoemd begrip gebruikt wordt; het is dus niet

te verwonderen, dat men, door met zulk een zich wijzigend begrip te werken, tot paradoxen kan geraken. De eenige manier om zoodanige paradoxen te ontgaan, is het begrip, dat er aanleiding toe gegeven heeft, niet als bestaande, of in elk geval niet als toelaatbaar, te erkennen.

282. Men drukt den in n^0. 281 gestelden eisch zoo uit, *dat de gegeven definities praedicatief moeten zijn*, d. w. z. *niets mogen bevatten, waardoor de bij de definitie voorkomende begrippen na het geven der definities anders kunnen worden dan daarvoor.* Intusschen is bezwaarlijk algemeen aan te geven hoe geconstateerd kan worden, dat hieraan voldaan is (vergelijk n^0. 286).

Wanneer men een hoeveelheid praedicatief definiëert moeten eerst de dingen, die als elementen der hoeveelheid in aanmerking kunnen komen, gedefiniëerd worden (natuurlijk eveneens praedicatief), terwijl pas daarna gedefiniëerd kan worden welke dier dingen als elementen der hoeveelheid zullen worden beschouwd. Bij een niet-praedicatieve definitie van een hoeveelheid daarentegen worden door het vormen der hoeveelheid tevens nieuwe dingen gevormd, die mogelijk als element der hoeveelheid kunnen optreden. Zoo wordt, bij het in beschouwing nemen van de hoeveelheid van alle dingen, met dezelfde woorden die hoeveelheid en een element dier hoeveelheid (nl. de hoeveelheid zelf) gedefiniëerd, terwijl het definiëeren van een element afgeloopen behoort te zijn als het definiëeren der hoeveelheid begint. Ook bij het vormen van de in n^0. 279 besproken hoeveelheid A wordt daardoor tevens iets gevormd (nl. die hoeveelheid), waarvan nog uitgemaakt moet worden of het als element tot die hoeveelheid behoort.

283. Het is duidelijk, *dat een praedicatief gedefiniëerde hoeveelheid nooit zich zelf als element kan bevatten*, daar de te definiëeren hoeveelheid gedurende het geven der definitie als object nog niet in aanmerking komt. De in n^0. 279 gemaakte onderscheiding der hoeveelheden in twee soorten heeft dan dus geen zin, daar hoeveelheden van de tweede soort niet voorkomen.

284. Het in den aanvang van n^0. 283 opgemerkte wil echter

nog niet zeggen, dat de definitie van een hoeveelheid praedicatief is als die hoeveelheid maar zich zelf niet als element bevat; bovendien is nl. noodig, dat het vormen der hoeveelheid op geen enkele wijze tot nieuwe elementen der hoeveelheid kan voeren. Vormt men b.v. het begrip van de hoeveelheid van alle cardinaalgetallen, dan is dit een niet-praedicatieve definitie; die hoeveelheid is wel is waar zelf geen cardinaalgetal (dus geen element van zich zelf), maar bezit een cardinaalgetal, dat eerst door het vormen der hoeveelheid gedefiniëerd wordt en daarmede tevens als tot die hoeveelheid behoorend verklaard. Zonder een bepaalde paradox voor zich te hebben kan men dus reeds van te voren verwachten, dat de hoeveelheid van alle cardinaalgetallen tot paradoxen zal voeren, hetgeen dan ook inderdaad het geval is.

285. Een niet-praedicatief gedefiniëerde hoeveelheid kan steeds door een wijziging tot een praedicatief gedefiniëerde gemaakt worden, *door nl. uitdrukkelijk uit te sluiten, dat die hoeveelheid zelf een element der hoeveelheid is of op welke andere manier ook tot elementen der hoeveelheid aanleiding geeft.* Daardoor verdwijnen tevens de beschouwde paradoxen.

Bij de hoeveelheid van alle dingen moet dan die hoeveelheid zelf buiten beschouwing blijven. Wel kan men dan een nieuwe hoeveelheid vormen door aan de eerst gevormde hoeveelheid die hoeveelheid zelf als element toe te voegen, maar dan blijft de nieuw gevormde hoeveelheid buiten beschouwing. Door deze laatste als element toe te voegen kan men weer een andere hoeveelheid vormen, enz. Op deze wijze vervalt alle aanleiding tot de paradox van n°. 278.

Hetzelfde geldt ten aanzien van de paradox van Russell. Door bij de in n°. 279 besproken hoeveelheid A die hoeveelheid als element buiten beschouwing te laten, wordt A, evenals iedere andere hoeveelheid, een hoeveelheid van de eerste soort.

286. De paradoxen, die uit de beschouwing van sommige hoeveelheden zijn voortgevloeid, hebben geleerd met het invoeren van hoeveelheden en het daarop voortbouwen uiterst voorzichtig te moeten zijn en de vraag doen rijzen hoe ver men met de

vorming van het begrip eener hoeveelheid kan gaan zonder den vasten grond onder de voeten te verliezen. In elk geval moet natuurlijk de hoeveelheid praedicatief gedefiniëerd zijn; de vraag blijft dan echter hoe men dat aan de gegeven definitie constateert en in welke gevallen het praedicatief zijn der gegeven definitie verzekerd is.

Hieromtrent bestaat geen eenstemmigheid. Men kan van meening zijn, dat wanneer een aandachtige beschouwing der definitie daarin geen niet-praedicatieve bestanddeelen doet ontdekken men verzekerd kan zijn, dat men, met de gedefiniëerde hoeveelheid werkend, nooit tot een tegenstrijdigheid zal geraken. Men kan echter ook de meening zijn toegedaan, dat de begripsvormingen, waartoe de beschouwde hoeveelheid aanleiding geeft, niet zijn te overzien en men dus van het praedicatief zijn der gegeven definitie slechts verzekerd kan zijn als men de hoeveelheid volledig uit haar elementen heeft opgebouwd. Een uiterste standpunt in deze richting zou zijn, dat men slechts gerechtigd is eindige hoeveelheden in de beschouwing te betrekken.

287. Discussie van de paradox van den Cretenzer. Ter verduidelijking willen we de uit hoeveelheden voortvloeiende paradoxen nog eens vergelijken met de in n⁰. 280 besproken paradox van den liegenden Cretenzer, waarbij het niet-praedicatieve karakter al zeer sterk uitkomt. De paradox ontstaat daar nl. doordat de man een waarheidsoordeel uitspreekt, dat mede slaat op het oordeel zelf, dat hij bezig is uit te spreken, dus een oordeel over dat oordeel zelf. Bestaat nu een oordeel A daarin, dat gezegd wordt: „het oordeel B is onwaar", dan is het oordeel A waar of onwaar al naar gelang B onwaar of waar is. Is echter B het oordeel A zelf, dan zou dus het oordeel A waar of onwaar zijn al naar gelang het onwaar of waar is.

Een waarheidsoordeel over dat oordeel zelf kan dus niet worden uitgesproken of liever zulk een waarheidsoordeel kan niet op zijn waarheid onderzocht worden (en is dus eigenlijk geen oordeel). Om nl. te kunnen beoordeelen of het waarheidsoordeel waar is, zou men moeten weten of de oordeelen, waarop het slaat, dus in het geval van den liegenden Cretenzer het waarheidsoordeel zelf, waar is.

Bij de beschouwde paradox brengt dus de appreciatie (als waar of onwaar) van het uitgesproken waarheidsoordeel verandering in het subject, waarop dat oordeel betrekking heeft. Men heeft dus niet met een oordeel over een onveranderlijk iets te maken; dat „iets" verandert juist in die qualiteiten, waarover het oordeel zich uitspreekt. Geen wonder dat men zoo tot een paradox geraakt.

In een geval als dit, waarbij het subject van het oordeel niet praedicatief gedefiniëerd is, zullen we van een *niet-praedicatief oordeel* spreken. Men heeft dan te doen met iets, dat feitelijk geen oordeel is (zooals boven reeds werd opgemerkt), maar alleen met een gezegde, dat den uiterlijken vorm van een oordeel heeft. Bij een uitspraak van den vorm „*A* is *B*" spreekt men nl. eerst dan van een oordeel indien zoowel *A* als *B* praedicatief gedefiniëerd is. Gemakshalve gebruiken we echter in het volgende het woord „oordeel" ook als het om een niet-praedicatief oordeel handelt en stellen daar praedicatieve oordeelen [1]) tegenover.

288. De oorzaak van het paradoxale in het verhaal van den Cretenzer zou men daarin kunnen zoeken, dat het subject, waarover een oordeel uitgesproken wordt, nl. alles wat de man tot op het oogenblik gezegd heeft, zich wijzigt onder het uitspreken van het oordeel („alles wat ik ooit gezegd heb enz.") doordat zich dat oordeel aan het door hem gesprokene toevoegt.

Hiermede is echter de oorzaak van de paradox niet geheel juist weergegeven, daar de paradox blijft bestaan als men den man laat zeggen: „alles wat ik ooit gezegd heb en zeggen zal is een leugen" en hij sterft zonder verder ooit waarheid gesproken te hebben; toch is dan het subject van het oordeel (alles wat de man gezegd heeft en zeggen zal) onveranderlijk als men voor een oogenblik als subject alleen het complex der gesproken of nog te spreken woorden beschouwt en niet op de daaraan te hechten beteekenis, dus op de daaraan verbonden begrippen, let.

Let men daarop echter wel, zooals hier behoort te geschieden, dan is de onveranderlijkheid van het subject verdwenen. Was dit

[1]) Het woord „praedicatief oordeel" wordt hier in andere beteekenis gebruikt dan waarin het in de formeele of theoretische logica voorkomt.

nl. onveranderlijk, dan zou het oordeel („alles wat ik ooit gezegd heb enz.") praedicatief, dus òf waar òf onwaar zijn. Daar echter de waarheidsqualiteit van dit oordeel tevens deel uitmaakt van het subject van het oordeel, zou dit subject van de waarheidsqualiteit van het daarover uitgesproken oordeel afhangen. Het subject staat dus niet onveranderlijk vast alvorens het oordeel daarover wordt uitgesproken. Dit oordeel is bijgevolg niet praedicatief.

289. De paradox van den Cretenzer vertoont groote overeenstemming met de uit hoeveelheden voortvloeiende paradoxen, in het bijzonder met die van RUSSELL (vergelijk het aan het eind van n^0. 280 opgemerkte). Alleen is er dit verschil, dat het bij de paradoxen betreffende hoeveelheden gaat om de *vorming* van begrippen (de elementen der hoeveelheden), bij de paradox van den Cretenzer om *waarheidsoordeelen*. Eén vermeerdering van de beschouwde elementen door het vormen van een hoeveelheid is dus voor de paradoxen uit de hoeveelhedentheorie wat voor de paradox van den Cretenzer een verandering in waarheidsqualiteit is van het subject, waarover het oordeel wordt uitgesproken (gesteld voor een oogenblik, dat men bij een zoodanig niet-praedicatief oordeel nog van waar of onwaar kan spreken), dus een verandering van het subject van het oordeel.

290. Evenals een praedicatief gedefiniëerde hoeveelheid zich zelf niet als element bevat (zie n^0. 283), zal een praedicatief oordeel niet op dat oordeel zelf terugslaan. Met de omstandigheid, dat een praedicatief gedefiniëerde hoeveelheid op geenerlei wijze tot dingen voert, die als elementen der hoeveelheid in aanmerking komen, komt overeen, dat een praedicatief oordeel ook niet indirect, dus langs een omweg, op zich zelf betrekking heeft.

Als voorbeeld van zulk een indirect op zich zelf betrekking hebben denken we ons het geval, dat de Cretenzer zegt: „alles wat ik gisteren gezegd heb is een leugen". Op het eerste gezicht lijkt het, dat dit gezegde, dat we door I aanduiden, per se praedicatief is. Dit is echter niet het geval als diezelfde Cretenzer gisteren gezegd heeft: „alles wat ik morgen zeggen zal is waar" (welk

gezegde we II noemen) en overigens gisteren uitsluitend onwaarheid en heden uitsluitend waarheid gesproken heeft.

Neemt men nl. aan, dat het gezegde I waar is, dan is het gezegde II, wegens den inhoud van I, onwaar en, wegens den inhoud van II, waar (daar hij, als I waar is, heden uitsluitend waarheid gesproken heeft). Neemt men echter aan, dat het gezegde I onwaar is, dan is het gezegde II, wegens den inhoud van I, waar (daar hij anders gisteren enkel onwaarheid gesproken zou hebben en dus het gezegde I waar zou zijn) en, wegens den inhoud van II, onwaar. In ieder geval komt men dus tot een ongerijmdheid [1]).

De eigenlijke oorzaak der genoemde paradox is daarin te zoeken, dat men het gezegde I niet kan beschouwen en ontleden zonder dat daarbij van zelf het gezegde II in de beschouwing wordt betrokken en omgekeerd, zoodat men het onderzoek dier oordeelen niet beginnen kan. Bij het beoordeelen dier oordeelen wordt men als het ware van het kastje naar den muur gestuurd zonder ergens houvast te krijgen. Alle besproken paradoxen bezitten een zoodanig karakter.

---

[1]) Had de man gisteren gezegd: „alles wat ik morgen zeggen zal is een leugen" (gezegde II), dan komt men tot geen tegenstrijdigheid door aan te nemen, dat I waar en II onwaar is, terwijl men evenmin een tegenstrijdigheid verkrijgt door juist het omgekeerde aan te nemen. In deze onbepaaldheid komt nu het niet-praedicatieve karakter der uitgesproken oordeelen tot uiting.

HOOFDSTUK II.

HET GETAL NUL.

---

§ 1. De rekenregels met het getal nul.

291. Nulhoeveelheid. Wanneer in het voorgaande van hoeveelheden sprake was werd steeds ondersteld, *dat de hoeveelheid minstens één element bevat* (zie de noot van blz. 4). Voor verschillende beschouwingen is het echter voordeelig ook het geval toe te laten, *dat de hoeveelheid geen enkel element bevat.*

Het is duidelijk, *dat er slechts één zulk een hoeveelheid moet geacht worden te zijn.* Deze hoeveelheid, die een deel van iedere andere hoeveelheid is, noemen we de ***nulhoeveelheid.***

Ook aan de nulhoeveelheid wordt een aantal (aantal elementen) toegekend, dat ***nul*** genoemd en door het teeken 0 wordt aangeduid. Men noemt nu ook 0 een ***getal,*** waardoor het begrip „getal'' een verruiming ondergaat. *Aan de natuurlijke getallen wordt nl. het getal nul* (dat geen natuurlijk getal is) *toegevoegd.* De zoo verkregen getallen zullen we ***aantallen*** noemen.

292. Is H een hoeveelheid [1]) en D een deel van H, dan maakt de invoering der nulhoeveelheid, dat men altijd kan spreken van de *hoeveelheid* $H - D$, *die gevormd wordt door de elementen van* H, *die niet tot* D *behooren.* Is nl. D de hoeveelheid H zelf, dan is $H - D$ de nulhoeveelheid.

De betrekking tusschen de deelen D en $H - D$ is *wederkeerig,*

---

[1]) Hoewel verschillende der volgende beschouwingen ook voor oneindige hoeveelheden doorgaan, denken we nu weer steeds in het bijzonder aan eindige hoeveelheden.

d. w. z. beide deelen spelen daarbij dezelfde rol. Dit wordt door de formule

$$H - (H - D) = D \qquad (157)$$

tot uitdrukking gebracht. De deelen D en $H - D$ worden ***complementaire deelen van*** H genoemd.

293. *De hoeveelheid H zelf en de nulhoeveelheid zijn complementaire deelen van H.* Spreekt men van een ***echt deel*** D van H, dan wordt daarmede niet alleen uitgesloten, dat D de hoeveelheid H zelf is (zie n⁰. 15), maar ook dat D de nulhoeveelheid is. Hieruit volgt dan, *dat het bij een echt deel van H behoorende complementaire deel eveneens een echt deel van H is.*

We wijzen nog op de analogie, die bestaat tusschen de deelen van een hoeveelheid en de deelers van een getal, waarbij men eveneens van complementaire deelers en echte deelers spreekt (zie n⁰. 138 en 139); met de deelers 1 en a van een natuurlijk getal a komen als deelen der hoeveelheid H overeen de nulhoeveelheid en H zelf; evenals 1 een deeler van ieder natuurlijk getal is, is de nulhoeveelheid een deel van iedere hoeveelheid.

294. Door invoering van de nulhoeveelheid wordt aan de hoeveelheid van alle deelen eener hoeveelheid H nog een element toegevoegd, nl. de nulhoeveelheid.

Voegt men aan ieder der elementen van een deel D van H het getal 1 en aan de overige elementen van H het getal 2 toe, dan wordt door invoering der nulhoeveelheid bereikt, dat niet alleen ieder deel van H tot een belegging van H (zie n⁰. 131) met de elementen der getallenhoeveelheid 1, 2 voert, *maar ook omgekeerd iedere zoodanige belegging een deel van H aanwijst* (vergelijk n⁰. 268).

In verband met het in n⁰. 131 gevondene blijkt dus:

Het aantal deelen eener uit a elementen bestaande hoeveelheid, de nulhoeveelheid als deel medegerekend, bedraagt 2^a.

We merken nog op, dat invoering van de nulhoeveelheid maakt, dat de eigenschap van n⁰. 269 ook nog geldt als de beschouwde hoeveelheid slechts één element bevat. Zelfs geldt die eigenschap dan nog als de hoeveelheid de nulhoeveelheid is (zie n⁰. 298).

295. Optellen met het getal nul. De in n⁰. 43 van optelling gegeven definitie blijft onveranderd van toepassing als een der beide daar genoemde hoeveelheden H_1 en H_2 de nulhoeveelheid is of als dit met H_1 en H_2 beide het geval is. Daar nu een hoeveelheid door samenvoeging met de nulhoeveelheid niet verandert, heeft men:

$$a + 0 = 0 + a = a, \tag{158}$$

hetgeen ook nog geldt als $a = 0$ *is.*

Wanneer men het getal nul zuiver formeel invoert, dus alleen als een symbool, waarmede men op een voorgeschreven wijze rekent, zonder in nul een aantal elementen eener hoeveelheid te zien, is (158) als een definitie op te vatten.

296. Uit de beide eerste leden van (158) ziet men, *dat de commutatieve eigenschap der optelling* (zie n⁰. 48) *geldig gebleven is* als men aan de natuurlijke getallen het getal nul toevoegt.

Hetzelfde geldt voor de associatieve eigenschap. Dit blijkt onmiddellijk daaruit, dat de beschouwingen van n⁰. 41, die tot de associatieve eigenschap der optelling gevoerd hebben, onveranderd blijven doorgaan als een (of meer) der beschouwde hoeveelheden de nulhoeveelheid is.

Ook kan men de geldigheid der formule (10) van n⁰. 48 gemakkelijk met behulp van (158) controleeren [1]). Zoo heeft men b.v.:

$$(a + b) + 0 = a + b = a + (b + 0).$$

Het is duidelijk, *dat ook de afgeleide eigenschappen der optelling* (zie n⁰. 50—56) *blijven doorgaan.*

297. Uit de gelijkheden (158) leest men nog een *grondeigenschap* af, die de ***moduluseigenschap** der optelling* genoemd wordt. Deze drukt uit, *dat een som van twee termen, waarvan er een nul is, gelijk is aan den anderen term.*

Ook zegt men, *dat het getal 0 de **modulus** der optelling is,* hetgeen beteekent, dat verbinding door optelling van een getal [2]) met 0 dat getal onveranderd laat.

---

[1]) Dit is het bewijs der associatieve eigenschap als men het getal 0 op de aan het eind van n⁰. 295 bedoelde wijze formeel invoert.

[2]) Met „getal" is hier en in het volgende steeds bedoeld een der tot

We vestigen de aandacht op de overeenstemming met de in n°. 91 en 92 besproken moduluseigenschap der vermenigvuldiging. *Het getal 0 speelt dan ook ten aanzien van de optelling dezelfde rol als het getal 1 ten aanzien van de vermenigvuldiging*, zooals nog herhaaldelijk zal uitkomen.

298. Grooter en kleiner in verband met het getal nul. Daar iedere hoeveelheid een deel met nul elementen bevat (nl. de nulhoeveelheid) *is het getal 0 als kleiner dan ieder natuurlijk getal te beschouwen* [1]). Dit is met de in n°. 2 gegeven definitie van grooter en kleiner in overeenstemming als men de rij (1) van n°. 1 met 0 laat beginnen.

Wanneer men het getal 0 op de aan het eind van n°. 295 besproken formeele wijze invoert is „$0 < n$ voor ieder natuurlijk getal n" als een definitie op te vatten.

Uit het voorgaande blijkt onmiddellijk, *dat de transitieve eigenschap van n°. 5 na invoering van het getal 0 geldig gebleven is.*

299. *De eigenschap van n°. 70, dus de ongelijkheid (25), blijft geldig, mits daarin b een natuurlijk getal, dus niet 0 is.*

De ongelijkheid (25) geldt nl. ook voor $a = 0$ en $b > 0$, daar men dan heeft:

$$a + b = 0 + b = b > 0 = a.$$

Dit met de gelijkheid (158) van n°. 295 samenvattend vindt men:

$$a + b \geqq a. \tag{159}$$

300. Uit het in n°. 299 gevondene leiden we verder af:

De grondeigenschap van n°. 49 is na invoering van het getal 0 geldig gebleven.

---

op het gegeven oogenblik ingevoerde getallen (afgezien van de transfiniete cardinaalgetallen, tenzij het tegendeel gezegd wordt). Thans is dus onder een getal een natuurlijk getal of 0, dus een aantal te verstaan.

[1]) Men wil nl., dat de eigenschap van n°. 25 in de volgende formuleering blijft doorgaan:

Is H een hoeveelheid met n elementen, dan bevat de hoeveelheid H′ dan en alleen dan een aantal elementen, dat $< n$ is, als H′ op een deel van H, maar niet op H zelf is af te beelden.

Deze wijziging staat daarmede in verband, dat de nulhoeveelheid geen echt deel van H is (zie n°. 293).

Is nl. $a > b$ en $c = 0$, dan is:

$$a + c = a + 0 = a > b = b + 0 = b + c,$$

terwijl men voor $a > b = 0$ in verband met (25) heeft:

$$a + c > c = 0 + c = b + c.$$

In de eigenschap van n⁰. 49 ligt die van n⁰. 299 als bijzonder geval opgesloten. Uit $a > 0$ volgt nl. in verband met de eigenschap van n⁰. 49 en de gelijkheden (158):

$$a + b > 0 + b = b.$$

301. Aftrekking na invoering van het getal nul. Uit het in n⁰. 300 gevondene is af te leiden, *dat de aftrekking, ook na invoering van het getal 0, ondubbelzinnig is, zoo ze mogelijk is.* Doordat de eigenschap van n⁰. 49 blijft doorgaan, geldt nl. hetzelfde voor het in n⁰. 69 gegeven betoog, dat uitsluitend op die eigenschap berust.

Men kan dus nog steeds uit $x + b = y + b$ tot $x = y$ besluiten.

302. Aan het geval $a > b$, waarin de aftrekking $a - b$ mogelijk is, wordt nu echter nog het geval $a = b$ toegevoegd. Uit de gelijkheden (158) van n⁰. 295 volgt nl.:

$$a - a = 0. \tag{160}$$

Verder volgt uit (158) nog:

$$a - 0 = a,$$

zoodat ook voor $b = 0$ (dus in ieder geval, waarbij $a > b$ is) de aftrekking $a - b$ mogelijk is.

Voor $b > a$ blijft echter de aftrekking $a - b$ onmogelijk, daar men dan volgens (159) voor iedere waarde van x heeft:

$$b + x \geqq b > a.$$

We vinden dus:

De aftrekking $a - b$ is, na invoering van het getal 0, dan en alleen dan mogelijk als $a \geqq b$ is.

303. Opgemerkt zij nog, dat de in n⁰. 75—88 gevonden eigenschappen der aftrekking, blijkens de daarvan gegeven afleiding, onveranderd geldig blijven. Immers de bij die afleiding gebruikte eigenschappen zijn alle geldig gebleven.

Alleen is er dit verschil, dat de voorwaarden, die vervuld moeten

zijn om de in de eigenschappen voorkomende aftrekkingen mogelijk te maken, iets ruimer genomen kunnen worden.

304. Vermenigvuldiging met het getal nul. Past men de in n°. 89 van het product ab gegeven definitie toe op het geval, dat $b = 0$ is, dan vindt men, in verband met de moduluseigenschap der optelling (zie n°. 297):

$$a \,.\, 0 = 0 + 0 + \ldots + 0 \ (a \text{ termen}) = 0.$$

Daar men aan de commutatieve eigenschap der vermenigvuldiging wil vasthouden, stelt men bij definitie $0 \,.\, a = 0$, zoodat men heeft (ook voor $a = 0$):

$$0 \,.\, a = a \,.\, 0 = 0. \tag{161}$$

In woorden luidt dit:

Een product is nul als een der factoren nul is.

Dit geldt natuurlijk ook voor meer dan twee factoren, evenals de eigenschap, *dat een product slechts dan nul is als een der factoren van het product nul is.*

305. Tot de gelijkheden (161) wordt men ook door de definitie van n°. 90 gevoerd. Neemt men nl. geen enkele hoeveelheid met a elementen of a hoeveelheden, waarvan ieder geen enkel element bevat [1]), dan krijgt men in beide gevallen de nulhoeveelheid, dus een hoeveelheid met nul elementen.

Tot hetzelfde resultaat voert de in n°. 112 van ab gegeven definitie. Is nl. de daar genoemde hoeveelheid H de nulhoeveelheid, dan kan men geen enkel elementenpaar vormen en is dus ook $H \,.\, H'$ de nulhoeveelheid.

Bij de formeele invoering van het getal 0 is (161) natuurlijk weer een definitie.

306. *Dat de commutatieve eigenschap der vermenigvuldiging geldig gebleven is,* blijkt onmiddellijk uit (161). *Dat ook de associatieve eigenschap blijft gelden,* blijkt onmiddellijk daaruit,

---

[1]) Hoewel die a hoeveelheden alle dezelfde zijn, nl. de nulhoeveelheid, voldoen ze toch aan den eisch geen gemeenschappelijke elementen te bezitten, daar ze in het geheel geen elementen bezitten.

dat zoowel $a(bc)$ als $(ab)c$ nul is als minstens één der getallen a, b, c nul is (zie de eigenschap van n⁰. 304).

Dat de distributieve eigenschap geldig gebleven is, blijkt aldus:

$$(a + b) \cdot 0 = 0 = 0 + 0 = a \cdot 0 + b \cdot 0,$$
$$(a + 0) \cdot c = ac = ac + 0 = ac + 0 \cdot c.$$

Ook zou men zich voor de associatieve en distributieve eigenschap op de beschouwingen van n⁰. 111—116 kunnen blijven beroepen.

De moduluseigenschap der vermenigvuldiging (zie n⁰. 91 en 92) is eveneens geldig gebleven blijkens

$$1 \cdot 0 = 0.$$

307. De eigenschap van n⁰. 105 geldt na invoering van het getal 0 alleen als $c > 0$ is. Ze wordt dan:

Is $a > b$ en $c > 0$, dan is $ca > cb$.

De geldigheid hiervan voor $b = 0$ blijkt nl. onmiddellijk uit:

$$ca > 0 = c \cdot 0 = cb.$$

Den vorm, dien de eigenschap nu verkregen heeft, blijft ze bij verdere uitbreidingen van het getalbegrip behouden; ze speelt daarbij de rol van *grondeigenschap.*

Het is verder duidelijk, dat ook weer de afgeleide eigenschappen en de eigenschappen van de vermenigvuldiging ten opzichte van de aftrekking geldig blijven.

308. Deeling in verband met het getal nul. De eigenschap van n⁰. 304 doet zien, *dat aan de vergelijking* (89) *van n⁰. 132 niet kan worden voldaan als $b = 0$ en $a > 0$ is.*

Is echter $b = 0$ en tevens $a = 0$, dan is aan (89) door ieder getal x voldaan, zoodat de deeling dan geheel onbepaald is.

Het blijkt dus, *dat deeling met deeler nul* (deeling door nul) *òf onmogelijk òf onbepaald is.* Daarom wordt deelen door nul niet toegelaten, dus *de deeler altijd van nul verschillend ondersteld.*

309. Is $b > 0$, dan volgt op geheel dezelfde wijze als in n⁰. 133, *dat de deeling, zoo ze mogelijk is, ondubbelzinnig is*; men heeft zich daarbij op de eigenschap van n⁰. 307 te beroepen.

Is $b > 0$ en $a = 0$, dan is volgens (161) aan de vergelijking (89) van n⁰. 132 voldaan door $x = 0$. Hieruit blijkt, *dat een quotiënt nul is, als het deeltal nul is*, waarbij de deeler als steeds van nul verschillend ondersteld is.

De omstandigheid, dat als $a = 0$ is aan (89) kan worden voldaan, onverschillig wat b is, kan zoo worden uitgedrukt, *dat ieder getal een deeler van nul en nul een veelvoud van ieder getal is* (zie n⁰. 138). Hieruit ziet men, *dat de eigenschap van n⁰. 157 ook voor $a = b$ doorgaat.*

In het bijzonder is het getal 0 ook door 2 deelbaar, *zoodat nul een even getal is* (zie n⁰. 138).

---

310. Som van nul termen of product van nul factoren. We beschouwen de rij getallen

$$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots \tag{162}$$

en stellen

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_n = S_n.$$

Voor $n = 1$ heeft men dan (zie de opmerking aan het eind van n⁰. 52):

$$S_1 = a_1. \tag{163}$$

Verder is:

$$S_{n-1} = S_n - a_n. \tag{164}$$

We willen deze formule ook voor $n = 1$ volhouden. Men vindt dan, in verband met de formule (160) van n⁰. 302:

$$S_0 = S_1 - a_1 = a_1 - a_1 = 0.$$

Men heeft dus:

Een som van nul termen is gelijk aan nul.

311. We beschouwen weer de rij getallen (162) en stellen

$$a_1 a_2 \ldots\ldots a_n = P_n.$$

Analoog met (163) en (164) heeft men:

$$P_1 = a_1,$$

$$P_{n-1} = \frac{P_n}{a_n}.$$

Houdt men de laatste betrekking ook voor $n = 1$ vol, dan vindt men:

$$P_0 = \frac{P_1}{a_1} = \frac{a_1}{a_1} = 1.$$

M. a. w.:

Een product van nul factoren is gelijk aan 1.

312. De eigenschappen van n⁰. 310 en 311 staan in onmiddellijk verband met de moduluseigenschappen van optelling en vermenigvuldiging (zie resp. n⁰. 297 en 92), die ook in den vorm

$$a - a = 0, \quad \frac{a}{a} = 1$$

geschreven kunnen worden. De eigenschappen van n⁰. 310 en 311 kunnen dan ook aldus worden samengevat:

Een som van nul termen of een product van nul factoren is gelijk aan den modulus der optelling resp. vermenigvuldiging.

313. *Het product der natuurlijke getallen, die $\leqq n$ zijn,* wordt door $n!$ (lees: n faculteit) voorgesteld, dus:

$$n! = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,\ldots\, n. \qquad (165)$$

Hieruit volgt:

$$n! = (n-1)!\; n,$$

dus:

$$(n-1)! = \frac{n!}{n}. \qquad (166)$$

Wil men dit voor $n = 0$ volhouden, dan vindt men:

$$0! = 1. \qquad (167)$$

Dit is in overeenstemming met de eigenschap van n⁰. 311, daar het aantal factoren uit het tweede lid van (165) n bedraagt, dus nul voor $n = 0$.

314. Machtsverheffing met grondtal nul. Uit de eigenschap van n⁰. 304 volgt:

$$0^a = 0, \qquad (168)$$

of in woorden:

Een macht is nul als het grondtal nul is.

Daar de eigenschappen der machtsverheffing uit die der vermenigvuldiging voortvloeien, blijven deze gelden als men een of meer grondtallen nul toelaat.

Tot de formule (168) wordt men ook gevoerd door de in n⁰.

131 van machtsverheffing gegeven definitie. Een belegging van een hoeveelheid met de elementen der nulhoeveelheid is nl. niet mogelijk, of anders gezegd het aantal mogelijke beleggingen is nul.

315. Machtsverheffing met exponent nul. Om aan a^0, waarin $a > 0$ is, een beteekenis te hechten gaan we uit van de formule:

$$a^{n-1} = \frac{a^n}{a}$$

(zie de formule (109) van n°. 161). Wil men dit voor $n = 0$ volhouden, dan stelt men bij definitie:

$$a^0 = 1. \qquad (169)$$

Ook had men zich hiervoor zonder meer op de eigenschap van n°. 311 kunnen beroepen, daar we eigenlijk niets anders gedaan hebben dan de redeneering van n°. 311 voor een bijzonder geval te herhalen.

De in (169) voorkomende exponent nul wordt wel een ***oneigenlijke exponent*** en a^0 een ***oneigenlijke macht*** genoemd.

316. Men overtuigt zich gemakkelijk, dat met de door (169) aangegeven afspraak de in n°. 119—123 genoemde eigenschappen der machtsverheffing alle geldig blijven. Hetzelfde geldt voor de formule (109) van n°. 161 (die feitelijk de aanleiding tot de definitie (169) geweest is). Deze formule heeft nu een ruimere geldigheid gekregen, daar ze ook voor $b = c$ doorgaat. Tevens wordt zoo bereikt, *dat als het eerste lid van (109) beteekenis heeft hetzelfde voor het tweede lid geldt en omgekeerd.*

De eigenschap van n°. 124 gaat echter niet meer door als de daarin voorkomende exponent nul is [1]).

317. De formules (168) en (169) van n°. 314 en 315 kunnen niet beide bij definitie als geldig beschouwd worden voor $a = 0$, daar de eerste tot $0^0 = 0$, de tweede tot $0^0 = 1$ zou voeren. Men kan hierin aanleiding vinden om aan 0^0 geen beteekenis toe te kennen, dus bij de beschouwing van de macht a^b steeds uit te sluiten, dat a en b beide nul zijn.

---

[1]) Wel blijft die eigenschap geldig als $c > 0$ en $b = 0$ is. De eigenschap van n°. 125 is voor $c = 0$ geldig gebleven.

In verschillende opzichten is het echter doelmatig *de formule (168) slechts te laten gelden als $a > 0$ is en aan de formule (169) zonder uitzondering vast te houden.* Bij definitie stellen we dus vast:

$$0^0 = 1. \tag{170}$$

In n⁰. 323 zullen we een voorbeeld van de doelmatigheid dier definitie ontmoeten (zie ook n⁰. 356).

318. Door de afspraak (170) blijven de eigenschappen der machtsverheffing, voor zoover deze gelijkheden betreffen, geldig. Hetzelfde zou echter het geval geweest zijn als we 0^0 bij definitie gelijk aan 0 gesteld hadden. De vraag doet zich dus voor of men aan 0^0 nog andere waarden had kunnen toekennen zonder dat genoemde eigenschappen verloren gaan.

Deze vraag moet ontkennend beantwoord worden. Blijft nl. de formule (71) van n⁰. 123 geldig, dan is:

$$(0^0)^c = 0^{0 \cdot c} = 0^0.$$

Het getal 0^0 voldoet dus voor ieder getal c aan de vergelijking

$$x^c = x,$$

waaruit volgt $x = 0$ of $x = 1$. De laatste keus zal echter blijken de meest voordeelige te zijn (zie n⁰. 323 en 356).

319. Tot de formule (169) van n⁰. 315 geraakt men ook door de definitie van een macht als aantal beleggingen (zie n⁰. 131). Om a^b te vormen moet men dan een hoeveelheid B met b elementen beleggen met de elementen eener hoeveelheid A met a elementen. Zulk een belegging bestaat uit b elementenparen, m. a. w. is zelf als een hoeveelheid met b elementen op te vatten.

Is nu $b = 0$, dus B de nulhoeveelheid, dan is ook de beschouwde belegging een hoeveelheid met nul elementen, dus de nulhoeveelheid. *De eenige belegging van de nulhoeveelheid met de elementen van een andere hoeveelheid is dus de nulhoeveelheid zelf;* dit geldt blijkbaar ook nog als die andere hoeveelheid eveneens de nulhoeveelheid is.

Daar er nu, zooals in n⁰. 291 is opgemerkt, slechts één nulhoeveelheid is, bedraagt in het geval $b = 0$ het aantal beleggingen 1 en is dus $a^0 = 1$, ook nog als $a = 0$ is.

320. Voordeel verbonden aan het invoeren van het getal nul. De invoering van het getal nul levert reeds aanstonds het voordeel, *dat de aftrekking mogelijk geworden is in een geval, waarin ze aanvankelijk niet mogelijk was*, nl. de aftrekking $a - a$. Daardoor verkrijgen, zooals reeds is opgemerkt, de formules, waarin verschillen voorkomen, een ruimere geldigheid.

Aan de in n⁰. 244 uitgevoerde berekening van een rangnummer is een voorbeeld te ontleenen van het voordeel, dat het invoeren van nul oplevert. Daardoor wordt nl. de voor het rangnummer gevonden uitdrukking

$$\frac{(n+p-1)(n+p-2)}{2}+n \qquad (171)$$

ook geldig voor $n = p = 1$. Naar behooren geeft (171) dan voor het rangnummer de waarde 1.

Verder wijzen we er nog op, dat invoering van het getal nul maakt, *dat ieder oneven getal a in den vorm $2q + 1$ te schrijven is* (zie n⁰. 169); voor $a = 1$ is dan $q = 0$.

321. Zooals in n⁰. 294 gebleken is, is het aantal deelen eener hoeveelheid met a elementen, de nulhoeveelheid als deel medegerekend, gelijk aan 2^a. Dit resultaat blijft ten gevolge van de formule (169) van n⁰. 315 juist voor $a = 0$. Uit 2^a vindt men dan voor het aantal deelen 1, in overeenstemming daarmede, dat de hoeveelheid dan de nulhoeveelheid is en dus slechts één deel bezit, nl. zich zelf.

Ook het in n⁰. 275 verkregen resultaat omtrent het aantal hoeveelheden van natuurlijke getallen, die n tot grootste getal hebben, blijft door de formule (169) juist voor $n = 1$. Hetzelfde geldt voor de in n⁰. 276 opgegeven uitdrukking voor het rangnummer van een eindige getallenhoeveelheid $a_1, a_2, \ldots, a_k$ als men zulke hoeveelheden op de daar aangegeven wijze nummert; die uitdrukking blijft nl. juist voor $a_1 = 1$, daar dan 2^{a_1-1} in 1 overgaat [1]).

322. Toepassing op het merkwaardige quotiënt van n⁰. 164. Het in n⁰. 164 gevonden merkwaardige quotiënt (113) kan door

---

[1]) Een ander voordeel van de invoering van het getal nul bestaat

invoering van den exponent nul regelmatiger aldus geschreven worden:

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1}b^0 + a^{n-2}b^1 + a^{n-3}b^2 + \ldots . + a^1b^{n-2} + a^0b^{n-1}.$$

Dit wordt korter zoo geschreven:

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = \sum_{k=1}^{n} a^{n-k}b^{k-1}, \qquad (172)$$

waarmede bedoeld wordt, dat men in de uitdrukking onder (d. w. z. achter) het somteeken Σ (sigma) aan k achtereenvolgens de waarden 1, 2, 3, ..., n toekent en de zoo verkregen getallen optelt.

Zonder invoering van den exponent nul zou men (113) niet in den compacten vorm (172) kunnen neerschrijven.

Voor $n = 1$ wordt het tweede lid van (172) een som van één term, daar k dan alleen 1 zijn kan; die term is dan a^0b^0, dus 1, zoodat de formule juist blijft.

Ook is de formule nog juist voor $n = 0$. Het tweede lid van (172) is dan nl. een som van nul termen, dus nul (zie n⁰. 310), terwijl ook het eerste lid nul wordt.

323. De formule (113) blijft geldig voor $b = 0$, daar dan alle termen van het tweede lid, behalve de eerste, nul zijn, terwijl de eerste term a^{n-1} is; ook het eerste lid is dan echter a^{n-1}.

De formule (172) van n⁰. 322 voert voor $b = 0$ tot

$$a^{n-1} = a^{n-1}0^0,$$

hetgeen volgens (170) juist is. Dit doet de doelmatigheid van de in n⁰. 317 gegeven definitie $0^0 = 1$ uitkomen.

---

daarin, dat men in de formuleering der eigenschap van n⁰. 203 de beperking > 1 los kan laten en deze eigenschap aldus uitspreken:

Een natuurlijk getal is op één en slechts één manier als een product van priemgetallen te schrijven.

Voor het getal 1 wordt dit nl. een product van nul factoren (zie n⁰. 311).

§ 2. Permutaties en combinaties.

324. Variaties en permutaties. We denken ons een hoeveelheid van n elementen en vragen naar *het aantal manieren, waarop men in bepaalde volgorde p dier elementen kan aanwijzen* (waarin $p \leqq n$ is), dus het aantal manieren, waarop men een niet nader aangewezen p-tal dier elementen op de getallen 1, 2, 3, ..., p kan afbeelden.

Het genoemde aantal wordt het *aantal* ***variaties*** *van n elementen p aan p* (of in groepen van p) genoemd en als V_n^p geschreven.

325. Om het aantal V_n^p te bepalen merken we op, dat het eerste element (element met rangnummer 1) op n manieren kan worden gekozen. Is dit geschied, dan kan het element met rangnummer 2 nog op $n - 1$ manieren worden aangenomen, daar men daarvoor ieder der $n - 1$ overige elementen nemen kan; de elementen met de rangnummers 1 en 2 kunnen dus op $n(n - 1)$ manieren worden aangenomen. Verder kan dan het element met rangnummer 3 op $n - 2$ manieren gekozen worden, enz. en ten slotte het element met rangnummer p op $n + 1 - p$ manieren. In het geheel kunnen dus de p elementen, met inachtneming van de volgorde, op $n(n - 1)(n - 2) \ldots . (n + 1 - p)$ manieren worden aangewezen, zoodat men heeft:

$$V_n^p = n(n - 1)(n - 2) \ldots . (n + 1 - p). \qquad (173)$$

Hiervoor kan ook geschreven worden:

$$V_n^p = \frac{n!}{(n - p)!}. \qquad (174)$$

326. Is $p + q \leqq n$, dan volgt uit de formule (173) onmiddellijk:

$$V_n^{p+q} = V_n^p \,.\, V_{n-p}^q = V_n^q \,.\, V_{n-q}^p. \qquad (175)$$

Dit volgt ook direct uit de van variaties gegeven definitie, daar men, om uit n elementen er $p + q$ aan te wijzen, beginnen kan

met p elementen aan te wijzen (hetgeen op V_n^p manieren geschieden kan), waarna men nog q elementen uit de overblijvende $n - p$ elementen heeft aan te wijzen (hetgeen op V_{n-p}^q manieren geschieden kan).

Voor $q = 1$ gaat de formule (175) over in:

$$V_n^{p+1} = (n - p)\, V_n^p = n\, V_{n-1}^p. \tag{176}$$

327. Is in V_n^p het getal p gelijk aan n, dan spreekt men van het *aantal* ***permutaties*** *van n elementen* en schrijft daarvoor P_n. Dit is het *aantal manieren, waarop een hoeveelheid van n elementen op de getallen 1, 2, ..., n kan worden afgebeeld,* dus het aantal manieren, waarop men die elementen van rangnummers voorzien kan.

Volgens (173) (waarin nu $p = n$ te stellen is) heeft men:

$$P_n = n(n - 1)(n - 2) \ldots . 2 . 1 = n! \tag{177}$$

Hieruit blijkt, *dat de formule (174) ook voor $p = n$ geldig is.* Men moet daartoe $0! = 1$ nemen, waaruit de doelmatigheid der in n°. 313 gegeven definitie (167) duidelijk blijkt.

328. Combinaties. Onder het *aantal* ***combinaties*** *van n elementen p aan p* ($p \leqq n$) verstaat men het *aantal manieren, waarop men uit een hoeveelheid van n elementen p elementen uitkiezen kan,* dus het aantal deelen van p elementen, die een hoeveelheid van n elementen bezit. Dit aantal wordt door C_n^p voorgesteld.

329. Het verschil tusschen variaties (zie n°. 324) en combinaties bestaat daarin, dat bij een combinatie uitsluitend het deel van p elementen beschouwd wordt, terwijl bij een variatie dit deel ook nog genummerd (afgebeeld op de getallen 1, 2, ..., p) gedacht wordt. Dit maakt, *dat iedere combinatie tot P_p variaties voert,* daar de p tot die combinatie behoorende elementen op P_p manieren genummerd kunnen worden. Men heeft dus:

$$V_n^p = P_p \,.\, C_n^p. \tag{178}$$

330. Uit (178) volgt in verband met de formules (174) en (177) van n°. 325 en 327:

$$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n - p)!}. \tag{179}$$

Daar het tweede lid van (179) niet verandert als men p door $n - p$ vervangt, heeft men:

$$C_n^p = C_n^{n-p}. \qquad (180)$$

Van deze formule is de juistheid ook onmiddellijk uit de beteekenis van C_n^p in te zien; het vormen van een deel van p elementen is nl. ook te beschouwen als vorming van het complementaire deel (zie n⁰. 292), dat $n - p$ elementen bevat.

We merken nog op, dat de formule (179) ten gevolge van $0! = 1$ ook voor $p = 0$ of $p = n$ geldig is. Men heeft nl.:

$$C_n^0 = C_n^n = 1. \qquad (181)$$

De juistheid hiervan blijkt hieruit, dat een hoeveelheid van n elementen slechts één deel van nul elementen (de nulhoeveelheid) en één deel van n elementen (de hoeveelheid zelf) bezit.

Blijkbaar geldt (181) ook nog voor $n = 0$, m. a. w.:

$$C_0^0 = 1.$$

331. De formule (179) kan omgevormd worden tot:

$$C_n^p = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n+1-p)}{p!} =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(p+1)}{(n-p)!}. \qquad (182)$$

De eerste dezer uitdrukkingen voor C_n^p vloeit ook, in verband met de formule (173), onmiddellijk uit (178) voort. Voor de berekening van C_n^p is de eerste uitdrukking te verkiezen als $p < n - p$, dus $2p < n$ is, de tweede uitdrukking als $2p > n$ is.

332. Betrekkingen tusschen aantallen combinaties. Uit de formule (179) volgt:

$$pC_n^p = (n+1-p)\, C_n^{p-1}. \qquad (183)$$

Hieruit leidt men gemakkelijk af, *dat* $C_n^p >, <$ *of* $= C_n^{p-1}$ *is al naar gelang* $2p <, >$ *of* $= n + 1$ *is.*

De getallen

$$C_{2n}^0,\ C_{2n}^1,\ C_{2n}^2, \ldots, C_{2n}^n,\ C_{2n}^{n+1}, \ldots, C_{2n}^{2n} \qquad (184)$$

beginnen dus met toe te nemen; het grootste is C_{2n}^n, terwijl vervolgens de getallen weer afnemen (en wel blijkens (180) op dezelfde wijze als waarop ze eerst zijn toegenomen, daar de getallen (184) van links naar rechts dezelfde zijn als van rechts naar links).

De getallen

$$C^0_{2n+1},\ C^1_{2n+1},\ C^2_{2n+1},\ \ldots,\ C^n_{2n+1},\ C^{n+1}_{2n+1},\ C^{n+2}_{2n+1}\ \ldots,\ C^{2n+1}_{2n+1} \qquad (185)$$

nemen toe tot C^n_{2n+1}; het volgende getal C^{n+1}_{2n+1} is aan C^n_{2n+1} gelijk, terwijl de getallen vervolgens weer afnemen.

333. Uit de formule (179) van n⁰. 330 volgt:

$$C^{p-1}_{n-1} + C^p_{n-1} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!\,(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!\,(n-1-p)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!\,p}{p!\,(n-p)!} + \frac{(n-1)!\,(n-p)}{p!\,(n-p)!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = C^p_n.$$

Men heeft dus:

$$C^p_n = C^{p-1}_{n-1} + C^p_{n-1}. \qquad (186)$$

Deze formule volgt ook onmiddellijk uit de beteekenis van C^p_n. Men kan nl. de combinaties van n elementen p aan p splitsen in de C^{p-1}_{n-1} combinaties, die een bepaald aangewezen element bevatten (welke combinaties gevormd worden door dat element te vereenigen met de combinaties van $p-1$ elementen uit de $n-1$ overige elementen), en de C^p_{n-1} combinaties, die dat element niet bevatten.

In het voorgaande wordt $p < n$ ondersteld; voor het geval $p \geqq n$ zie n⁰. 359.

334. Uit (186) volgt door n door $n-1$ te vervangen:

$$C^p_{n-1} = C^{p-1}_{n-2} + C^p_{n-2},$$

hetgeen met (186) gecombineerd geeft:

$$C^p_n = C^{p-1}_{n-1} + C^{p-1}_{n-2} + C^p_{n-2}.$$

Evenzoo vindt men (door C^p_{n-2} met behulp van (186) in twee termen te splitsen):

$$C^p_n = C^{p-1}_{n-1} + C^{p-1}_{n-2} + C^{p-1}_{n-3} + C^p_{n-3}.$$

Zoo doorgaande vindt men:

$$C^p_n = C^{p-1}_{n-1} + C^{p-1}_{n-2} + C^{p-1}_{n-3} + \ldots + C^{p-1}_{p+2} + C^{p-1}_{p+1} + C^p_{p+1},$$

$$C^p_n = C^{p-1}_{n-1} + C^{p-1}_{n-2} + C^{p-1}_{n-3} + \ldots + C^{p-1}_{p+1} + C^{p-1}_{p} + C^{p-1}_{p-1}.$$

In deze laatste formule is voor de regelmaat C^{p-1}_{p-1} in plaats van C^p_p geschreven, hetgeen wegens (181) geoorloofd is. Daardoor kan de formule korter zoo geschreven worden:

$$C^p_n = \sum_{k=1}^{n-p+1} C^{p-1}_{n-k}. \qquad (187)$$

335. Volgens de eigenschap van n°. 294 bedraagt het aantal deelen (de nulhoeveelheid medegerekend) van een hoeveelheid, die uit n elementen bestaat, 2^n. Daar er onder die deelen C_n^p voorkomen, die p elementen bevatten, is het aantal deelen der hoeveelheid ook gelijk aan:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n.$$

Men heeft dus:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n. \qquad (188)$$

336. Herhalingscombinaties. Men spreekt van ***herhalingscombinaties*** *van n elementen p aan p* als men op verschillende manieren uit de n elementen een groep van p elementen neemt (zonder op de volgorde te letten) en daarbij een zelfde element een willekeurig aantal malen mag herhalen. Het aantal dier herhalingscombinaties wordt door $\overline{C}_n^p$ voorgesteld. Nu kan $p > n$ zijn, hetgeen bij gewone combinaties uitgesloten is.

Om een voorbeeld te geven zijn de herhalingscombinaties 4 aan 4 van de getallen 1, 2, 3:

(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 2), (1, 1, 2, 2), (1, 2, 2, 2), (2, 2, 2, 2),
(1, 1, 1, 3), (1, 1, 2, 3), (1, 2, 2, 3), (2, 2, 2, 3), (1, 1, 3, 3),
(1, 2, 3, 3), (2, 2, 3, 3), (1, 3, 3, 3), (2, 3, 3, 3), (3, 3, 3, 3).

337. Om het getal $\overline{C}_n^p$ te bepalen stellen we ons voor, dat de n elementen de getallen 1, 2, 3, ..., n zijn. De getallen, die in de verschillende herhalingscombinaties optreden, denken we (als in het voorbeeld van n°. 336) naar de grootte gerangschikt. We vermeerderen nu in ieder dier herhalingscombinaties het tweede getal met 1, het derde met 2, enz., zoodat het p^{de} (en laatste) getal met $p - 1$ vermeerderd wordt. Op deze wijze ontstaan uitsluitend ongelijke getallen, waarvan het grootste hoogstens $n + p - 1$ is, dus gewone combinaties p aan p van $n + p - 1$ elementen (de getallen 1, 2, 3, ..., $n + p - 1$) [1].

---

[1]) De herhalingscombinaties uit het voorbeeld van n°. 336 gaan daarbij over in:

(1, 2, 3, 4), (1, 2, 3, 5), (1, 2, 4, 5), (1, 3, 4, 5), (2, 3, 4, 5),
(1, 2, 3, 6), (1, 2, 4, 6), (1, 3, 4, 6), (2, 3, 4, 6), (1, 2, 5, 6),
(1, 3, 5, 6), (2, 3, 5, 6), (1, 4, 5, 6), (2, 4, 5, 6), (3, 4, 5, 6).

Deze rangschikking is dezelfde als die van n°. 276.

Op de aangegeven wijze verkrijgt men *alle* combinaties p aan p van de $n+p-1$ elementen $1, 2, \ldots, n+p-1$, daar men, van een willekeurige naar de grootte gerangschikte combinatie uitgaande, langs den omgekeerden weg (dus door het tweede getal met 1 te verminderen, het derde met 2, enz.) een herhalingscombinatie der elementen $1, 2, \ldots, n$ verkrijgt.

Daar verder geen enkele combinatie uit twee verschillende herhalingscombinaties ontstaat, heeft men:

$$\overline{C}_n^p = C_{n+p-1}^p, \tag{189}$$

dus in verband met (179) en (182):

$$\overline{C}_n^p = \frac{(n+p-1)!}{p!\,(n-1)!} = \\ = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+p-1)}{p!} = \\ = \frac{(p+1)(p+2)\ldots(n+p-1)}{(n-1)!}. \tag{190}$$

338. Door de $\overline{C}_n^p$ herhalingscombinaties van n elementen p aan p te verdeelen in de $\overline{C}_n^{p-1}$ herhalingscombinaties, die een bepaald aangewezen element bevatten, en de $\overline{C}_{n-1}^p$, herhalingscombinaties, die dat element niet bevatten, vindt men:

$$\overline{C}_n^p = \overline{C}_n^{p-1} + \overline{C}_{n-1}^p \text{ [1]}. \tag{191}$$

Op geheel soortgelijke wijze als in n⁰. 334 leidt men hieruit door herhaalde toepassing af:

$$\overline{C}_n^p = \overline{C}_n^{p-1} + \overline{C}_{n-1}^{p-1} + \overline{C}_{n-2}^{p-1} + \ldots + \overline{C}_2^{p-1} + \overline{C}_1^{p-1}; \tag{192}$$

als laatsten term krijgt men eigenlijk $\overline{C}_1^p$, maar deze is gelijk aan 1 en dus door $\overline{C}_1^{p-1}$ te vervangen.

339. Uit de formule (191) vloeit een bewijs van (190) voort, nl. door volledige inductie naar $n+p$ toe te passen. Voor $n+p=2$ is (190) juist. Neemt men de juistheid van (190) aan voor $\overline{C}_n^{p-1}$ en $\overline{C}_{n-1}^p$, waarbij de som van bovensten en ondersten index $n+p-1$ is, dan vindt men volgens (191):

$$\overline{C}_n^p = \frac{(n+p-2)!}{(p-1)!\,(n-1)!} + \frac{(n+p-2)!}{p!\,(n-2)!} =$$

---

[1]) Dit is natuurlijk ook uit (190) af te leiden.

$$= \frac{(n+p-2)!\,p}{p!\,(n-1)!} + \frac{(n+p-2)!\,(n-1)}{p!\,(n-1)!} = \frac{n+p-1!}{p!\,(n-1)!}\ ^{1)}.$$

Hiermede is dan de juistheid van (190) voor een indexsom $n+p$ aangetoond, dus de stap van $n+p-1$ op $n+p$ verricht.

340. Permutaties van elementen, die niet alle verschillen. We denken ons n elementen

$$E_1,\ E_2,\ \ldots.,\ E_n, \tag{193}$$

die niet alle verschillend gedacht worden, zoodat die elementen in k groepen van onderling gelijke elementen te verdeelen zijn; de aantallen elementen dier groepen noemen we $p_1, p_2, \ldots., p_k$, waarbij sommige dier getallen ook 1 kunnen zijn. Men kan nu de vraag stellen *op hoeveel manieren de elementen (193) gerangschikt (dus genummerd) kunnen worden, indien rangschikkingen, die door verwisseling van gelijke elementen ontstaan, als dezelfde beschouwd worden.*

Een voorbeeld van zulke rangschikkingen is het volgende, waarbij $k=3$, $p_1=2$, $p_2=2$, $p_3=1$ is:

(1, 1, 2, 2, 3), (1, 1, 2, 3, 2), (1, 1, 3, 2, 2).
(1, 2, 1, 2, 3), (1, 2, 1, 3, 2), (1, 2, 2, 1, 3),
(1, 2, 2, 3, 1), (1, 2, 3, 1, 2), (1, 2, 3, 2, 1),
(1, 3, 1, 2, 2), (1, 3, 2, 1, 2). (1, 3, 2, 2, 1),
(2, 1, 1, 2, 3), (2, 1, 1, 3, 2), (2, 1, 2, 1, 3),
(2, 1, 2, 3, 1), (2, 1, 3, 1, 2), (2, 1, 3, 2, 1),
(2, 2, 1, 1, 3), (2, 2, 1, 3, 1), (2, 2, 3, 1, 1),
(2, 3, 1, 1, 2), (2, 3, 1, 2, 1), (2, 3, 2, 1, 1),
(3, 1, 1, 2, 2), (3, 1, 2, 1, 2), (3, 1, 2, 2, 1),
(3, 2, 1, 1, 2), (3, 2, 1, 2, 1), (3, 2, 2, 1, 1).

341. De in n⁰. 340 genoemde rangschikkingen blijven dezelfde als men de daarin voorkomende gelijke elementen verwisselt. Hierdoor voert ieder dier rangschikkingen tot

$$p_1!\ p_2!\ \ldots.\ p_k!$$

permutaties der n elementen (193) zoo men deze als verschillend

[1]) We hadden bij deze herleiding ook van de formule (186) van n⁰. 333 gebruik kunnen maken.

beschouwt; immers door de p_1 gelijke elementen van de eerste groep te verwisselen krijgt men $p_1!$ permutaties, waarvan ieder weer tot $p_2!$ permutaties voert door de p_2 elementen van de tweede groep te verwisselen, enz.

Daar er in het geheel $n!$ permutaties zijn als men alle elementen als verschillend beschouwt (zie n⁰. 327), *krijgt men*

$$\frac{n!}{p_1!\ p_2!\ \ldots .\ p_k!} \qquad (194)$$

permutaties van n elementen als daaronder $p_1, p_2, \ldots ., p_k$ *gelijke elementen voorkomen.*

342. Met het in n⁰. 341 verkregen resultaat is tevens opgelost de vraag naar *het aantal manieren, waarop men n elementen in groepen* $A_1, A_2, \ldots ., A_k$ *resp. van* $p_1, p_2, \ldots ., p_k$ *elementen kan verdeelen als men niet op de volgorde der elementen van een zelfde groep let.* Dit is nl. het door (194) aangegeven aantal, daar die vraag tot die van n⁰. 340 is terug te brengen. Dit kan geschieden door p_1 getallen 1, p_2 getallen 2, enz. op de verschillende manieren, die mogelijk zijn, over de n elementen te verdeelen en daarbij de elementen, waaraan het getal 1 is toegevoegd, in de groep A_1 te plaatsen, die met het getal 2 in de groep A_2, enz. Hierbij moet men, als b.v. p_1 en p_2 gelijk zijn, toch de groepen A_1 en A_2 uit elkaar gehouden denken; m. a. w. bij overbrenging van de elementen der groep A_1 naar A_2 en omgekeerd moet dit als een andere verdeeling in groepen worden opgevat, zoodat op de individualiteit der groepen gelet wordt.

Neemt men $k = 2$, dan vindt men voor *het aantal manieren, waarop de n elementen in een eerste groep van p elementen en een tweede groep van n — p elementen te verdeelen zijn,* $\frac{n!}{p!\,(n-p)!}$. Dit aantal is echter (blijkens de beteekenis) ook het aantal combinaties p aan p van n elementen, waarmede de formule (179) van n⁰. 330 opnieuw bewezen is.

343. Vraagt men naar *het aantal manieren, waarop n elementen in groepen van* $p_1, p_2, \ldots ., p_k$ *elementen verdeeld kunnen worden zonder op de individualiteit der groepen te letten,* dan wordt dit aantal nog steeds door (194) aangegeven als de getallen

$p_1, p_2, \ldots, p_k$ alle verschillen. *Komen echter onder die getallen i gelijke voor,* dan voert iedere verdeeling in groepen, door verwisseling der i groepen met hetzelfde aantal elementen, tot $i!$ verdeelingen in groepen met inachtneming der individualiteit van de groepen [1]). *Om het nu gevraagde aantal te vinden moet dus het aantal (194) nog door $i!$ gedeeld worden.* Komen onder de getallen $p_1, p_2, \ldots, p_k$ nog andere gelijke voor, ten getale van j b.v., dan moet (194) ook nog door $j!$ gedeeld worden om het gevraagde aantal op te leveren, enz.

Zoo vindt men b.v. voor het aantal manieren, waarop een spel van 32 kaarten in 4 hoopen ieder van 8 kaarten verdeeld kan worden:

$$\frac{32!}{4!\,(8!)^4} = 3^5 . 5^3 . 11^2 . 13^2 . 17 . 19 . 23 . 29 . 31 = 4\,148\,378\,852\,099\,625.$$

Algemeener vindt men voor het *aantal manieren, waarop kp elementen in k groepen ieder van p elementen verdeeld kunnen worden:*

$$\frac{(kp)!}{k!\,(p!)^k}.$$

---

344. Aantal manieren, waarop een product van n factoren met haakjes geschreven kan worden. We stellen de vraag:

Op hoeveel manieren kan het product

$$a_1 a_2 \ldots . a_n \tag{195}$$

met haakjes worden neergeschreven, daarbij enkel de associatieve eigenschap der vermenigvuldiging toepassend?

Hierbij is bedoeld, dat de haakjes volledig aangeven welke vermenigvuldigingen moeten worden uitgevoerd. Hiervoor zijn $n - 2$ paren haakjes noodig [2]). Men heeft nl. $n - 1$ vermenig-

---

[1]) Hierbij wordt ondersteld, *dat de i gelijke getallen p niet nul zijn.* Immers anders is ieder der i groepen de nulhoeveelheid en zijn die i groepen dus alle dezelfde (zie n°. 291); een verwisseling dier groepen geeft dan geen andere permutatie der n elementen.

[2]) Hier wordt $n > 1$ ondersteld.

vuldigingen te verrichten, die ieder een paar haakjes vereischen, behalve de laatste vermenigvuldiging; immers heeft men (door het uitvoeren van $n - 2$ vermenigvuldigingen) nog slechts twee getallen over gehouden, dan moeten die nog met elkaar vermenigvuldigd worden.

Is b.v. $n = 5$, dan kan het product op de volgende 14 manieren geschreven worden:

$$\begin{array}{ll} a_1 \,.\, [a_2\{a_3(a_4a_5)\}], & [\{(a_1a_2)a_3\}a_4] \,.\, a_5, \\ a_1 \,.\, [a_2\{(a_3a_4)a_5\}], & [\{a_1(a_2a_3)\}a_4] \,.\, a_5, \\ a_1 \,.\, [(a_2a_3)(a_4a_5)], & [(a_1a_2)(a_3a_4)] \,.\, a_5, \\ a_1 \,.\, [\{a_2(a_3a_4)\}a_5], & [a_1\{(a_2a_3)a_4\}] \,.\, a_5, \\ a_1 \,.\, [\{(a_2a_3)a_4\}a_5], & [a_1\{a_2(a_3a_4)\}] \,.\, a_5, \\ (a_1a_2) \,.\, \{a_3(a_4a_5)\}, & \{(a_1a_2)a_3\} \,.\, (a_4a_5), \\ (a_1a_2) \,.\, \{(a_3a_4)a_5\}, & \{a_1(a_2a_3)\} \,.\, (a_4a_5). \end{array}$$

Bij ieder tweetal naast elkaar geplaatste vormen is de plaatsing der haakjes dezelfde als men die in den eenen vorm van links naar rechts en in den anderen vorm van rechts naar links leest.

345. Stellen we het gevraagde aantal vormen, waarin het product (195) kan worden gebracht, door A_n voor, dan is $A_1 = A_2 = 1$; voor $n = 1$ of 2 behoeven nog geen haakjes geplaatst te worden. De haakjes wijzen aan welke vermenigvuldiging het laatst moet worden uitgevoerd. De twee factoren bij die laatste vermenigvuldiging zijn zelf weer ontstaan de eene als product van k factoren, de andere als product van $n - k$ factoren en kunnen dus in A_k resp. A_{n-k} vormen gebracht worden. Er zijn dus nog $A_k A_{n-k}$ vormen, die bij dezelfde laatste vermenigvuldiging behooren; deze laatste vermenigvuldiging is in het voorbeeld van n⁰. 344 door een stip aangewezen.

Daar k ieder der waarden $1, 2, 3, \ldots, n - 1$ hebben kan, vindt men zoo:

$$A_n = A_1A_{n-1} + A_2A_{n-2} + A_3A_{n-3} + \ldots + A_{n-2}A_2 + A_{n-1}A_1 \text{ [1]}, \quad (196)$$

of korter geschreven:

$$A_n = \sum_{k=1}^{n-1} A_k A_{n-k}.$$

346. In de gelijkheid (196) zijn in het tweede lid de termen

[1] Hierin wordt $n > 1$ ondersteld.

van links naar rechts dezelfde als van rechts naar links. Is n oneven, dan krijgt men zoo paren gelijke termen, terwijl voor n even de middelste term na paring der gelijke termen overblijft. De gelijkheid (196) wordt in het eerste geval (als men n door $2n+1$ vervangt):

$$A_{2n+1} = 2(A_1A_{2n} + A_2A_{2n-1} + \ldots + A_{n-1}A_{n+2} + A_nA_{n+1}), \quad (197)$$

in het laatste geval (als men n door $2n$ vervangt):

$$A_{2n} = 2(A_1A_{2n-1} + A_2A_{2n-2} + \ldots + A_{n-1}A_{n+1}) + A_n^2. \quad (198)$$

347. De betrekkingen (197) en (198) stellen ons in staat, uitgaande $A_1 = 1$, achtereenvolgens A_2, A_3, A_4, enz te berekenen. Men vindt zoo:

$A_2 = 1^2 = 1,$
$A_3 = 2(1 \,.\, 1) = 2,$
$A_4 = 2(1 \,.\, 2) + 1^2 = 5,$
$A_5 = 2(1 \,.\, 5 + 1 \,.\, 2) = 14,$
$A_6 = 2(1 \,.\, 14 + 1 \,.\, 5) + 2^2 = 42,$
$A_7 = 2(1 \,.\, 42 + 1 \,.\, 14 + 2 \,.\, 5) = 132,$
$A_8 = 2(1 \,.\, 132 + 1 \,.\, 42 + 2 \,.\, 14) + 5^2 = 429,$
$A_9 = 2(1 \,.\, 429 + 1 \,.\, 132 + 2 \,.\, 42 + 5 \,.\, 14) = 1\,430,$
$A_{10} = 2(1 \,.\, 1430 + 1 \,.\, 429 + 2 \,.\, 132 + 5 \,.\, 42) + 14^2 = 4\,862,$
$A_{11} = 2(1 \,.\, 4862 + 1 \,.\, 1430 + 2 \,.\, 429 + 5 \,.\, 132 + 14 \,.\, 42) = 16\,796.$

In n°. 351 zullen we een algemeene formule voor het aantal A_n vinden.

348. Aantal manieren, waarop een product van n factoren berekend kan worden. We stellen vervolgens de vraag:

Op hoeveel manieren kan het product (195) van n°. 344 door vermenigvuldigen van telkens twee getallen berekend worden?

Hierbij wordt geen onderscheid gemaakt tusschen de berekening van ab en die van ba, terwijl ook niet gelet wordt op de volgorde, waarin de vermenigvuldigingen worden uitgevoerd. Twee berekeningen van het product (195) worden dus dan en alleen dan als verschillend beschouwd wanneer de gedeeltelijke vermenigvuldigingen, die uitgevoerd moeten worden, niet alle dezelfde zijn; zoo geven b.v.

$$(a_1a_2)\,(a_3a_4), \quad (a_3a_4)\,(a_1a_2), \quad (a_2a_1)\,(a_3a_4), \quad (a_3a_4)\,(a_2a_1),$$
$$(a_1a_2)\,(a_4a_3), \quad (a_4a_3)\,(a_1a_2), \quad (a_2a_1)\,(a_4a_3), \quad (a_4a_3)\,(a_2a_1)$$

alle dezelfde wijze van berekenen van $a_1a_2a_3a_4$.

De verschillende wijzen, waarop dit product kan worden bepaald, worden aangegeven door:

$$
\begin{array}{lll}
a_1\{a_2(a_3a_4)\}, & a_1\{a_3(a_2a_4)\}, & a_1\{a_4(a_2a_3)\}, \\
a_2\{a_1(a_3a_4)\}, & a_2\{a_3(a_1a_4)\}, & a_2\{a_4(a_1a_3)\}, \\
a_3\{a_1(a_2a_4)\}, & a_3\{a_2(a_1a_4)\}, & a_3\{a_4(a_1a_2)\}, \\
a_4\{a_1(a_2a_3)\}, & a_4\{a_2(a_1a_3)\}, & a_4\{a_3(a_1a_2)\}, \\
(a_1a_2)(a_3a_4), & (a_1a_3)(a_2a_4), & (a_1a_4)(a_2a_3).
\end{array}
$$

349. Wanneer de berekening van een product ab verschillend beschouwd wordt van de berekening van ba is het aantal manieren, waarop de berekening van het product (195) kan worden uitgevoerd, gelijk aan het aantal vormen, waarin dit door plaatsing van haakjes gebracht kan worden (zie n⁰. 344) als ook nog met de commutatieve eigenschap der vermenigvuldiging rekening wordt gehouden, dus als de volgorde der factoren op alle mogelijke manieren veranderd wordt. Het aantal berekeningswijzen van het product wordt dan $n!A_n$, waarin A_n de in n⁰. 345 aangegeven beteekenis heeft.

Maakt men geen verschil tusschen de berekening van ab en die van ba, dan worden (daar in het geheel $n - 1$ vermenigvuldigingen zijn uit te voeren) telkens 2^{n-1} berekeningswijzen dezelfde, *zoodat men dan*

$$B_n = \frac{n!A_n}{2^{n-1}} \tag{199}$$

mogelijke berekeningswijzen van het product vindt.

In verband met de in n⁰. 347 gevonden waarden voor A_1, A_2, A_3, ... heeft men dus:

$$B_1 = B_2 = 1, \quad B_3 = 3, \quad B_4 = 15, \; B_5 = 105, \quad B_6 = 945,$$
$$B_7 = 10\,395, \quad B_8 = 135\,135, \quad B_9 = 2\,027\,025, \quad B_{10} = 34\,459\,425.$$

350. Voor het in n⁰. 348 en 349 beschouwde *aantal* B_n *der berekeningswijzen van* $a_1a_2 \ldots\ldots a_n$ kan men een eenvoudige uitdrukking vinden door B_n in B_{n-1} uit te drukken [1]).

Uit een berekeningswijze van $a_1a_2 \ldots\ldots a_n$ kan men één be-

---

[1]) Hierbij wordt $n > 1$ ondersteld.

paalde berekeningswijze van $a_1a_2 \ldots . a_{n-1}$ afleiden door den factor a_n te schrappen, dus door de vermenigvuldiging met a_n achterwege te laten.

Omgekeerd voert zoo iedere berekeningswijze van $a_1a_2 \ldots . a_{n-1}$ tot $2n - 3$ berekeningswijzen van $a_1a_2 \ldots a_n$. Bij de berekening van $a_1a_2 \ldots . a_{n-1}$ (bestaande uit $n - 2$ vermenigvuldigingen) worden nl. $n - 2$ producten berekend; deze vormen, te zamen met de getallen $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, waarvan wordt uitgegaan, $2n - 3$ producten van één of meer factoren. Een dezer $2n - 3$ producten wordt nu met a_n vermenigvuldigd.

Zoo voert b.v.

$$(a_1a_3)\{(a_2a_5)a_4\}$$

tot de volgende $2 \,.\, 6 - 3 = 9$ berekeningswijzen van $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$:

$$\{(a_1a_6)a_3\}\,\{(a_2a_5)a_4\}, \quad \{a_1(a_3a_6)\}\,\{(a_2a_5)a_4\}, \quad \{(a_1a_3)a_6\}\,\{(a_2a_5)a_4\},$$
$$(a_1a_3)\{[(a_2a_6)a_5]a_4\}, \quad (a_1a_3)\{[a_2(a_5a_6)]a_4\}, \quad (a_1a_3)\{[(a_2a_5)a_6]a_4\},$$
$$(a_1a_3)\{(a_2a_5)\,(a_4a_6)\}, \quad (a_1a_3)[\{(a_2a_5)a_4\}a_6], \quad [(a_1a_3)\{(a_2a_5)a_4\}]a_6.$$

Uit de voorgaande beschouwingen volgt:

$$B_n = (2n - 3)B_{n-1}.$$

Daar $B_1 = 1$ is, vindt men achtereenvolgens:

$$B_2 = 1, \quad B_3 = 1 \,.\, 3, \quad B_4 = 1 \,.\, 3 \,.\, 5, \text{ enz.},$$

dus in het algemeen:

$$B_n = 1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots . (2n - 3). \tag{200}$$

Hiermede is een algemeene formule gevonden voor de getallen, die in n°. 349 stuk voor stuk berekend zijn.

351. Uit (200) vindt men in verband met de betrekking (199) van n°. 349:

$$A_n = \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots . (2n - 3)2^{n-1}}{n!},$$

of:

$$A_n = \frac{2 \,.\, 6 \,.\, 10 \,.\, 14 \ldots . (4n - 6)}{n!}.$$

Hiervoor kan ook geschreven worden:

$$A_n = \frac{(2n - 2)!}{(n - 1)!\, n!} = \frac{C_{2n-2}^{n-1}}{n}, \tag{201}$$

of ook:

$$A_n = \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7 \,\ldots\, (2n-3) \,.\, 4^{n-1}}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 8 \,\ldots\, (2n-2) \,.\, n} \text{ [1]}.$$

352. Bewijs der gevonden formules door volledige inductie. Daar door (201) aan de betrekking (196) van n⁰. 345 voldaan is, heeft men:

$$\frac{C_{2n-2}^{n-1}}{n} = \frac{C_{2n-4}^{n-2}}{n-1} + \frac{C_2^1 C_{2n-6}^{n-3}}{2(n-2)} + \frac{C_4^2 C_{2n-8}^{n-4}}{3(n-3)} + \ldots + \frac{C_{2n-4}^{n-2}}{n-1}. \qquad (202)$$

Deze formule kan ook rechtstreeks worden aangetoond, waarmede tevens een ander bewijs der resultaten van n⁰. 351 (en dus ook van die van n⁰. 350) verkregen wordt. Is D_n een afkorting voor het tweede of derde lid van (201), dan is:

$$2(2n-1)D_n = (n+1)D_{n+1}. \qquad (203)$$

---

[1]) Voor den lezer, die met de formule van JOHN WALLIS (Arithmetica Infinitorum, 1655), nl.:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdots\cdots,$$

bekend is, maken we nog de opmerking, dat $\frac{2}{\pi}$ ongeveer midden tusschen

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-3}{2n-4} \cdot \frac{2n-3}{2n-2}$$

en

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-3}{2n-4} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{2n-1}{2n-2}$$

gelegen is en men dus bij benadering heeft:

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-3}{2n-4} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{4n-3}{4n-4},$$

$$\frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7 \,\ldots\, (2n-3)}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 8 \,\ldots\, (2n-2)} = \frac{2}{\sqrt{\pi(4n-3)}}.$$

Hierdoor vindt men bij benadering:

$$A_n = \frac{2^{2n-1}}{n\sqrt{\pi(4n-3)}}.$$

Dit geeft de volgende benaderde waarden voor A_1, A_2, A_3, enz.:

$A_1 = 1{,}1284$, $A_2 = 1{,}0080$, $A_3 = 2{,}0060$, $A_4 = 5{,}0073$,
$A_5 = 14{,}0120$, $A_6 = 42{,}0237$, $A_7 = 132{,}053$, $A_8 = 429{,}127$,
$A_9 = 1430{,}34$, $A_{10} = 4862{,}89$, $A_{11} = 16798{,}5$.

De afwijking van de juiste waarden (zie n⁰. 347) is dus slechts zeer gering.

We bewijzen nu door volledige inductie naar n, dat voldaan is aan:

$$D_n = \sum_{k=1}^{n-1} D_k D_{n-k}. \tag{204}$$

Hieraan is (blijkens $D_1 = D_2 = 1$) voldaan voor $n = 2$. De juistheid van (204) voor een zekere waarde van n aannemend vindt men:

$$4(n-1)D_n = 4(n-1)\sum_{k=1}^{n-1} D_k D_{n-k} = \sum_{k=1}^{n-1} 4(n-1) D_k D_{n-k}\ ^{1)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \{2(2k-1)D_k D_{n-k} + 2(2n-2k-1)D_k D_{n-k}\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} 2(2k-1)D_k D_{n-k} + \sum_{k=1}^{n-1} 2(2n-2k-1)D_k D_{n-k}\ ^{2)}.$$

Volgens (203) heeft men dus:

$$4(n-1)D_n = \sum_{k=1}^{n-1}(k+1)D_{k+1}D_{n-k} + \sum_{k=1}^{n-1}(n-k+1)D_k D_{n-k+1} =$$

$$= \sum_{k=2}^{n} k D_k D_{n-k+1}\ ^{3)} + \sum_{k=1}^{n-1}(n-k+1)D_k D_{n-k+1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(n+1)D_k D_{n+1-k} - 2D_1 D_n.$$

---

[1]) Dit komt neer op toepassing van de distributieve eigenschap der vermenigvuldiging. De formule (55) van n⁰. 99 kan nl. ook in den volgenden vorm geschreven worden:

$$a \,.\, \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} a b_k.$$

[2]) Dit is een toepassing van de commutatieve en associatieve eigenschap der optelling, volgens welke men heeft:

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

[3]) Deze term ontstaat uit den eersten term van het vorige lid door $k + 1 = l$ te stellen en te bedenken, dat dan l de waarden $2, 3, \ldots,$ n kan aannemen. Vervolgens kan de letter l dan weer door k worden vervangen.

Daar $D_1 = 1$ is, volgt hieruit, weer in verband met (203):

$$2(2n - 1)D_n = (n + 1) \sum_{k=1}^{n} D_k D_{n+1-k},$$

$$(n + 1)D_{n+1} = (n + 1) \sum_{k=1}^{n} D_k D_{n+1-k},$$

$$D_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} D_k D_{n+1-k}.$$

Dit nu is de gelijkheid, waarin (204) overgaat door daarin n door $n + 1$ te vervangen, waarmede de stap van n op $n + 1$ uitgevoerd is.

---

§ 3. Binomium van Newton en toepassingen daarvan.

353. Formule voor de n^{de} macht van een binomium. Onder een *binomium* of *tweeterm* verstaat men een som van twee termen. We beschouwen nu de n^{de} macht van zulk een tweeterm $a+b$. Deze kan men volgens de algemeene distributieve eigenschap der vermenigvuldiging (zie n°. 102) ontwikkelen, d. w. z. schrijven als een som van termen, waarvan ieder een product is van n factoren; uit ieder der n factoren $a+b$ treedt daarbij de term a of de term b als factor op. Men krijgt op deze wijze 2^n termen van de gedaante $a^{n-k}b^k$, waarin k een der getallen $0, 1, 2, \ldots, n$ is.

Verschillende dier termen zijn echter aan elkaar gelijk. Zoo ontstaat b.v. de term $a^{n-1}b$ in het geheel n-maal, daar de factor b aan ieder der n factoren $a+b$ van het volledige product kan worden ontleend; deze n gelijke termen schrijven we als één enkelen term, nl. $na^{n-1}b$.

Men vindt zoo:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} A_k a^{n-k} b^k. \tag{205}$$

Het getal A_k, dat gelijk is aan het aantal manieren, waarop een term $a^{n-k}b^k$ ontstaat, en dus uitsluitend van k en niet van de getallen a en b afhangt, wordt de ***coëfficiënt*** van den term $A_k a^{n-k} b^k$, of de *coëfficiënt van* $a^{n-k}b^k$, genoemd.

354. Om den coëfficiënt A_k te berekenen beschouwen we algemeener het product

$$(a+b_1)(a+b_2)\ldots.(a+b_n). \tag{206}$$

Bij de ontwikkeling daarvan krijgt men termen met $n-k$ factoren a en k factoren, die men op alle mogelijke wijzen uit de getallen $b_1, b_2, \ldots, b_n$ kiezen kan. Men krijgt dus a^{n-k}

vermenigvuldigd met de som der producten van alle k-tallen der getallen $b_1, b_2, \ldots, b_n$; het aantal termen dier som bedraagt C_n^k. Door vervolgens

$$b_1 = b_2 = \ldots = b_n = b$$

te stellen gaat de genoemde som van producten in

$$C_n^k b^k$$

over, waardoor een term

$$C_n^k a^{n-k} b^k$$

ontstaat. Het getal A_k der formule (205) van n⁰. 353 is dus C_n^k, zoodat men heeft:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k. \tag{207}$$

355. Volgens de formule (182) van n⁰. 331 kan voor (207) geschreven worden:

$$(a + b)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} a^{n-2} b^2 + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3} a^{n-3} b^3 + \ldots + \frac{n}{1} a b^{n-1} + b^n. \tag{208}$$

Deze formule wordt het ***binomium van Newton*** genoemd [1]). De daarin voorkomende coëfficiënten heeten ***binomiaalcoëfficiënten.*** Voor den binomiaalcoëfficiënt van $a^{n-k} b^k$ schrijft men $\binom{n}{k}$ of kortweg n_k. Men heeft dus:

$$\binom{n}{k} = n_k = C_n^k.$$

Voor $a = 1$ gaat (208) over in:

$$(1 + b)^n = 1 + nb + \ldots + b^n.$$

In $n > 1$, dan bestaat het tweede lid uit meer dan twee termen, waardoor men de eigenschap van n⁰. 126 terugvindt.

---

[1]) Isaac Newton (1643—1727) heeft in 1676 uitbreidingen der formule (208) (tot zoogenaamde gebroken en negatieve exponenten) medegedeeld en daarbij ook de uitdrukking voor de binomiaalcoëfficiënten als quotiënt van twee producten. Deze uitdrukking was echter reeds aan Pascal bekend (zie de noot van blz. 158), maar bij hem treedt de formule voor $(a + b)^n$ minder uitdrukkelijk op den voorgrond.

356. Lettend op de formule (179) van n⁰. 330 kan voor (207) ook geschreven worden:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} b^k. \tag{209}$$

Deze compacte vorm, waarin zoo het binomium van NEWTON gebracht is, wordt slechts mogelijk door de definities (167) en (169) van n⁰. 313 en 315. Om de formule ook voor $a = 0$ of $b = 0$ te laten doorgaan is dan verder de definitie (170) van n⁰. 317 noodig.

De formule (209) geldt ook voor $n = 0$. Het tweede lid, dat in het algemeen $n+1$ termen bevat, bestaat dan uit één enkelen term

$$\frac{0!}{0!\,0!} a^0 b^0,$$

die gelijk is aan 1, evenals het eerste lid.

357. De formule (180) van n⁰. 330 drukt uit, *dat de binomiaalcoëfficiënten van links naar rechts gelezen dezelfde zijn als van rechts naar links*, iets dat ook onmiddellijk daaruit blijkt, dat a en b bij de ontwikkeling van $(a+b)^n$ dezelfde rol spelen.

Verder volgt uit het in n⁰. 332 gevondene nog, *dat de binomiaalcoëfficiënten van n* (d. w. z. die, welke behooren bij de n^{de} macht van $a+b$) *beginnen met toe te nemen, een grootste waarde bereiken, om vervolgens weer af te nemen, hetzij direct (als n even is), hetzij na nog eens die grootste waarde te hebben aangenomen (als n oneven is).* Is n even, dan is één enkele binomiaalcoëfficiënt de grootste; is n oneven, dan zijn twee opvolgende binomiaalcoëfficiënten gelijk en grooter dan alle overige. Aan den grootsten binomiaalcoëfficiënt of de beide grootste binomiaalcoëfficiënten gaan evenveel binomiaalcoëfficiënten vooraf als er op volgen.

358. Betrekkingen tusschen binomiaalcoëfficiënten. Uit het binomium van NEWTON zijn verschillende betrekkingen tusschen binomiaalcoëfficiënten (of aantallen combinaties) af te leiden. Zoo vindt men uit de formule (207) door daarin $a = b = 1$ te nemen de formule (188) van n⁰. 335 terug.

Door in

$$(a+b)^{m+n} = (a+b)^m\,(a+b)^n \tag{210}$$

de drie machten van $a + b$ volgens het binomium van NEWTON te ontwikkelen en vervolgens de ontwikkelingen van $(a + b)^m$ en $(a + b)^n$ met elkaar te vermenigvuldigen, daarbij termen met dezelfde macht van a samennemend, zal men in beide leden dezelfde ontwikkeling in termen van den vorm $A_k a^{m+n-k} b^k$ verkrijgen. Immers hoe men het product

$$(a + b_1)(a + b_2)(a + b_3) \dots (a + b_{m+n})$$

ook ontwikkelt, steeds krijgt men alle mogelijke termen, die $m + n - k$ factoren a en b factoren uit de getallen $b_1, b_2, \dots, b_{m+n}$ bevatten, zoodat, na gelijkstelling der getallen b_1, b_2, enz., de coëfficiënt A_k steeds dezelfde waarde, nl. C^k_{m+n}, verkrijgt, hoe men de ontwikkeling ook uitvoert [1]).

Door nu de coëffiënten van $a^{m+n-k} b^k$ in beide leden van (210) gelijk te stellen vindt men:

$$C^k_{m+n} = C^0_m C^k_n + C^1_m C^{k-1}_n + C^2_m C^{k-2}_n + \dots + C^k_m C^0_n, \quad (211)$$

of:

$$C^k_{m+n} = \sum_{i=0}^{k} C^i_m C^{k-i}_n. \quad (211)$$

Hierin wordt $k \leqq m$ en $\leqq n$ ondersteld.

359. Is $k > m$ of $> n$, dan gaat de formule (211) door als men de termen, waarin een C voorkomt, waarvan de bovenste index grooter dan de onderste is, weglaat. Men kan ook zeggen, *dat de formule (211) zonder de aan het eind van n⁰. 358 gemaakte beperking doorgaat als men afspreekt, dat $C^p_n = 0$ is voor $p > n$.*

Deze afspraak is trouwens ook geheel met de beteekenis van C^p_n in overeenstemming, daar men uit n elementen geen enkele groep van meer dan n elementen vormen kan [2]).

Ook blijft bij de gemaakte afspraak de formule (183) van n⁰. 332 geldig als $p = n + 1$ is, iets waarvan men zich zonder moeite overtuigt. Verder wordt daardoor bereikt, dat de formule (186) van n⁰. 333 voor $p = n$ blijft doorgaan; evenzoo voor $p > n$, in welk geval het eerste lid en de beide termen van het tweede lid nul zijn.

---

[1]) In § 2 van Hoofdst. VI komen we hierop terug.
[2]) Zie verder n⁰. 630.

360. De formule (211) kan ook rechtstreeks door volledige inductie naar k worden aangetoond, waardoor het bewijs onafhankelijk wordt van de omstandigheid, dat $(a+b)^n$ slechts op één manier in een som van termen van den vorm $A_k a^{n-k} b^k$ te ontwikkelen is.

Voor $k=0$ is (211) juist. Om den stap van k op $k+1$ te doen leiden we uit (211), in verband met de formule (183) van n⁰. 332, af:

$$(m+n-k)C_{m+n}^k = \sum_{i=0}^{k} \left\{(m-i)C_m^i C_n^{k-i} + (n+i-k)C_m^i C_n^{k-i}\right\}{}^{1)} =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} (i+1)C_m^{i+1} C_n^{k-i} + \sum_{i=0}^{k} (k+1-i)C_m^i C_n^{k+1-i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k+1} iC_m^i C_n^{k+1-i}\,{}^{2)} + \sum_{i=0}^{k} (k+1-i)C_m^i C_n^{k+1-i} =$$

$$= \sum_{i=0}^{k+1} iC_m^i C_n^{k+1-i} + \sum_{i=0}^{k+1} (k+1-i)C_m^i C_n^{k+1-i} =$$

$$= (k+1)\sum_{i=0}^{k+1} C_m^i C_n^{k+1-i}.$$

Door ook op het eerste lid de formule (183) toe te passen vindt men verder:

$$(k+1)C_{m+n}^{k+1} = (k+1)\sum_{i=0}^{k+1} C_m^i C_n^{k+1-i},$$

$$C_{m+n}^{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} C_m^i C_n^{k+1-i},$$

Dit nu is de formule (211) als men daarin k door $k+1$ vervangt.

361. Ander bewijs der formule van n⁰. 358. Uitsluitend gebruik makend van de *beteekenis* van C_n^p [3]) kan de formule (211) aldus worden aangetoond. We vormen een rij elementen met twee indices, beginnend met a_{00}, waarbij ieder volgend element

---

[1]) De termen, waarvoor $i > m$ of $k - i > n$ is, moeten worden weggelaten.

[2]) Vergelijk noot 3 van blz. 149.

[3]) Dus niet van de door (179) of (182) daarvoor opgegeven uitdrukking.

uit het vorige ontstaat door een der beide indices met 1 te vermeerderen (zoodat dus op a_{ij} òf $a_{i+1,j}$ òf $a_{i,j+1}$ volgt); als voorbeeld geven we:

$$a_{00},\ a_{01},\ a_{02},\ a_{12},\ a_{13},\ a_{23},\ a_{33},\ a_{43},\ a_{53},\ a_{54},\ldots\ldots$$

We vragen nu naar *het aantal zoodanige rijen, die met* $a_{k,\,m+n-k}$ *eindigen.*

Zulk een rij bestaat uit $m+n+1$ elementen. In het geheel is $(m+n)$-maal een index verhoogd en wel k-maal de eerste en $(m+n-k)$-maal de tweede index. Daar men de k verhoogingen van den eersten index op C^k_{m+n} manieren uit de $m+n$ indexverhoogingen kan uitkiezen, *bedraagt het gevraagde aantal:*

$$C^k_{m+n}.$$

Nu komt in ieder der C^k_{m+n} rijen één en slechts één element voor, waarvan de indexsom m bedraagt. Is $a_{i,m-i}$ dit element, dan kan men (blijkens het boven gevondene) de daaraan voorafgaande elementen op C^i_m en de daarop volgende elementen op C^{k-i}_n manieren kiezen; van $a_{i,m-i}$ tot $a_{k,m+n-k}$ heeft men nl. n indexverhoogingen, waaronder $k-i$ verhoogingen van den eersten index. Onder de C^k_{m+n} rijen zijn er dus

$$C^i_m C^{k-i}_n,$$

die het element $a_{i,\,m-i}$ bevatten. Daar men aan i ieder der waarden $0, 1, 2, \ldots, k$ geven kan [1]), krijgt men zoo de formule (211).

362. Men kan het betoog van n⁰. 361 meer meetkundig inkleeden door de daar beschouwde elementen voor te stellen door in verticale en horizontale lijnen gerangschikte stippen, waarvan het geheel een rechthoek vormt met $k+1$ rijen en $m+n+1-k$ kolommen; het element a_{ij} is dan de stip uit de $i+1^{\text{ste}}$ rij en de $j+1^{\text{ste}}$ kolom. Gevraagd wordt nu *het aantal zigzaglijnen, waardoor men twee overstaande hoekpunten van den rechthoek, links-boven en rechts-onder, met elkaar kan verbinden*; hierbij is onder een zigzaglijn een gebroken lijn te verstaan, die telkens van een stip naar de daaronder of naar de

---

[1]) Zie het in n⁰. 359 opgemerkte.

rechts daarvan geplaatste stip loopt, zooals nevenstaand figuurtje aangeeft.

Het gevraagde aantal bedraagt C_{m+n}^{k}, daar ieder der zigzaglijnen uit $m+n$ lijnsegmenten [1]) bestaat, waaronder k, die naar beneden loopen.

Van ieder der zigzaglijnen bevindt zich het uiteinde van het m^{de} lijnsegment op een lijn, die onder een hoek van 45° van rechts-boven naar links-onder verloopt. In de figuur (waar $m=8$, $n=5$ en $k=6$ genomen is) zijn de zich op die schuine lijn bevindende stippen zwaarder geteekend. Het aantal zigzaglijnen, die over een bepaalde dezer stippen loopen, wordt gevonden als het product van het aantal zigzaglijnen, waardoor die stip met het beginpunt, en het aantal zigzaglijnen, waardoor die stip met het eindpunt der zigzaglijnen kan worden verbonden; het aantal zigzaglijnen loopende over de stip uit de $i+1^{\text{ste}}$ rij en de $m+1-i^{\text{de}}$ kolom bedraagt dus $C_m^i C_n^{k-i}$, waaruit men door sommeering over de verschillende waarden van i het getal C_{m+n}^{k} verkrijgt.

363. Driehoek van Pascal. Zonder van de beschouwingen van n°. 354 gebruik te maken kan men de binomiaalcoëfficiënten bepalen door achtereenvolgens

$$(a+b)^2,\ (a+b)^3,\ (a+b)^4,\ (a+b)^5,\ \ldots.$$

te ontwikkelen, waarbij men steeds de reeds gevonden ontwikkeling met $a+b$ te vermenigvuldigen heeft en dit product volgens de distributieve eigenschap uit te werken. Daarbij ontstaan de coëfficiënten van iedere ontwikkeling door van de coëfficiënten der voorafgaande ontwikkeling telkens twee opvolgende op te tellen. Het volgende voorbeeld diene om dit duidelijk te maken:

$$\begin{array}{rcccccc}
(a+b)^4 = & a^4 + & 4a^3b + & 6a^2b^2 + & 4ab^3 + & b^4 & \\
 & & & & & a+b & \\
\hline
 & a^5 + & 4a^4b + & 6a^3b^2 + & 4a^2b^3 + & ab^4 & \\
 & & a^4b + & 4a^3b^2 + & 6a^2b^3 + & 4ab^4 + & b^5 \\
\hline
(a+b)^5 = & a^5 + & 5a^4b + & 10a^3b^2 + & 10a^2b^3 + & 5ab^4 + & b^5.
\end{array}$$

---

[1]) D. w. z. lijntjes, die van een stip naar de daaronder of de rechts daarvan geplaatste stip loopen.

Daar het alleen om de coëfficiënten te doen is, kan de berekening tot het volgende schema teruggebracht worden:

								1								
							1		1							
						1		2		1						
					1		3		3		1					
				1		4		6		4		1				
			1		5		10		10		5		1			
		1		6		15		20		15		6		1		
	1		7		21		35		35		21		7		1	
1		8		28		56		70		56		28		8		1

enz.

Dit schema, waarbij de van 1 verschillende getallen gevonden worden door de beide daar schuins-links en -rechts boven staande getallen op te tellen, wordt de ***driehoek van Pascal*** genoemd [1]). De binomiaalcoëfficiënten van n zijn de getallen in de $n+1^{\text{ste}}$ rij van het schema.

---

[1]) Blaise Pascal (1623—1662) geeft in zijn „Traité du triangle arithmétique" van 1662 het schema in den volgenden vorm:

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	3	6	10	15	21	28	36		
1	4	10	20	35	56	84			
1	5	15	35	70	126				
1	6	21	56	126					
1	7	28	84						
1	8	36							
1	9								
1									

Voor het j^{de} getal der k^{de} rij geeft Pascal de uitdrukking $\dfrac{k(k+1)\ldots\ldots(k+j-2)}{1.2\ldots\ldots(j-1)}$, zoodat hij de formule (208) van n⁰. 355 kende, zij het ook dat hij deze niet uitdrukkelijk heeft uitgesproken.

We merken verder nog op, dat men een soortgelijke groepeering der binomiaalcoëfficiënten als in den driehoek van Pascal reeds bij Michael Stifel (1486—1567) in zijn „Arithmetica integra" van 1544 aantreft.

Ook in een Chineesch geschrift van Tschu schi kih uit het jaar 1303 treft men de berekening der binomiaalcoëfficiënten (tot en met de 8ste macht) uit den driehoek van Pascal aan.

364. Uit den driehoek van PASCAL kan men ook de formule voor een willekeurigen binomiaalcoëfficiënt n_p, den coëfficiënt van $a^{n-p}b^p$ in de ontwikkeling van $(a+b)^n$, afleiden; hierin is n_p dus het $p+1^{ste}$ getal van de $n+1^{ste}$ rij van het schema.

Men kan nl. den driehoek van PASCAL vormen door te beginnen met het getal 1 in den top van den driehoek, dit getal links- en rechts-onder over te schrijven, vervolgens deze getallen 1 weer links- en rechts-onder over te schrijven, enz., waarbij dan meerdere getallen 1 in een zelfde vakje komen te staan, aldus:

1

1 1

1 1,1 1

1 1,1,1 1,1,1 1

Door de getallen 1 uit een zelfde vakje op te tellen ontstaat de driehoek van PASCAL.

Wanneer men ieder getal 1 uit bovenstaand schema door een lijntje verbindt met het getal 1, waaruit het door overschrijven ontstaan is, verkrijgt men een zigzaglijn, die in het getal 1 in den top van den driehoek begint en uit schuin naar beneden (naar links of naar rechts) loopende lijnsegmentjes bestaat. Ieder getal 1 uit het schema behoort dus bij zulk een zigzaglijn, terwijl omgekeerd ook iedere zigzaglijn van de genoemde soort voorkomt.

Hieruit blijkt, *dat ieder getal uit het schema gelijk is aan het aantal zigzaglijnen van de beschouwde soort, waarmede het met het getal 1 in den top van den driehoek kan worden verbonden.*

Dit aantal nu is voor het getal n_p gelijk aan C_n^p. De zigzaglijnen, die van het bovenste getal 1 (of 0_0) naar n_p loopen, bestaan nl. uit n lijnsegmenten, waarvan er (van boven naar beneden gaande) p naar rechts en $n-p$ naar links loopen. Nummert men die n lijnsegmentjes (weer van boven naar beneden), dan kan men de rangnummers der p naar rechts loopende willekeurig uit de getallen 1, 2, 3, ..., n kiezen, hetgeen op C_n^p manieren geschieden kan.

365. Formule voor de macht van een polynomium. Onder een ***polynomium*** of ***veelterm*** verstaat men een som van een willekeurig aantal termen, dus een uitdrukking van den vorm:

$$a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_m. \tag{212}$$

We zullen nu de n^{de} macht van dezen m-term ontwikkelen op soortgelijke wijze als dit in n⁰. 353—356 voor de n^{de} macht van $a + b$ geschied is. Daar men bij het uitwerken een som van termen verkrijgt, waarvan ieder een product is van n factoren (waarbij uit ieder der n gelijke factoren (212) een term als factor optreedt), en dezelfde term meermalen optreedt, is reeds aanstonds te zien, dat men door volledige ontwikkeling en rangschikking geraakt tot een *som van termen van den vorm:*

$$A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\ldots\alpha_m} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots\ldots a_m^{\alpha_m}.$$

Hierin kunnen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_m$ *alle mogelijke waarden* (*nul inbegrepen*) *aannemen, waarvoor aan*

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots\ldots + \alpha_m = n \tag{213}$$

voldaan is. De coëfficiënt $A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\ldots\alpha_m}$ hangt uitsluitend van de exponenten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_m$ en niet van de getallen $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_m$ af.

366. De in n⁰. 365 besproken ontwikkeling kan worden verkregen door herhaalde (m — 1-malige) toepassing van het binomium van Newton, dat we in den eenvoudigsten vorm (209) geschreven denken (zie n⁰. 356). Men vindt zoo eerst $(a_1 + a_2 + a_3)^n$ door dit te ontwikkelen als

$$\{(a_1 + a_2) + a_3\}^n,$$

vervolgens $(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^n$ door dit te ontwikkelen als

$$\{(a_1 + a_2 + a_3) + a_4\}^n,$$

enz., waarna dan in het eerste geval de machten van $a_1 + a_2$ en in het tweede geval de machten van $a_1 + a_2 + a_3$ verder ontwikkeld moeten worden [1]). Op deze wijze komt de volgende coëfficiënt van den algemeenen term der ontwikkeling van $(a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_m)^n$ voor den dag:

$$A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\ldots\alpha_m} = \frac{n!}{\alpha_1!\ \alpha_2!\ \ldots\ldots\ \alpha_m!}, \tag{214}$$

waarin natuurlijk weer $0! = 1$ te nemen is (zie n⁰. 313).

---

[1]) We laten deze ontwikkelingen hier weg, daar ze in n⁰. 368 bij het bewijs van m op $m + 1$ in meer algemeenen vorm gegeven worden.

Men vindt zoo:

$$(a_1+a_2+\ldots.+a_m)^n=\sum\frac{n!}{\alpha_1!\;\alpha_2!\;\ldots.\;\alpha_m!}a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}\ldots.a_m^{\alpha_m},\qquad(215)$$

waarbij men onder het Σ-teeken alle termen van den aangegeven vorm opnemen moet, waarvoor aan de betrekking (213) voldaan is.

367. De formule (215) is blijkbaar juist voor $n=1$. Aan (213) is dan nl. alleen te voldoen door een der getallen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots., \alpha_m$ gelijk aan 1 te nemen en de overige nul. Door b.v. $\alpha_1 = 1$ te nemen (dus $\alpha_2 = \alpha_3 \;\ldots. = \alpha_m = 0$) gaat de term onder het Σ-teeken in a_1 over.

Ook geldt (215) voor $n = 0$ (vergelijk n⁰. 356). Dan is aan (213) alleen voldaan door

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots. = \alpha_m = 0,$$

zoodat de som in het tweede lid van (215) slechts uit één term bestaat, nl.:

$$\frac{0!}{(0!)^m}\,a_1^0 a_2^0 \ldots.\, a_m^0.$$

Deze term is 1, dus naar behooren gelijk aan het eerste lid.

368. De in n⁰. 366 aangeduide afleiding der formule (215) komt neer op voortdurende vergrooting van het aantal termen van het grondtal (212), dus op volledige inductie naar m (zie n⁰. 62 en 63). Het bewijs loopt nu aldus.

Neemt men de juistheid van (215) voor de n^{de} macht van een m-term aan, dan vindt men de n^{de} macht van een $(m+1)$-term aldus:

$$(a_1+a_2+\ldots.+a_{m+1})^n=\{(a_1+a_2+\ldots.+a_m)+a_{m+1}\}^n=$$

$$=\sum_{\alpha_{m+1}=0}^{n}\frac{n!}{(n-\alpha_{m+1})!\;\alpha_{m+1}!}(a_1+a_2+\ldots.+a_m)^{n-\alpha_{m+1}}a_{m+1}^{\alpha_{m+1}}\;{}^{1)}=$$

$$=\sum_{\alpha_{m+1}=0}^{n}\left[\frac{n!}{(n-\alpha_{m+1})!\;\alpha_{m+1}!}a_{m+1}^{\alpha_{m+1}}\sum\frac{(n-\alpha_{m+1})!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots.\alpha_m!}a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}\ldots a_m^{\alpha_m}\right].$$

Bij het tweede (rechts staande) Σ-teeken is α_{m+1} standvastig

---

[1]) Volgens den in (209) aan het binomium van Newton gegeven vorm.

(d. w. z. voor alle termen onder dit Σ-teeken dezelfde), terwijl aan $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ al die waarden moeten worden toegekend, waarvoor aan

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m = n - \alpha_{m+1},$$

dus aan

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{m+1} = n \tag{216}$$

voldaan is. Door den factor, die voor het tweede Σ-teeken staat, onder dit Σ-teeken te brengen (d. w. z. daarachter te plaatsen) [1]) vindt men:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_{m+1})^n = \sum_{\alpha_{m+1}=0}^{n} \sum \frac{n!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_{m+1}!} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_{m+1}^{\alpha_{m+1}}.$$

Hiervoor kan ook geschreven worden:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_{m+1})^n = \sum \frac{n!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_{m+1}!} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_{m+1}^{\alpha_{m+1}},$$

waarbij de sommeering over alle waarden van $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m+1}$ moet worden uitgestrekt, waarvoor aan (216) voldaan is. Hiermede is dan de formule (215) voor een $(m+1)$-term verkregen.

Daar nu (215) juist is voor $m = 2$ (daar ze dan niets anders is dan de formule (209) van n°. 356), is hiermede het bewijs geleverd.

Ook kan men als uitgangspunt $m = 1$ nemen, voor welk geval de formule (215) een tautologie is.

369. Tweede bewijs der formule voor de macht van een polynomium. Een zeer eenvoudig bewijs voor de formule (215) van n°. 366 verkrijgt men door het eerste lid te ontwikkelen zonder de commutatieve eigenschap der vermenigvuldiging toe te passen en alleen gebruik te maken van de beide distributieve eigenschappen (54) en (55) van n°. 99. Van een samenvoegen van gelijke termen is dan geen sprake. Zoo vindt men b.v.:

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^3 =$$

$$\begin{aligned} = a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + a_4^3 &+ a_1^2a_2 + a_1a_2a_1 + a_2a_1^2 + a_1a_2^2 + a_2a_1a_2 + a_2^2a_1 + \\ &+ a_1^2a_3 + a_1a_3a_1 + a_3a_1^2 + a_1a_3^2 + a_3a_1a_3 + a_3^2a_1 + \\ &+ a_1^2a_4 + a_1a_4a_1 + a_4a_1^2 + a_1a_4^2 + a_4a_1a_4 + a_4^2a_1 + \\ &+ a_2^2a_3 + a_2a_3a_2 + a_3a_2^2 + a_2a_3^2 + a_3a_2a_3 + a_3^2a_2 + \end{aligned}$$

---

[1]) Dit komt neer op toepassing van de distributieve eigenschap der vermenigvuldiging; zie noot 1 van blz. 149.

$$+a_2{}^2a_4+a_2a_4a_2+a_4a_2{}^2+a_2a_4{}^2+a_4a_2a_4+a_4{}^2a_2+$$
$$+a_3{}^2a_4+a_3a_4a_3+a_4a_3{}^2+a_3a_4{}^2+a_4a_3a_4+a_4{}^2a_3+$$
$$+a_1a_2a_3+a_1a_3a_2+a_2a_1a_3+a_2a_3a_1+a_3a_1a_2+a_3a_2a_1+$$
$$+a_1a_2a_4+a_1a_4a_2+a_2a_1a_4+a_2a_4a_1+a_4a_1a_2+a_4a_2a_1+$$
$$+a_1a_3a_4+a_1a_4a_3+a_3a_1a_4+a_3a_4a_1+a_4a_1a_3+a_4a_3a_1+$$
$$+a_2a_3a_4+a_2a_4a_3+a_3a_2a_4+a_3a_4a_2+a_4a_2a_3+a_4a_3a_2.$$

Op deze wijze ontstaan groepen van termen (zooals b.v. $a_1^2a_2$, $a_1a_2a_1$, $a_2a_1^2$), die tengevolge van de commutatieve eigenschap gelijk zijn. Het gaat er dus nog slechts om na te gaan hoeveel termen tot de verschillende groepen behooren; het aantal termen van zulk een groep wordt dan na toepassing der commutatieve eigenschap van de vermenigvuldiging een coëfficiënt.

Om dus den coëfficiënt van $a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}\ldots a_m^{\alpha_m}$ in de ontwikkeling van het eerste lid van (215) te bepalen heeft men slechts na te gaan in hoeveel vormen die term tengevolge van de commutatieve eigenschap te schrijven is, dus op hoeveel manieren men de n factoren, waarvan er α_1 gelijk zijn aan a_1, α_2 aan a_2 enz., rangschikken kan. Dit is echter niets anders dan de in n⁰. 340 gestelde vraag, waarop in n⁰. 341 het antwoord gegeven is. Voor het aantal rangschikkingen, dus voor den coëfficiënt van $a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}\ldots a_m^{\alpha_m}$, vindt men derhalve de uitdrukking in het tweede lid van (214).

Bij dit bewijs behoeft het binomium van Newton niet eerst te worden aangetoond, maar komt dit als een bijzonder geval ($m=2$) der algemeene formule voor den dag.

370. Derde bewijs der formule voor de macht van een polynomium. Men kan de formule (215) ook *geheel onafhankelijk van de theorie der permutaties en combinaties*, door volledige inductie naar den exponent n aantoonen. Ook daarbij behoeft het binomium van Newton niet eerst bewezen te worden.

Men krijgt zoo wel het meest rechtstreeksche bewijs dier formule. Een nadeel van dit bewijs kan geacht worden, dat het de uitdrukking in het tweede lid van (215) niet van zelf doet ontstaan, maar daarbij die uitdrukking zonder voorafgaande motiveering wordt neergeschreven. Aan de bewijskracht doet dit echter niets af.

371. Om nu het in n⁰. 370 bedoelde bewijs te leveren beginnen we met op te merken, dat (215) juist is voor $n = 1$ (zie n⁰. 367)[1]. Aangetoond moet dus nog worden, dat ze juist is voor den exponent $n + 1$ als ze dat voor den exponent n is.

We kunnen dus de formule (215) aannemen en hebben daaruit de formule af te leiden, die uit (215) ontstaat door daarin n door $n + 1$ te vervangen. Daartoe vermenigvuldigen we beide leden van (215) met $a_1 + a_2 + \dots + a_m$. Het eerste lid gaat dan in $(a_1 + a_2 + \dots + a_m)^{n+1}$ over, het tweede lid in een som van termen van den vorm:

$$B_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_m} a_1^{\beta_1} a_2^{\beta_2} \dots a_m^{\beta_m}, \tag{217}$$

waarin:

$$\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_m = n + 1 \tag{218}$$

is. Nu ontstaat de term (217) uit evenveel termen van de som in het tweede lid van (215) als het aantal van nul verschillende der exponenten $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ bedraagt. Is b.v. $\beta_1 > 0$, dan levert de term

$$\frac{n!}{(\beta_1 - 1)!\, \beta_2!\, \beta_3! \dots \beta_m!} a_1^{\beta_1 - 1} a_2^{\beta_2} a_3^{\beta_3} \dots a_m^{\beta_m}$$

door vermenigvuldiging met a_1 een bijdrage tot (217), nl.:

$$\frac{n!\, \beta_1}{\beta_1!\, \beta_2! \dots \beta_m!} a_1^{\beta_1} a_1^{\beta_2} \dots a_m^{\beta_m}.$$

Men vindt dus:

$$B_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_m} = \sum \frac{n!\, \beta_i}{\beta_1!\, \beta_2! \dots \beta_m!} = \frac{n!}{\beta_1!\, \beta_2! \dots \beta_m!} \sum \beta_i, \tag{219}$$

waarbij de sommeering over die waarden van i moet worden uitgestrekt, waarvoor $\beta_i > 0$ is. Men kan dan echter even goed de sommeering over de waarden $1, 2, \dots, m$ van i uitstrekken, daar de termen, die daardoor mogelijkerwijze aan de som worden toegevoegd, toch nul zijn. Volgens (218) gaat (219) dan verder over in:

$$B_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_m} = \frac{(n+1)!}{\beta_1!\, \beta_2! \dots \beta_m!}.$$

Hieruit blijkt, dat door vermenigvuldiging van beide leden van

---

[1]) Ook zou men als uitgangspunt kunnen nemen het geval $n = 0$, waarvoor de formule ook reeds geldig is (zie n⁰. 367).

(215) met $a_1 + a_2 + \ldots + a_m$ de formule ontstaat, waarin (215) overgaat als men n door $n+1$ vervangt; hiermede is de stap van n op $n+1$ verricht.

---

372. Aantal termen in de ontwikkeling van de macht van een polynomium. Wanneer men in het tweede lid van (215) (zie n^0. 366) de gelijke termen niet tot één enkelen term (voorzien van een coëfficiënt) vereenigt krijgt men m^n termen. Door vereeniging van gelijke termen wordt het aantal termen kleiner. Dit aantal is gelijk aan dat der herhalingscombinaties van m elementen (nl. $a_1, a_2, \ldots, a_m$) in groepen van n (zie n^0. 336 en 337), daar in ieder der termen n dier m elementen voorkomen, die daarbij willekeurig vaak herhaald mogen worden. *Het aantal termen bedraagt dus* $\overline{C}_m^n$, dus:

$$C_{m+n-1}^n = \frac{(m+n-1)!}{n!\,(m-1)!} = \frac{(n+1)(n+2)\ldots(m+n-1)}{(m-1)!}. \quad (220)$$

In verband met het in n^0. 366 gevondene beteekent dit, *dat aan de betrekking (213) van n^0. 365 op C_{m+n-1}^n manieren door aantallen kan worden voldaan,* hetgeen men ook uitdrukt door te zeggen, *dat de vergelijking (213) (waarin $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ de onbekenden zijn) C_{m+n-1}^n oplossingen heeft.* We laten het aan den lezer over dit rechtstreeks door volledige inductie naar $m+n$ aan te toonen (vergelijk n^0. 339).

373. Men kan de termen van het tweede lid van (215) in groepen verdeelen zoodanig, dat de termen van een zelfde groep uit een er van ontstaan door de exponenten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ op andere wijze over de getallen $a_1, a_2, \ldots, a_m$ te verdeelen. Het aantal termen van zulk een groep bedraagt $m!$ als de exponenten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ alle verschillend zijn. Komen onder die exponenten echter i gelijke voor, terwijl de overige exponenten alle verschillen, dan wordt het aantal termen der groep $\frac{m!}{i!}$; komen er i gelijke en j gelijke onder voor, terwijl de overige exponenten verschillend

zijn, dan bevat de groep $\frac{m!}{i!\,j!}$ termen, enz. (zie n°. 340 en 341).

Zoo krijgt men b.v. bij de ontwlkkeling van

$$(a + b + c + d)^8$$

(waarbij $m = 4$ en $n = 8$ is) in het geheel

$$\frac{11!}{8!\;3!} = \frac{9\;.\;10\;.\;11}{1\;.\;2\;.\;3} = 165$$

termen. Hieronder komen voor:

$\frac{4!}{3!}$ = 4 termen van den vorm a^8 [1]) (coëfficiënt $\frac{8!}{8!}$ = 1),

$\frac{4!}{2!}$ = 12 termen van den vorm a^7b [2]) (coëfficiënt $\frac{8!}{7!}$ = 8),

$\frac{4}{2!}$ = 12 termen van den vorm a^6b^2 (coëfficiënt $\frac{8!}{6!\,2!}$ = 28),

$\frac{4!}{2!}$ = 12 termen van den vorm a^6bc (coëfficiënt $\frac{8!}{6!}$ = 56),

$\frac{4!}{2!}$ = 12 termen van den vorm a^5b^3 (coëfficiënt $\frac{8!}{5!\,3!}$ = 56),

$4!$ = 24 termen van den vorm a^5b^2c (coëfficiënt $\frac{8!}{5!\,2!}$ = 168),

$\frac{4!}{3!}$ = 4 termen van den vorm a^5bcd (coëfficiënt $\frac{8!}{5!}$ = 336),

$\frac{4!}{2!\,2!}$ = 6 termen van den vorm a^4b^4 (coëfficiënt $\frac{8!}{4!\,4!}$ = 70),

$4!$ = 24 termen van den vorm a^4b^3c (coëfficiënt $\frac{3!}{4!\,3!}$ = 280),

$\frac{4!}{2!}$ = 12 termen van den vorm $a^4b^2c^2$ (coëfficiënt $\frac{8!}{4!\,2!\,2!}$ = 420),

$\frac{4!}{2!}$ = 12 termen van den vorm a^4b^2cd (coëfficiënt $\frac{8!}{4!\,2!}$ = 840),

$\frac{4!}{2!}$ = 12 termen van den vorm $a^3b^3c^2$ (coëfficiënt $\frac{8!}{3!\,3!\,2!}$ = 560),

$\frac{4!}{2!\,2!}$ = 6 termen van den vorm a^3b^3cd (coëfficiënt $\frac{8!}{3!\,3!}$ = 1120

---

[1]) Hiermede zijn bedoeld de termen a^8, b^8, c^8 en d^8.

[2]) Hiermede zijn bedoeld de termen a^7b, ab^7, a^7c, ac^7, enz.

$\frac{4!}{2!}$ = 12 termen van den vorm $a^3b^2c^2d$ (coëfficiënt $\frac{8!}{3!\,2!\,2!}$ = 1680),

$\frac{4!}{4!}$ = 1 term van den vorm $a^2b^2c^2d^2$ (coëfficiënt $\frac{8!}{2!\,2!\,2!\,2!}$ = 2520).

374. In het voorbeeld van n⁰. 373 vervallen de 165 termen in 15 groepen, waarbij de termen van een zelfde groep door verwisseling der letters a, b, c, d uit elkaar ontstaan.

Het aantal der groepen is gelijk aan het *aantal manieren, waarop het getal 8 als som van 4 getallen (die ook nul en onderling gelijk mogen zijn) geschreven kan worden.* Algemeener is het *aantal groepen, waaruit de termen van het tweede lid der formule (215) van n⁰. 366 bestaan*, gelijk aan het *aantal manieren, waarop het getal n als som van m getallen geschreven kan worden.*

375. Verdeelingsprobleem. Is $m \geqq n$, dan kan n niet als een som van meer dan m natuurlijke getallen geschreven worden. Het in n⁰. 374 beschouwde aantal is dan dus hetzelfde als het *aantal manieren, waarop het getal n als som van natuurlijke getallen (onverschillig hoeveel) te schrijven is.*

Stellen we dit aantal door V_n (verdeelingsgetal van n) voor, dan is:

$V_1 = 1, \quad V_2 = 2, \quad V_3 = 3, \quad V_4 = 5, \quad V_5 = 7, \quad V_6 = 11,$
$V_7 = 15, \quad V_8 = 22, \quad V_9 = 30, \quad V_{10} = 42.$

Zoo zijn b.v. de 22 manieren, waarop het getal 8 als een som van natuurlijke getallen te schrijven is:

$$8=7+1=6+2=6+1+1=5+3=5+2+1=5+1+1+1=4+4=$$
$$=4+3+1=4+2+2=4+2+1+1=4+1+1+1+1=3+3+2=$$
$$=3+3+1+1=3+2+2+1=3+2+1+1+1=3+1+1+1+1+1=$$
$$=2+2+2+2=2+2+2+1+1=2+2+1+1+1+1=$$
$$=2+1+1+1+1+1+1=1+1+1+1+1+1+1+1.$$

376. Bij de vraag naar de splitsingen van het getal n in een som van termen kunnen die termen ieder der getallen 1, 2, 3, ..., n zijn. Er is dus een zeker aantal termen 1, een zeker aantal termen 2, enz. Is x_k het aantal termen k (welk aantal natuurlijk ook nul kan zijn), dan is dus:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + nx_n = n. \qquad (221)$$

Het in n⁰. 375 beschouwde verdeelingsgetal V_n is dus ook op te vatten als het *aantal oplossingen der vergelijking* (*221*), d. w. z. het aantal manieren, waarop aan die vergelijking kan worden voldaan door aan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (de onbekenden) bepaalde waarden toe te kennen.

Voor $n = 6$ zijn de 11 oplossingen in het volgende tafeltje opgegeven:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0
2	0	0	1	0	0
0	0	2	0	0	0
1	1	1	0	0	0
3	0	1	0	0	0
0	3	0	0	0	0
2	2	0	0	0	0
4	1	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0

377. De vergelijking (221) is een bijzonder geval van

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = b, \qquad (222)$$

waarin $c_1, c_2, \ldots, c_n$ en b gegeven natuurlijke getallen voorstellen, terwijl $x_1, x_2, \ldots, x_n$ onbekende aantallen zijn. De vraag naar het aantal oplossingen van vergelijkingen van deze soort wordt het ***verdeelings-*** of ***partitieprobleem*** genoemd.

Zijn de getallen $c_1, c_2, \ldots, c_n$ alle 1, dan is het aantal oplossingen niets anders dan het aantal termen in de ontwikkeling van $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^b$ (zie n⁰. 365), dus gelijk aan C^b_{n+b-1} (zie n⁰. 372).

Het is hier niet de plaats om op het zeer interessante en moeilijke partitieprobleem verder in te gaan [1]. We volstaan met op te merken, dat men de vraag op allerlei manieren wijzigen kan, waarbij vooral van belang is het geval, dat men de vergelijking (222) door

[1]) Zie overigens n⁰. 695.

$$c_1x_1^2 + c_2x_2^2 + \ldots + c_nx_n^2 = b$$

vervangt.

378. Geheele rationale functie van *x*. Onder een ***geheele rationale** functie van x*, ook wel ***veelterm in** x* genoemd, verstaat men een uitdrukking van den vorm

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_mx^m, \qquad (223)$$

of korter geschreven:

$$\sum_{k=0}^{m} a_kx^k.$$

Hierin zijn a_0, a_1, ..., a_m gegeven getallen, die de ***coëfficiënten*** van den veelterm genoemd worden, terwijl men aan x verschillende waarden kan toekennen. Men drukt dit uit door te zeggen, dat x ***veranderlijk*** is. Om aan te geven, dat men x willekeurig kan aannemen, noemt men x ook wel de ***onafhankelijk veranderlijke.***

Het getal m wordt de ***graad*** der geheele rationale functie (223) genoemd. Ondersteld wordt daarbij, *dat a_m niet 0 is,* daar anders de term a_mx^m voor ieder getal x nul is en dus kan worden weggelaten; de graad van den veelterm is dan $< m$. De graad kan dus gedefiniëerd worden als *de grootste exponent behoorend bij een van nul verschillenden coëfficiënt.*

We merken nog op, dat een geheele rationale functie ook ***lineair*** genoemd wordt *als haar graad 1 is,* ***kwadratisch*** *als haar graad 2 is,* ***kubisch*** *als haar graad 3 is* en ***bikwadratisch*** *als haar graad 4 is.*

379. De uitdrukking (223) stelt een getal y voor, dat bekend is zoodra x bekend is, dus een getal, dat van y afhangt. Men noemt y daarom de ***afhankelijk veranderlijke.***

Dat het getal y door het getal x bepaald is, wordt ook uitgedrukt door te zeggen, *dat y een* ***functie*** *van x is.* Deze uitdrukking bezigt men ook als y op geheel andere wijze van x afhangt (b.v. $y = 2^x$). De geheele rationale functie is dan ook een zeer bijzonder geval van een functie van x.

Een in nog hoogere mate bijzonder geval van een functie van x heeft men *als bij iedere waarde van x dezelfde waarde van*

y behoort. Men noemt de functie van x dan een ***constante.*** Met de benaming „afhankelijk veranderlijke" is dus slechts bedoeld, dat y *in het algemeen* voor verschillende waarden vatbaar is, m. a. w. *dat y niet noodzakelijk steeds dezelfde waarde behoeft te hebben*, echter wel *kan* hebben.

Een van nul verschillende constante is als een geheele rationale functie van x van den nulden graad te beschouwen. Immers de uitdrukking (223), waarin $a_m \neq 0$ is, gaat voor $m = 0$ over in a_0, waarin $a_0 \neq 0$ is.

380. Ontwikkeling van de n^{de} macht van een geheele rationale functie. We beschouwen de n^{de} macht van den veelterm (223), dus

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_mx^m)^n. \tag{224}$$

Deze kan volgens de formule (215) van n°. 366 ontwikkeld worden. In verband met de formules (67), (70) en (71) van n°. 119, 122 en 123 vindt men zoo:

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_mx^m)^n =$$

$$= \sum \frac{n!}{\alpha_0!\, \alpha_1!\, \alpha_2! \ldots \alpha_m!}\, a_0^{\alpha_0} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_m^{\alpha_m} x^{\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \ldots + m\alpha_m}. \tag{225}$$

Hierbij moet de sommeering worden uitgestrekt over alle waarden der exponenten, die aan

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m = n \tag{226}$$

voldoen.

381. Uit (225) ziet men, *dat de n^{de} macht van een geheele rationale functie, die van den graad m is, een geheele rationale functie van den graad mn is.* De grootste waarde, die de exponent

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \ldots + m\alpha_m \tag{227}$$

kan aannemen, wordt nl. verkregen door in (226) $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{m-1} = 0$ en $\alpha_m = n$ te nemen. De eenige term van den graad mn is dus:

$$a_m^n x^{mn};$$

hiervan is de coëfficiënt niet nul, terwijl termen van hoogeren graad niet voorkomen.

382. Men kan het laatste lid van (225) naar opklimmende

machten van x rangschikken, d. w. z. alle termen samennemen, die dezelfde macht van x bevatten. Men vindt dan:

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_mx^m)^n =$$
$$= A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_{mn}x^{mn}. \qquad (228)$$

De hierin voorkomende coëfficiënten A_0, A_1, A_2, ..., A_{mn} hangen van de coëfficiënten a_0, a_1, a_2, ..., a_m der oorspronkelijke geheele rationale functie af. Zoo is b.v.:

$$A_0 = a_0^n,$$
$$A_1 = na_0^{n-1}a_1,$$
$$A_2 = na_0^{n-1}a_2 + \frac{n(n-1)}{2}a_0^{n-2}a_1^2,$$
$$A_3 = na_0^{n-1}a_3 + n(n-1)a_0^{n-2}a_1a_2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}a_0^{n-3}a_1^3,$$
$$A_4 = na_0^{n-1}a_4 + n(n-1)a_0^{n-2}a_1a_3 + \frac{n(n-1)}{2}a_0^{n-2}a_2^2 +$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{2}a_0^{n-3}a_1^2a_2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}a_0^{n-4}a_1^4,$$
$$A_5 = na_0^{n-1}a_5 + n(n-1)\,a_0^{n-2}(a_1a_4 + a_2a_3) +$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{2}a_0^{n-3}(a_1^2a_3+a_1a_2^2)+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{6}a_0^{n-4}a_1^3a_2+$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{120}a_0^{n-5}a_1^5.$$

Bij deze opgave van den coëfficiënt A_5 is ondersteld, dat $n > 3$ is. Is dit niet het geval, dan moeten in de uitdrukking voor A_5 die termen worden weggelaten, waarin aftrekkingen voorkomen, die niet mogelijk zijn. Zoo is b.v. voor $n = 3$:

$$A_5 = 3a_0^2a_5 + 6a_0(a_1a_4 + a_2a_3) + 3(a_1^2a_3 + a_1a_2^2);$$

de volgende term wordt nul wegens den factor $n - 3$, die nu nul is, terwijl de daarop volgende term wordt weggelaten omdat daarin een onmogelijke aftrekking (nl. 3 — 4) voorkomt.

Bij de formule voor A_5 is de onderstelling $m > 4$ niet bepaald noodig, daar men, als b.v. $m = 4$ is, slechts a_5 als gelijk aan nul te beschouwen heeft.

Natuurlijk gelden soortgelijke opmerkingen ook voor de overige coëfficiënten van het tweede lid van (228).

383. De in (228) voorkomende coëfficiënt A_k wordt verkregen

door uit het tweede lid van (225) de termen te nemen, waarvoor aan

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \ldots . + m\alpha_m = k \qquad (229)$$

voldaan is. Door $m \geqq k$ te onderstellen kan hiervoor geschreven worden:

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \ldots . + k\alpha_k = k,$$

daar men dan aan α_{k+1}, α_{k+2}, enz. toch de waarde nul moet toekennen om aan (229) te kunnen voldoen. Men komt zoo dus weer op het in n⁰. 375 en 376 genoemde verdeelingsprobleem. Het in n⁰. 376 voorkomende schema kan daarbij dienen om den coëfficiënt A_6 neer te schrijven, hetgeen we verder aan den lezer overlaten.

---

384. Stelling van Fermat. We beschouwen de formule (215) van n⁰. 366 voor het geval, *dat n een priemgetal is.* Volgens (214) is

$$n! = \alpha_1!\, \alpha_2! \ldots . \alpha_m!\, A_{\alpha_1\alpha_2 \ldots . \alpha_m}. \qquad (230)$$

Is geen der exponenten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots ., \alpha_m$ gelijk aan n, dan zijn de factoren van $\alpha_1!, \alpha_2!, \ldots ., \alpha_m!$ (d. w. z. de factoren $2, 3, \ldots ., \alpha_1, 2, 3, \ldots ., \alpha_2, \ldots ., 2, 3, \ldots ., \alpha_m$) niet door n deelbaar, daar ze alle $< n$ zijn. Het eerste lid van (230), dus ook het tweede lid, is echter door n deelbaar, zoodat (volgens de tweede formuleering der eigenschap van n⁰. 199) $A_{\alpha_1\alpha_2 \ldots . \alpha_m}$ door n deelbaar is.

Hieruit blijkt, *dat alle in het tweede lid van (215) voorkomende coëfficiënten, met uitzondering van de coëfficiënten van* $a_1^n, a_2^n, \ldots ., a_m^n$ (welke coëfficiënten 1 zijn) *door n deelbaar zijn* [1]). In de ontwikkeling van

$$(a_1 + a_2 + \ldots . + a_m)^n - (a_1^n + a_2^n + \ldots . + a_m^n) \qquad (231)$$

zijn dus alle coëfficiënten door n deelbaar, zoodat (231) door n deelbaar is. We vinden dus:

---

[1]) In het bijzonder vindt men, *dat C_n^p door n deelbaar is als n priem en $0 < p < n$ is.* Men heeft daartoe $m = 2$ te nemen.

Is n een priemgetal, dan is de uitdrukking (231) door n deelbaar.

Men kan dit ook zoo uitdrukken:

Is n een priemgetal, dan is de n^{de} macht van een veelterm verminderd met de som van de n^{de} machten der afzonderlijke termen door n deelbaar.

385. Neemt men in (231)

$$a_1 = a_2 = \ldots . = a_m = 1,$$

dan gaat de eigenschap van n⁰. 384 over in:

Is n een priemgetal dan is $m^n - m$ deelbaar door n.

Voor $m^n - m$ kan ook

$$m(m^{n-1} - 1)$$

geschreven worden. Is nu m niet deelbaar door n (hetgeen insluit, dat m niet nul is), dan is dus, volgens de eigenschap van n⁰. 198, $m^{n-1} - 1$ door n deelbaar is. Men heeft dus:

Is n een priemgetal en m niet door n deelbaar, dan is $m^{n-1} - 1$ door n deelbaar.

Deze zeer belangrijke eigenschap staat bekend als de **stelling van Fermat** [1]).

386. Stelling van Euler. Uit het binomium van ***Newton*** leidt men gemakkelijk af:

Is $a - b$ deelbaar door p^l, waarin p een priemgetal en $l \geqq 1$ is, dan is $a^p - b^p$ deelbaar door p^{l+1}.

Uit het ondersteld volgt nl.:

$$a = b + vp^l\ ,$$

$$a^p = (b + vp^l)^p =$$

$$= b^p + pb^{p-1}vp^l + C_p^2 b^{p-2}v^2p^{2l} + C_p^3 b^{p-3}v^3p^{3l} + \ldots . + v^pp^{pl},$$

dus:

$$a^p - b^p = b^{p-1}vp^{l+1} + C_p^2 b^{p-2}v^2p^{2l} + \ldots . + v^pp^{pl}.$$

Daar $2l \geqq l + 1$ is, zijn alle termen in het tweede lid der laatste gelijkheid door p^{l+1} deelbaar.

387. *Is p een priemgetal en a niet door p deelbaar, dan is:*

$$a^{p^{l-1}(p-1)} - 1$$

door p^l deelbaar ($l \geqq 1$).

---

[1]) Pierre de Fermat (1601—1665) heeft deze stelling in 1640 medegedeeld.

We bewijzen dit door volledige inductie naar l. Voor $l = 1$ is de eigenschap niets anders dan de stelling van FERMAT (zie n⁰. 385). Verder volgt uit de juistheid der eigenschap voor een zeker getal l (in verband met de eigenschap van n⁰. 386), dat

$$\{a^{p^{l-1}(p-1)}\}^p - 1^p = a^{p^l(p-1)} - 1$$

door p^{l+1} deelbaar is, waarmede de stap van l op $l+1$ verricht is.

Voor $p = 2$ en $l \geqq 3$ kan bij de in de eigenschap genoemde uitdrukking de exponent $l - 1$ tot $l - 2$ verlaagd worden, zoodat die uitdrukking dan door

$$a^{2^{l-2}} - 1$$

kan worden vervangen. Immers de stap van l op $l+1$ kan als boven worden verricht, zoodat nog de juistheid voor $l = 3$ (dus de deelbaarheid van $a^2 - 1$ door $2^3 = 8$ als a oneven is (moet worden aangetoond. Dit nu volgt uit $a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$ in verband daarmede, dat $a - 1$ en $a + 1$ beide even zijn en (daar ze 2 verschillen) een van beide door 4 deelbaar is. Men heeft dus:

Is a oneven en $l \geqq 3$, dan is

$$a^{2^{l-2}} - 1$$

door 2^l deelbaar.

388. *Is $a^{i_1} - b^{i_1}$ deelbaar door n_1, $a^{i_2} - b^{i_2}$ deelbaar door n_2, enz. en eindelijk $a^{i_k} - b^{i_k}$ deelbaar door n_k, dan is $a^v - b^v$, waarin v een gemeen veelvoud van $i_1, i_2, \ldots, i_k$ is, deelbaar door het kleinste gemeene veelvoud van $n_1, n_2, \ldots, n_k$.*

Het getal v is nl. te schrijven als $i_1 v_1$. Dan is:

$$a^v - b^v = a^{i_1 v_1} - b^{i_1 v_1} = (a^{i_1})^{v_1} - (b^{i_1})^{v_1}.$$

Volgens het in n⁰. 164 gevondene is $a^v - b^v$ dus deelbaar door $a^{i_1} - b^{i_1}$, dus door n_1 (zie de eigenschap van n⁰. 141). Evenzoo is $a^v - b^v$ door ieder der getallen $n_2, n_3, \ldots, n_k$ deelbaar, dus ook door het K.G.V. van $n_1, n_2, \ldots, n_k$ (zie n⁰. 192).

389. *Is*

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}, \tag{232}$$

waarin $p_1, p_2, \ldots, p_k$ *verschillende priemgetallen zijn, terwijl a onderling ondeelbaar is met n, dan is*

$$a^v - 1$$

deelbaar door n, waarin v een gemeen veelvoud der getallen

$$p_1^{\alpha_1 - 1}(p_1 - 1),\ p_2^{\alpha_2 - 1}(p_2 - 1), \ldots, p_k^{\alpha_k - 1}(p_k - 1) \qquad (233)$$

is.

Dit volgt uit de eigenschappen van n⁰. 387 en 388 als men voor de getallen $n_1, n_2, \ldots, n_k$ van n⁰. 388 resp.

$$p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_k^{\alpha_k} \qquad (234)$$

neemt, voor de getallen $i_1, i_2, \ldots, i_k$ de getallen (233) en $b = 1$ stelt. Men heeft dan verder nog te bedenken, dat de getallen (234) onderling ondeelbaar zijn, en dus hun product (d. i. n) tot K.G.V. hebben (zie de eigenschap van n⁰. 193).

Is een der priemgetallen $p_1, p_2, \ldots, p_k$, b.v. p_1, gelijk aan 2 en de bijbehoorende exponent $\alpha_1 \geqq 3$ (m. a. w. is het getal n door $2^3 = 8$ deelbaar), dan kan men (volgens de tweede eigenschap van n⁰. 387) het eerste der getallen (233) door 2 deelen en dus door $2^{\alpha_1 - 2}$ vervangen. Bijgevolg kan de eigenschap aldus worden aangevuld:

Is

$$n = 2^{\alpha} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k},$$

waarin $p_1, p_2, \ldots, p_k$ *verschillende oneven priemgetallen zijn,* $\alpha \geqq 3$ *is en a onderling ondeelbaar met n, dan is*

$$a^{\frac{K}{2}} - 1$$

deelbaar door n, waarin K het K.G.V. der getallen

$$2^{\alpha - 2},\ p_1^{\alpha_1 - 1}(p_1 - 1),\ p_2^{\alpha_2 - 1}(p_2 - 1), \ldots, p_k^{\alpha_k - 1}(p_k - 1)$$

voorstelt.

De hierin voorkomende notatie wijkt eenigszins af van die der vorige eigenschap, daar het aantal verschillende priemfactoren van n nu niet k, maar $k + 1$ is.

390. Het product der getallen (233), waarvoor ook

$$\frac{n(p_1 - 1)(p_2 - 1) \ldots (p_k - 1)}{p_1 p_2 \ldots p_k} \qquad (235)$$

geschreven kan worden, wordt door $\varphi(n)$ voorgesteld. Op de beteekenis van dit getal komen we later terug (zie Hoofdst. VII, § 2).

Door in de eerste eigenschap van n⁰. 389 voor het getal v het product der getallen (233) te nemen, vindt men in het bijzonder:

Zijn de getallen a en n onderling ondeelbaar, dan is

$$a^{\varphi(n)} - 1$$

door n deelbaar is; hierin is $\varphi(n)$ *een afkorting voor de uitdrukking* (235), *waarin* $p_1, p_2, \ldots, p_k$ *de verschillende priemfactoren van n zijn.*

De toevoeging „verschillende" dient om aan te geven, dat een priemfactor van n, die meerdere malen (dus met een exponent > 1) in n voorkomt, in de uitdrukking (235) slechts eenmaal moet opgenomen worden.

De eigenschap, die een uitbreiding van de stelling van FERMAT is (daar toch $\varphi(n) = n - 1$ is als n een priemgetal is) wordt de ***stelling van Euler*** genoemd [1]).

[1]) LEONHARD EULER (1707—1783) heeft deze stelling in 1760 bewezen.

§ 4. Eigenschappen betreffende de deelers van één getal.

391. Bewijs der eigenschap van n°. 205. We beschouwen twee getallen b en c, die we beide in priemfactoren ontbonden denken. Zijn $p_1, p_2, \ldots, p_k$ de priemgetallen, die in minstens een der getallen b en c voorkomen, dan kan men schrijven:

$$b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_k^{\beta_k}, \tag{236}$$

$$c = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \ldots p_k^{\gamma_k}. \tag{237}$$

Hierbij kunnen sommige der exponenten ook nul zijn. Komt b.v. het priemgetal p_1 alleen in b voor, dan is $\gamma_1 = 0$. Wel kan natuurlijk worden aangenomen, dat β_1 en γ_1 niet beide nul zijn, evenmin als β_2 en γ_2, enz.

Uit (236) en (237) volgt:

$$bc = p_1^{\beta_1+\gamma_1} p_2^{\beta_2+\gamma_2} \ldots p_k^{\beta_k+\gamma_k}.$$

Hieruit blijkt, *dat in een veelvoud van het getal b de priemfactoren van b alle voorkomen met denzelfden of grooteren exponent.*

Heeft men omgekeerd het getal

$$d = p_1^{\delta_1} p_2^{\delta_2} \ldots p_k^{\delta_k}, \tag{238}$$

waarin:

$$\delta_1 \geqq \beta_1,\ \delta_2 \geqq \beta_2, \ldots, \delta_k \geqq \beta_k\,,$$

dan is:

$$d = b(p_1^{\delta_1-\beta_1} p_2^{\delta_2-\beta_2} \ldots p_k^{\delta_k-\beta_k}),$$

dus d deelbaar door b.

Hieruit blijkt de juistheid der eigenschap van n°. 205. Door de invoering van exponenten nul heeft het nu gegeven bewijs een meer overzichtelijken vorm gekregen dan dat van n°. 205 doordat het niet meer noodig is onderscheid te maken tusschen

priemfactoren, die in beide getallen, en priemfactoren, die in slechts één der getallen voorkomen.

392. Men kan de eigenschap van n⁰. 205 ook aldus formuleeren:

Een getal is dan en alleen dan een deeler van het getal

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots . p_k^{\alpha_k} \tag{232}$$

als het geen andere priemfactoren bevat dan die van n en deze voorzien zijn van denzelfden of kleineren exponent.

Hieruit blijkt, *dat iedere deeler van het getal n te schrijven is als*

$$b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots . p_k^{\beta_k}, \tag{239}$$

waarin:

$$\beta_1 \leqq \alpha_1,\ \beta_2 \leqq \alpha_2, \dots .,\ \beta_k \leqq \alpha_k. \tag{240}$$

Omgekeerd is het getal (239) steeds een deeler van n als aan (240) voldaan is.

393. Aantal deelers van een getal. In (239) kunnen ook een of meer der exponenten $\beta_1, \beta_2, \dots ., \beta_k$ nul zijn. Bij den deeler b van het door (232) aangewezen getal n heeft dus β_1 een der $\alpha_1 + 1$ waarden

$$0,\ 1,\ 2,\ 3, \dots .,\ \alpha_1,$$

β_2 een der $\alpha_2 + 1$ waarden

$$0,\ 1,\ 2,\ 3, \dots .,\ \alpha_2,$$

enz. Daar men ieder der mogelijke waarden van β_1 combineeren kan met ieder der mogelijke waarden van β_2, enz., heeft men:

Het aantal t(n) der deelers van een getal n bedraagt

$$t(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots . (\alpha_k + 1), \tag{241}$$

waarin $\alpha_1, \alpha_2, \dots ., \alpha_k$ *de exponenten zijn, waarmede de verschillende priemfactoren van n in n voorkomen* [1]).

Hierbij zijn *het getal 1 en het getal n zelf* als deelers van n medegerekend. Voor den deeler 1 is:

$$\beta_1 = \beta_2 = \dots . = \beta_k = 0$$

en voor den deeler n:

$$\beta_1 = \alpha_1,\ \beta_2 = \alpha_2, \dots .,\ \beta_k = \alpha_k.$$

---

[1]) Dit blijft juist als men priemfactoren, die niet in n voorkomen, beschouwt als in n voorkomend met een exponent nul.

Als voorbeeld nemen we het getal $2520 = 2^3 . 3^2 . 5 . 7$. Dit bezit $4 . 3 . 2^2 = 48$ deelers. Deze zijn:

1	2	2^2	2^3	5	2 . 5	$2^2 . 5$	$2^3 . 5$
3	2 . 3	$2^2 . 3$	$2^3 . 3$	3 . 5	2 . 3 . 5	$2^2 . 3 . 5$	$2^3 . 3 . 5$
3^2	$2 . 3^2$	$2^2 . 3^2$	$2^3 . 3^2$	$3^2 . 5$	$2 . 3^2 . 5$	$2^2 . 3^2 . 5$	$2^3 . 3^2 . 5$
7	2 . 7	$2^2 . 7$	$2^3 . 7$	5 . 7	2 . 5 . 7	$2^2 . 5 . 7$	$2^3 . 5 . 7$
3 . 7	2 . 3 . 7	$2^2 . 3 . 7$	$2^3 . 3 . 7$	3 . 5 . 7	2 . 3 . 5 . 7	$2^2 . 3 . 5 . 7$	$2^3 . 3 . 5 . 7$
$3^2 . 7$	$2 . 3^2 . 7$	$2^2 . 3^2 . 7$	$2^3 . 3^2 . 7$	$3^2 . 5 . 7$	$2 . 3^2 . 5 . 7$	$2^2 . 3^2 . 5 . 7$	$2^3 . 3^2 . 5 . 7$

394. Uit de eigenschap van n⁰. 393 volgt, *dat het aantal deelers van n steeds even is behalve* als de exponenten α_1, α_2, ... , α_k alle even zijn, dus *als n de tweede macht van een zeker getal is;* het getal n wordt dan een ***vierkant*** of ***kwadraat*** genoemd.

Dit blijkt ook (zonder het aantal deelers te bepalen) daaruit, *dat de deelers van n in paren complementaire deelers* (zie n⁰. 138) *te verdeelen zijn.* Alleen als n een vierkant, dus $n = m^2$ is, blijft daarbij een deeler over, nl. m, die aan zijn complementairen deeler gelijk is, waardoor het aantal deelers oneven wordt.

395. Uit de eigenschap van n⁰. 393 volgt verder nog:

Zijn m en n onderling ondeelbaar, dan is aan

$$t(mn) = t(m) . t(n) \tag{242}$$

voldaan.

De juistheid hiervan is ook onmiddellijk daaruit in te zien, dat men de deelers van mn verkrijgt door telkens een deeler van m met een deeler van n te vermenigvuldigen en deze producten alle verschillend zijn.

Zijn echter m en n onderling deelbaar, dan kan een deeler van mn, die een gemeenschappelijken priemfactor van m en n bevat, op meerdere wijzen als een product van een deeler van m en een deeler van n geschreven worden, *zoodat dan*

$$t(mn) < t(m) . t(n) \tag{243}$$

is. Het blijkt dus, *dat in ieder geval voldaan is aan*

$$t(mn) \leqq t(m) . t(n),$$

waarbij het gelijkteeken dan en alleen dan geldt als m en n onderling ondeelbaar zijn. We laten het aan den lezer over dit uit de formule (241) af te leiden.

396. Maakt men onderscheid tusschen het product ab en het product ba, dan is het getal n op $t(n)$ manieren als een product van twee factoren te schrijven, daar men voor den eersten factor ieder der $t(n)$ deelers van n nemen kan. Let men niet op de volgorde der factoren, dan wordt het aantal ontbindingen in twee factoren $\frac{t(n)}{2}$ of $\frac{t(n)+1}{2}$ al naar gelang n niet of wel een kwadraat is; in het laatste geval zijn er $\frac{t(n)-1}{2}$ ontbindingen in ongelijke en één ontbinding in gelijke factoren mogelijk.

Maakt men gebruik van de notatie $\left[\frac{a}{b}\right]$ voor het partiëele quotiënt der deeling van a door b (zie n⁰. 168), dan kan het verkregen resultaat aldus worden geformuleerd:

Een getal n is op

$$\left[\frac{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots\ldots(\alpha_k+1)+1}{2}\right]$$

manieren als een product van twee factoren te schrijven als men niet let op de volgorde der factoren. Hierin zijn $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ de exponenten, waarmede de verschillende priemfactoren van n in n voorkomen.

We merken verder nog op, *dat een getal n met k verschillende priemfactoren* (die echter meervoudig kunnen zijn, d.w.z. met een exponent > 1 in n kunnen voorkomen) *voor $k \geqq 1$, dus $n > 1$, op 2^{k-1} manieren als een product van twee onderling ondeelbare getallen te schrijven is.* Dit is nl. gelijk aan het aantal manieren, waarop het product $p_1 p_2 \ldots\ldots p_k$ der verschillende priemfactoren van n als een product van twee factoren te schrijven is; immers uit zulk een ontbinding van $p_1 p_2 \ldots\ldots p_k$ vloeit één en slechts één ontbinding van n in twee onderling ondeelbare factoren voort door de priemgetallen $p_1, p_2, \ldots\ldots, p_k$ in ieder der beide factoren van $p_1 p_2 \ldots\ldots p_k$ te voorzien van de exponenten, waarmede ze in n voorkomen.

397. We vragen nu naar het *aantal deelers van n, die een veelvoud van een gegeven deeler b van n zijn.* Dit aantal bedraagt

$$t\left(\frac{n}{b}\right),$$

daar *de genoemde deelers ontstaan door* b *met de deelers van* $\frac{n}{b}$ *te vermenigvuldigen.* Is het getal b door (239) aangeduid, dan kan voor het gevraagde aantal ook geschreven worden:

$$(\alpha_1 + 1 - \beta_1)(\alpha_2 + 1 - \beta_2) \ldots (\alpha_k + 1 - \beta_k).$$

Voor $b = 1$ (waardoor $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_k = 0$ wordt) gaat dit resultaat in de eigenschap van n⁰. 393 over.

398. Som der deelers van een getal. We gaan over tot de bepaling van de *som* $S(n)$ [1]) *der deelers van het door (232) aangewezen getal* n. Deze deelers vindt men door ieder der deelers van het getal

$$N_{k-1} = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_{k-1}^{\alpha_{k-1}}$$

achtereenvolgens met ieder der getallen

$$1, p_k, p_k^2, \ldots, p_k^{\alpha_k}$$

te vermenigvuldigen. Volgens de algemeene distributieve eigenschap voor een product van twee factoren is dus:

$$S(n) = S(N_{k-1}) \cdot (1 + p_k + p_k^2 + \ldots + p_k^{\alpha_k}).$$

Evenzoo is:

$$S(N_{k-1}) = S(N_{k-2}) \cdot (1 + p_{k-1} + p_{k-1}^2 + \ldots + p_{k-1}^{\alpha_{k-1}}),$$

waarin:

$$N_{k-2} = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_{k-2}^{\alpha_{k-2}}.$$

Zoo doorgaande vindt men:

$$S(n) = (1 + p_1 + p_1^2 + \ldots + p_1^{\alpha_1})(1 + p_2 + p_2^2 + \ldots + p_2^{\alpha_2}) \ldots$$
$$(1 + p_{k-1} + p_{k-1}^2 + \ldots + p_{k-1}^{\alpha_{k-1}})(1 + p_k + p_k^2 + \ldots + p_k^{\alpha_k}). \qquad (244)$$

De juistheid hiervan is ook onmiddellijk in te zien door het tweede lid volgens de algemeene distributieve eigenschap van een product van een willekeurig aantal factoren (zie n⁰. 102) als een som van $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_k + 1)$ termen te ontwikkelen (waarbij men tevens de eigenschap van n⁰. 393 terugvindt). Men krijgt dan nl. als termen alle getallen van den vorm (239), waarvoor aan de ongelijkheden (240) voldaan is (zie n⁰. 392), dus juist alle deelers van het getal n.

Volgens de formule (113) van n⁰. 164 *kan verder voor (244) nog geschreven worden:*

---

[1]) Hiervoor wordt ook het teeken $\int(n)$ gebezigd.

$$S(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1} \cdot \frac{p_3^{\alpha_3+1}-1}{p_3-1} \cdots \frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1}. \qquad (245)$$

Is b een deeler van n, dan vindt men blijkens het in n⁰. 397 opgemerkte voor de *som der deelers van n, die een veelvoud van den deeler b van n zijn:*

$$bS\left(\frac{n}{b}\right).$$

Uit de formule (244) of (245) leest men af, *dat als m en n onderling ondeelbaar zijn aan*

$$S(mn) = S(m) \,.\, S(n) \qquad (246)$$

voldaan is. Dit volgt ook weer rechtstreeks uit het in n⁰. 395 omtrent het ontstaan der deelers van mn opgemerkte.

Op laatstgenoemde wijze vindt men verder, *dat*

$$S(mn) < S(m) \,.\, S(n)$$

is als m en n onderling deelbaar zijn. We laten het aan den lezer over dit uit de formule (244) af te leiden.

399. Om de *som $S_q(n)$ der q^{de} machten van de deelers van het getal n* te vinden merken we op, dat deze machten de termen zijn, die bij de ontwikkeling van het product

$$(1+p_1^q+p_1^{2q}+\ldots+p_1^{\alpha_1 q})(1+p_2^q+p_2^{2q}+\ldots+p_2^{\alpha_2 q})$$
$$\ldots (1+p_k^q+p_k^{2q}+\ldots+p_k^{\alpha_k q})$$

ontstaan. Hieruit blijkt, *dat dit product de gevraagde som is,* dus dat men heeft:

$$S_q(n) = (1+p_1^q+p_1^{2q}+\ldots+p_1^{\alpha_1 q})(1+p_2^q+p_2^{2q}+\ldots+p_2^{\alpha_2 q})$$
$$\ldots (1+p_k^q+p_k^{2q}+\ldots+p_k^{\alpha_k q}) =$$
$$= \frac{p_1^{q(\alpha_1+1)}-1}{p_1^q-1} \cdot \frac{p_2^{q(\alpha_2+1)}-1}{p_2^q-1} \cdots \frac{p_k^{q(\alpha_k+1)}-1}{p_k^q-1}. \qquad (247)$$

Hierin liggen de formules (244) en (245) van n⁰. 398 als het bijzondere geval $q=1$ opgesloten. *Ook de formule (241) van n⁰. 393 ligt in (247) opgesloten, nl. als het geval $q=0$,* daar de som van de nulde machten der deelers niets anders is dan het aantal deelers; men moet nu voor $S_q(n)$ het tweede lid van (247) nemen, daar het derde lid voor $q=0$ geen zin heeft.

400. Product der deelers van een getal. Het *product $P(n)$*

der deelers van het getal n wordt gevonden door iederen deeler van n met zijn complementairen deeler te vermenigvuldigen en het product van al deze $t(n)$ producten te vormen (waarin $t(n)$ het aantal deelers van n voorstelt). Hierbij wordt echter ieder op n deelbaar getal tweemaal in rekening gebracht, nl. als deeler en nog eens als complementaire deeler, zoodat men zoo niet $P(n)$, maar $\{P(n)\}^2$ verkrijgt.

Daar nu het product van twee complementaire deelers van n juist n is, vindt men:

$$\{P(n)\}^2 = n^{t(n)}. \tag{248}$$

Is n geen kwadraat, dus $t(n)$ even (zie n⁰. 394), dan kan hiervoor geschreven worden:

$$P(n) = n^{\frac{t(n)}{2}},$$

terwijl men als $n = m^2$ is heeft:

$$P(m^2) = m^{t(m^2)}.$$

Is $a^2 = b$, dan wordt a de ***wortel** uit b* genoemd en als $\sqrt{b}$, geschreven [1]) (iets, waarop we later nog uitvoeriger terugkomen). Met deze notatie kan men in ieder geval het verkregen resultaat aldus uitdrukken:

$$P(n) = \sqrt{n^{t(n)}}.$$

401. Zijn de getallen m en n onderling ondeelbaar, dan volgt uit de formule (248) in verband met de eigenschap van n⁰. 395:

$$\{P(mn)\}^2 = (mn)^{t(mn)} = (mn)^{t(m)\,.\,t(n)} =$$
$$= \{m^{t(m)}\}^{t(n)}\{n^{t(n)}\}^{t(m)} = \{P(m)\}^{2t(n)}\{P(n)\}^{2t(m)}.$$

Hieruit volgt, *dat als m en n onderling ondeelbaar zijn voldaan is aan:*

$$P(mn) = \{P(m)\}^{t(n)}\{P(n)\}^{t(m)}.$$

Omgekeerd is hieraan alleen dan voldaan als m en n onderling ondeelbaar zijn. Immers zijn m en n onderling deelbaar

---

[1]) Het getal b is dan een vierkant. Is b niet nul, dan komen in b alle priemfactoren met even exponenten voor. Het getal $a = \sqrt{b}$ verkrijgt men door die exponenten alle door 2 te deelen. Hieruit ziet men tevens, *dat a door b ondubbelzinnig bepaald is.* Dit blijkt trouwens ook daaruit, dat uit $a_1 > a_2$ volgt: $a_1^2 > a_2^2$.

(dus > 1), dan geldt de ongelijkheid (243), waaruit men op dezelfde wijze als boven afleidt (lettend op $mn > 1$):

$$P(mn) < \{P(m)\}^{t(n)} \,.\, \{P(n)\}^{t(m)}.$$

---

402. Eigenschappen betreffende grootsten gemeenen deeler en kleinste gemeene veelvoud. Uit de beschouwingen van van n⁰. 391 en 392 blijkt:

De getallen

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$$

en

$$b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}$$

hebben

$$c = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \dots p_k^{\gamma_k}$$

tot G.G.D. en

$$d = p_1^{\delta_1} p_2^{\delta_2} \dots p_k^{\delta_k}$$

tot K.G.V. Hierin zijn $p_1, p_2, \dots, p_k$ *de priemfactoren, die in minstens één der getallen a en b voorkomen, terwijl* γ_i *het kleinste en* δ_i *het grootste der getallen* α_i *en* β_i *is* $(i = 1, 2, \dots, k)$.

Het spreekt van zelf, *dat dit tot den G.G.D. en het K.G.V. van meerdere getallen uit te breiden is.*

Bovenstaande formuleering der ook in n⁰. 206—208 voorkomende resultaten wordt eerst door invoering van exponenten nul mogelijk.

403. De eigenschap van n⁰. 190 (tweede formuleering) vloeit direct uit de eigenschap van n⁰. 402 voort door op te merken, dat

$$\gamma_i + \delta_i = \alpha_i + \beta_i$$

is; men heeft nl. òf $\gamma_i = \alpha_i$, $\delta_i = \beta_i$, òf $\gamma_i = \beta$, $\delta_i = \alpha_i$.

Ook ziet men zoo, *dat bij meer dan twee getallen het product dier getallen een veelvoud is van het product van den G.G.D. en het K.G.V. dier getallen en dat beide producten dan en alleen dan gelijk zijn als iedere twee der getallen onderling ondeelbaar zijn.* Zijn nl. $a_1, a_2, \dots, a_n$ $(n > 2)$ die getallen en $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots,$

ε_n de exponenten, waarmede de priemfactor p daarin voorkomt, dan kan zonder beperking

$$\varepsilon_1 \leqq \varepsilon_2 \leqq \varepsilon_3 \leqq \ldots . \leqq \varepsilon_n \tag{249}$$

ondersteld worden. Is P het product, G de G.G.D. en K het K.G.V. van $a_1, a_2, \ldots ., a_n$, dan komt p in P met den exponent $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots . + \varepsilon_n$, in G met den exponent ε_1, in K met den exponent ε_n, dus in GK met den exponent $\varepsilon_1 + \varepsilon_n$ voor. Nu is:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots . + \varepsilon_n \geqq \varepsilon_1 + \varepsilon_n ,$$

waarbij het gelijkteeken dan en alleen dan geldt als

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \ldots . = \varepsilon_{n-1} = 0$$

is. In verband met (249) volgt hieruit, dan ook $\varepsilon_1 = 0$ is, zoodat de priemfactor p in hoogstens één der getallen $a_1, a_2 \ldots ., a_n$ voorkomt. Is dit met iederen priemfactor het geval (hetgeen beteekent, dat de getallen $a_1, a_2, \ldots ., a_n$ onderling ondeelbaar zijn), dan is $P = GK$ en anders niet.

404. De eigenschap van n⁰. 190 is aldus tot meerdere getallen uit te breiden:

Is P het product der getallen

$$a_1, a_2, \ldots ., a_n , \tag{123}$$

G de grootste gemeene deeler der C_n^k producten van telkens k der getallen (123) en K het kleinste gemeene veelvoud der C_n^k producten van telkens $n - k$ der getallen (123), dan is:

$$GK = P. \tag{250}$$

Is p een priemfactor, die resp. met de exponenten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots .,$ ε_n (waarvan eenige nul kunnen zijn) in $a_1, a_2, \ldots ., a_n$ voorkomt, dan kan weer worden aangenomen, dat aan de ongelijkheden (249) voldaan is.

De factor p komt dan in G met den exponent

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots . + \varepsilon_k$$

en in K met den exponent

$$\varepsilon_{k+1} + \varepsilon_{k+2} + \ldots . + \varepsilon_n,$$

dus zoowel in GK als in P met den exponent

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots . + \varepsilon_n$$

voor. Bijgevolg komt iedere priemfactor in GK en in P met denzelfden exponent voor, waaruit men tot (250) besluit.

405. In de eigenschap van n⁰. 404 ligt als bijzonder geval ($k = 1$ of $= n - 1$) opgesloten, *dat het product P der getallen* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *gelijk is*

1⁰. aan het product van den G.G.D. der getallen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *en het K.G.V. der getallen* $\frac{P}{a_1}, \frac{P}{a_2}, \ldots, \frac{P}{a_n}$;

2⁰. aan het product van het K.G.V. van $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *en den G.G.D. van* $\frac{P}{a_1}, \frac{P}{a_2}, \ldots, \frac{P}{a_n}$.

Door $n = 2$ te nemen gaat zoowel de eene als de andere dezer eigenschappen in die van n⁰. 190 over.

Dat $P = KG$ is, waarin K het K.G.V. van $a_1, a_2, \ldots, a_n$ en G de G.G.D. van $\frac{P}{a_1}, \frac{P}{a_2}, \ldots, \frac{P}{a_n}$ voorstelt, blijkt ook gemakkelijk zonder van de ontbindingen der getallen in priemfactoren gebruik te maken. Is g de G.G.D. der getallen

$$\frac{K}{a_1}, \frac{K}{a_2}, \ldots, \frac{K}{a_n},$$

dan is $\frac{K}{g}$ door ieder der getallen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ deelbaar, dus ook door K; bijgevolg is $g = 1$. De G.G.D. der getallen

$$\frac{KP}{a_1}, \frac{KP}{a_2}, \ldots, \frac{KP}{a_n}$$

is dus P, terwijl die G.G.D. K-maal zoo groot is als de G.G.D. van $\frac{P}{a_1}, \frac{P}{a_2}, \ldots, \frac{P}{a_n}$, dus gelijk aan KG.

406. Als toepassing bewijzen we de eigenschap:

De grootste gemeene deeler G der C_n^{k+1} *kleinste gemeene veelvouden van telkens* $k+1$ *der getallen (123) is gelijk aan het kleinste gemeene veelvoud K der* C_n^{n-k} *grootste gemeene deelers van telkens* $n-k$ *der getallen (123).*

Komt nl. de priemfactor p met de exponenten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ in $a_1, a_2, \ldots, a_n$ voor en is aan de ongelijkheden (249) voldaan, dan komt p zoowel in G als in K met den exponent ε_{k+1} voor.

407. Als verdere toepassing noemen we nog de volgende eigenschap:

Is G_i het product der grootste gemeene deelers en K_i dat der kleinste gemeene veelvouden van de C_n^i producten van telkens i der getallen a_1, a_2, ..., a_n, dan is:

$$G_2^{n-2} K_3^2 = K_2^{n-2} G_3^2. \tag{251}$$

De priemfactor p, die met de exponenten ε_1, ε_2, ..., ε_n in de getallen a_1, a_2, ..., a_n voorkomt (waarbij weer aan (249) voldaan is), komt nl. in G_i voor met den exponent

$$C_{n-1}^{i-1}\varepsilon_1 + C_{n-2}^{i-1}\varepsilon_2 + C_{n-3}^{i-1}\varepsilon_3 + \ldots + C_i^{i-1}\varepsilon_{n-i} + C_{i-1}^{i-1}\varepsilon_{n-i+1} =$$
$$= \sum_{j=1}^{n-i+1} C_{n-j}^{i-1}\varepsilon_j$$

en in K_i met den exponent

$$C_{n-1}^{i-1}\varepsilon_n + C_{n-2}^{i-1}\varepsilon_{n-1} + C_{n-3}^{i-1}\varepsilon_{n-2} + \ldots + C_i^{i-1}\varepsilon_{i+1} + C_{i-1}^{i-1}\varepsilon_i =$$
$$= \sum_{j=1}^{n-i+1} C_{n-j}^{i-1}\varepsilon_{n-j+1} = \sum_{j=i}^{n} C_{j-1}^{i-1}\varepsilon_j;$$

beide exponenten gaan in elkaar over door ε_1 met ε_n te verwisselen, ε_2 met ε_{n-1}, enz., dus in het algemeen ε_j met ε_{n-j+1}.

In het eerste lid van (251) komt p dus voor met den exponent

$$(n-2)\sum_{j=1}^{n-1} C_{n-j}^1\varepsilon_j + 2\sum_{j=3}^{n} C_{j-1}^2\varepsilon_j =$$
$$= \sum_{j=1}^{n}(n-2)(n-j)\varepsilon_j\ ^{1)} + \sum_{j=2}^{n}(j-1)(j-2)\varepsilon_j\ ^{2)} =$$
$$= (n-1)(n-2)\varepsilon_1 + \sum_{j=2}^{n}\{(n^2-2n+2) - j(n-j+1)\}\varepsilon_j =$$
$$= \sum_{j=1}^{n}\{(n^2-2n+2) - j(n-j+1)\}\varepsilon_j. \tag{252}$$

Hieruit vindt men den exponent van p in het tweede lid van (251) door ε_j door ε_{n-j+1} te vervangen. Beide exponenten zijn

---

[1]) We hebben hierbij een term met $j = n$ toegevoegd, welke term toch nul is.

[2]) We hebben hier een term met $j = 2$ toegevoegd, die nul is. Zie verder n⁰. 629.

dus gelijk, daar voor (252) ook geschreven kan worden (zooals door vervanging van j door $n - j + 1$ blijkt):

$$\sum_{j=1}^{n} \{(n^2 - 2n + 2) - j(n - j + 1)\} \varepsilon_{n-j+1}.$$

Voor $n = 4$ besluit men uit (251) tot:

$$G_2 K_3 = K_2 G_3.$$

Hierin zijn G_2 en K_2 de producten van de grootste gemeene deelers resp. kleinste gemeene veelvouden der zes getallenparen

$$(a_1, a_2), (a_1, a_3), (a_1, a_4), (a_2; a_3), (a_2, a_4), (a_3, a_4),$$

terwijl G_3 en K_3 de producten van de grootste gemeene deelers resp. kleinste gemeene veelvouden der vier getallendrietallen

$$(a_2, a_3, a_4), (a_1, a_3, a_4), (a_1, a_2, a_4), (a_1, a_2, a_3)$$

zijn.

408. Getallenparen met gegeven G.G.D. en K.G.V. We vragen naar de *getallenparen a, b, die een gegeven getal G tot G.G.D. en een gegeven getal K tot K.G.V. hebben.* Voor het bestaan van zulke getallenparen is natuurlijk noodig, *dat G een deeler van K is* [1]), hetgeen we dan ook in het volgende zullen onderstellen.

Zij:

$$G = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \dots p_k^{\gamma_k},$$
$$K = p_1^{\delta_1} p_2^{\delta_2} \dots p_k^{\delta_k}.$$

Dan is dus:

$$\gamma_1 \leqq \delta_1, \ \gamma_2 \leqq \delta_2, \ \dots, \ \gamma_k \leqq \delta_k,$$

terwijl ook sommige der exponenten $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ nul kunnen zijn.

Twee getallen a en b kunnen alleen dan G en K tot G.G.D. resp. K.G.V. hebben als ze geen andere priemfactoren dan $p_1, p_2, \dots, p_k$ bezitten, dus als ze in den vorm

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k},$$
$$b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}$$

te schrijven zijn. *Die getallen voldoen dan en alleen dan aan de vraag als voor ieder der waarden 1, 2, ..., k van i de ge-*

---

1) Het zal blijken, dat die voorwaarde ook *voldoende* is.

tallen α_i *en* β_i, *afgezien van de volgorde, dezelfde zijn als* γ_i *en* δ_i, dus als men heeft:

$$\alpha_i = \gamma_i,\ \beta_i = \delta_i \quad \text{of} \quad \alpha_i = \delta_i,\ \beta_i = \gamma_i.$$

Is nu $\gamma_i < \delta_i$, dan vindt men zoo twee stellen waarden voor α_i en β_i, terwijl men slechts één stel waarden vindt als $\gamma_i = \delta_i$ is (nl. $\alpha_i = \beta_i = \gamma_i = \delta_i$). Zijn er j priemfactoren, die in G met een kleineren exponent voorkomen dan in K, m. a. w. is het quotiënt $K : G$ in het bezit van j verschillende priemfactoren, dan heeft men bij j der exponenten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ de keus tusschen twee waarden, terwijl na die j keuzen gedaan te hebben de getallen a en b bepaald zijn. Men kan deze dus op 2^j manieren kiezen.

De zoo gevonden getallen a en b zijn ongelijk behalve in het geval dat $G = K$ is [1]). Is $G < K$, dan leidt men uit een stel waarden voor a en b een ander stel waarden af door a en b te verwisselen. Daar men zoo hetzelfde getallenpaar behoudt, bedraagt dan het aantal gevraagde getallenparen $2^j : 2 = 2^{j-1}$. We vinden dus:

Is G een deeler van K en $< K$, dan zijn er 2^{j-1} getallenparen, die G tot G.G.D. en K tot K.G.V. hebben; hierin is j het aantal verschillende priemfactoren van $K : G$.

We merken nog op, *dat de gevraagde getallenparen als Ga', Gb' te schrijven zijn, waarin a' en b' onderling ondeelbare complementaire factoren van $K : G$ zijn.* Omgekeerd voeren twee onderling ondeelbare complementaire factoren a' en b' van $K : G$ tot een getallenpaar Ga', Gb', dat aan de vraag voldoet, hetgeen we aan den lezer overlaten na te gaan. Hierdoor is het verkregen resultaat ook uit het aan het eind van n⁰. 396 opgemerkte af te leiden. Voor $G = 1$ zijn beide resultaten geheel dezelfde.

---

[1]) Is $G = K$, dan is er slechts één getallenpaar, dat aan de vraag voldoet; daarvoor is $a = b = G = K$.

§ 5. Talstelsels.

409. Voorstelling van een getal door cijfers. Zij g een getal > 1. Volgens de ongelijkheid (78) van n⁰. 126 is dan voor $n > 1$:

$$g^n > 1 + n(g - 1),$$

dus $g^n > n$, hetgeen ook nog geldt voor $n = 1$. *Bijgevolg kan men voor ieder natuurlijk getal* a *een exponent* n *vinden* (b.v. $n = a$), *waarvoor* $g^n > a$ *is.*

Daar $g^0 \leqq a$ is, kan men derhalve het getal m zoo bepalen, dat

$$g^m \leqq a < g^{m+1} \tag{253}$$

is; g^m is dan het grootste der getallen

$$g^0, g^1, g^2, \ldots, g^n,$$

dat $\leqq a$ is (zie de eigenschap van n⁰. 33). Natuurlijk kan m ook nul zijn; dit is het geval als $a < g$ is.

410. We vormen nu de getallen

$$g^m, 2g^m, 3g^m, \ldots, g \,.\, g^m = g^{m+1}. \tag{254}$$

Het eerste dezer getallen is volgens (253) $\leqq a$, het laatste $> a$. Is dus

$$c_m g^m$$

het grootste der getallen (254), dat $\leqq a$ is, dan is:

$$c_m g^m \leqq a < (c_m + 1)g^m. \tag{255}$$

Blijkens (253) is c_m een der getallen

$$1, 2, 3, \ldots, g - 1.$$

411. Uit (255) volgt:

$$0 \leqq a - c_m g^m < g^m.$$

Van de getallen

$$0, g^{m-1}, 2g^{m-1}, 3g^{m-1}, \ldots, g \,.\, g^{m-1} = g^m$$

is dus het eerste $\leqq a - c_m g^m$, het laatste $> a - c_m g^m$, zoodat men het getal c_{m-1} zoodanig bepalen kan, dat

$$c_{m-1}g^{m-1} \leqq a - c_m g^m < (c_{m-1} + 1)g^{m-1}$$

is, dus:

$$c_m g^m + c_{m-1}g^{m-1} \leqq a < c_m g^m + (c_{m-1} + 1)g^{m-1}. \tag{256}$$

Hierin is c_{m-1} een der getallen

$$0, 1, 2, 3, \ldots, g - 1. \tag{257}$$

412. Uit (256) volgt verder:

$$0 \leqq a - (c_m g^m + c_{m-1}g^{m-1}) < g^{m-1},$$

waaruit men op dezelfde wijze als boven afleidt, dat onder de getallen (257) een getal c_{m-2} voorkomt, waarvoor voldaan is aan:

$$c_m g^m + c_{m-1}g^{m-1} + c_{m-2}g^{m-2} \leqq a <$$
$$< c_m g^m + c_{m-1}g^{m-1} + (c_{m-2} + 1)g^{m-2}.$$

Zoo doorgaande vindt men ten slotte:

$$c_m g^m + c_{m-1}g^{m-1} + c_{m-2}g^{m-2} + \ldots + c_2 g^2 + c_1 g \leqq a <$$
$$< c_m g^m + c_{m-1}g^{m-1} + c_{m-2}g^{m-2} + \ldots + c_2 g^2 + (c_1 + 1)g.$$

Hieruit volgt:

$$a - (c_m g^m + c_{m-1}g^{m-1} + \ldots + c_2 g^2 + c_1 g) < g,$$

zoodat het eerste lid dezer ongelijkheid een der getallen (257) is. Noemen we dit c_0, dan is dus:

$$a = c_m g^m + c_{m-1}g^{m-1} + \ldots + c_2 g^2 + c_1 g + c_0, \tag{258}$$

of:

$$a = \sum_{k=0}^{m} c_k g^k.$$

We vinden zoo:

Is $g > 1$, dan is ieder natuurlijk getal in den vorm (258) te schrijven, waarin

$$c_m, c_{m-1}, c_{m-2}, \ldots, c_2, c_1, c_0 \tag{259}$$

tot de getallen (257) behooren, terwijl c_m niet nul is.

Deze belangrijke eigenschap wordt eerst door invoering van het getal nul geldig.

413. Is het getal g eens en vooral aangenomen, dan is een natuurlijk getal door de rij getallen (259) volledig aangewezen. Hierbij moeten ook de getallen, die nul zijn, worden opgenomen om te doen zien bij welke machten van g ze behooren.

Het getal a wordt aangegeven door de getallen (259), die de

cijfers van het getal genoemd worden, naast elkaar te schrijven aldus:

$$c_m c_{m-1} c_{m-2} \ldots . c_2 c_1 c_0 \text{ }^{1)}, \qquad (260)$$

zoodat ze van links naar rechts gelezen bij steeds lagere machten van g behooren.

414. Talstelsel en grondtal. Om te weten welk getal door (260) wordt voorgesteld moet het in de gelijkheid (258) voorkomende getal g gegeven zijn. Een bepaalde keus van g beteekent *een bepaalde wijze om een getal door cijfers voor te stellen.* Zulk een wijze van voorstelling wordt een ***talstelsel*** genoemd, terwijl g het ***grondtal** van het talstelsel* heet. Het talstelsel met grondtal g noemt men het ***g-tallig stelsel.***

415. De cijfers c_0, c_1, c_2, ..., c_m van het getal (260) noemt men resp. *het cijfer der* ***eenheden****, het cijfer der* ***g-tallen****, het cijfer der* ***g^2-tallen****, ..., het cijfer der* ***g^m-tallen.*** Men zegt ook, *dat het getal (260) c_0 eenheden bevat, c_1 g-tallen, c_2 g^2-tallen, enz.* Verder noemen we i den ***rang** van het cijfer c_i.*

De machten van het grondtal g, dus de getallen

$$g^0 = 1,\ g,\ g^2,\ g^3,\ g^4,\ \ldots .,$$

heeten de ***termen der schaal.*** Voor een term der schaal, b.v. g^m, is $c_m = 1$, $c_{m-1} = c_{m-2} = \ldots . = c_2 = c_1 = 0$. Het getal g wordt dus als 10 (niet uit te spreken als „tien") geschreven, het getal g^2 als 100 (niet uit te spreken als „honderd"), enz.; g^m wordt dus geschreven als 1 gevolgd door m nullen.

416. Ondubbelzinnigheid der ontwikkeling in den vorm (258). Onderstel, dat in het tweede lid van (258) de getallen c_m, c_{m-1}, ..., c_0 willekeurig uit de getallen (257) gekozen zijn en wel zoodanig, dat c_m niet nul is. Uit (258) volgt dan in verband met $c_0 < g$:

$$a < c_m g^m + c_{m-1} g^{m-1} + \ldots . + c_2 g^2 + (c_1 + 1) g.$$

---

[1]) Hiervoor wordt, om verwarring met het product der getallen c_m, c_{m-1}, ..., c_1, c_0 te voorkomen, ook wel

$$\overline{c_m c_{m-1} c_{m-2} \ldots . c_2 c_1 c_0}$$

geschreven. We zullen echter het teeken $\overline{\qquad}$, dat ***ilatieteeken*** genoemd wordt, niet gebruiken, daar de bedoeling uit het verband voldoende duidelijk is.

Hieruit volgt in verband mel $c_1 + 1 \leqq g$:

$$a < c_m g^m + c_{m-1} g^{m-1} + \dots + c_3 g^3 + (c_2 + 1) g^2,$$

waaruit weer wegens $c_2 + 1 \leqq g$ volgt:

$$a < c_m g^m + c_{m-1} g^{m-1} + \dots + c_4 g^4 + (c_3 + 1) g^3,$$

enz. Men heeft dus algemeen:

$$a < c_m g^m + c_{m-1} g^{m-1} + \dots + c_{k+1} g^{k+1} + (c_k + 1) g^k$$ [1]),

dus in het bijzonder:

$$a < c_m g^m + (c_{m-1} + 1) g^{m-1},$$

$$a < (c_m + 1) g^m.$$

Daar $c_m + 1 \leqq g$ is, volgt uit de laatste ongelijkheid:

$$a < g^{m+1}.$$

In verband met (258) besluit men hieruit tot (253) (zie n^0. 409). Daar nu bij gegeven getallen a en g slechts één getal m aan de ongelijkheden (253) voldoet, *is het getal m (dus het aantal cijfers van het getal a) door het getal a en het grondtal g ondubbelzinnig bepaald.*

417. Uit de in n^0. 416 gevonden ongelijkheden volgt verder in verband met (258), dat aan (255) voldaan is. Daar c_m (als a, g en m bekend zijn) door de ongelijkheden (255) ondubbelzinnig bepaald is, *is c_m door de getallen a en g volledig aangewezen.*

Evenzoo besluit men tot (256), dus tot het ondubbelzinnig bepaald zijn van c_{m-1}, enz. Men vindt zoo:

Een natuurlijk getal is slechts op één manier in het g-tallig stelsel te schrijven, dus in den vorm (258), *waarin de cijfers* $c_m, c_{m-1}, \dots, c_1, c_0$ *alle* $< g$ *zijn en* $c_m > 0$ *is* [2]).

Tevens blijkt uit de voorgaande beschouwingen, *dat men de cijfers van een getal willekeurig uit de getallen* (257) *kan aannemen, mits zoo, dat het eerste cijfer* (*het meest links geplaatste*) *niet nul is.*

Dat het getal a slechts op één manier in den vorm (258) te brengen is, volgt ook direct daaruit, *dat c_0 de rest der deeling*

---

[1]) Tot deze ongelijkheid kan men ook direct geraken door uit (258) af te leiden (bedenkend, dat $c_{k-1}, c_{k-2}, \dots, c_1, c_0$ hoogstens $g - 1$ zijn):

$$a \leqq c_m g^m + c_{m-1} g^{m-1} + \dots + c_k g^k + (g-1)(g^{k-1} + g^{k-2} + \dots + g + 1) =$$
$$= c_m g^m + c_{m-1} g^{m-1} + \dots + c_{k+1} g^{k+1} + (c_k + 1) g^k - 1.$$

[2]) Dit geeft tevens de splitsing in een som van zoo weinig mogelijk machten van g (nulde machten inbegrepen); zie n^0. 858.

van a door g is, c_1 de rest der deeling van het partiëele quotiënt door g, c_2 de rest der deeling van het tweede partiëele quotiënt door g, enz., dus steeds het laatst verkregen quotiënt weer door g deelend (nader hierover in n⁰. 482).

418. Voorplaatsing van cijfers nul. In sommige gevallen biedt het voordeel *de beperking, dat het eerste cijfer van nul verschilt, los te laten.* Men kan dus aan het eerste van nul verschillende cijfer (van links naar rechts gerekend) een willekeurig aantal nullen laten voorafgaan, daar voor (258) b.v. ook geschreven kan worden:

$$a = 0 \,.\, g^{m+2} + 0 \,.\, g^{m+1} + c_m g^m + c_{m-1} g^{m-1} + \ldots . + c_1 g + c_0\,;$$

voor het getal a kan men dus ook schrijven

$$0\;0\;c_m c_{m-1} \ldots . \; c_2 c_1 c_0.$$

Zonder bepaalde reden wordt dit echter niet gedaan.

419. Als voorbeeld van een geval, waarbij de voorplaatsing ven nullen voordeel oplevert, stellen we de vraag:

Het aantal getallen $< g^m$ te vinden, waarin geen andere cijfers voorkomen dan

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots .;\ k - 1 (k \leqq g).$$

Deze getallen zijn alle met m cijfers te schrijven, die willekeurig uit de k getallen 0, 1, 2, ..., $k - 1$ kunnen worden aangenomen. Het aantal der gevraagde getallen bedraagt dus k^m. Hierbij is het getal 0 (geschreven als m nullen) medegeteld, *zoodat het aantal natuurlijke getallen, die aan de vraag voldoen, $k^m - 1$ bedraagt.*

Voor $k = g$ vindt men voor dit aantal $g^m - 1$, een uitkomst die onmiddellijk te voorzien is.

---

420. Grooter en kleiner bij getallen in het g-tallig stelsel. *Is a, in het g-tallig stelsel geschreven, een getal van $m + 1$ cijfers* [1]), dus van den vorm (258), *dan is voldaan aan de ongelijkheden (253) van n⁰. 409, dus a minstens g^m en hoogstens $g^{m+1} - 1$.*

---

[1]) Zoo het tegendeel niet gezegd wordt, is steeds ondersteld, dat het eerste cijfer van links (dus in het beschouwde geval c_m) niet nul is.

Is a' een getal van m' cijfers en $m' > m$, dus $m' \geqq m + 1$, dan is:

$$a' \geqq g^{m'} \geqq g^{m+1},$$

dus volgens (253) $a' > a$. M. a. w. *van twee getallen met verschillend aantal cijfers is dat met het grootste aantal cijfers het grootste.*

421. Vervolgens onderstellen we, dat a en a' beide m cijfers hebben. Is

$$a = c_m c_{m-1} \ldots . c_2 c_1 c_0,$$
$$a' = c'_m c'_{m-1} \ldots . c_2{}' c_1{}' c_0{}'$$

en is $c'_m > c_m$, dan is volgens de ongelijkheden (255) van n°. 410:

$$a' \geqq c'_m g^m \geqq (c_m + 1) g^m > a,$$

zoodat bij gelijk aantal cijfers maar verschillend begincijfer het getal met het grootste begincijfer het grootste is.

Is $c'_m = c_m$, maar $c'_{m-1} > c_{m-1}$, dan is volgens (256):

$$a' \geqq c_m g^m + c'_{m-1}\, g^{m-1} \geqq$$
$$\geqq c_m g^m + (c_{m-1} + 1) g^{m-1} > a.$$

Evenzoo blijkt, dat uit $c'_m = c_m$, $c'_{m-1} = c_{m-1}$, $c'_{m-2} > c_{m-2}$ volgt $a' > a$, enz. *Bij getallen van hetzelfde aantal cijfers is dus dat het grootste, waarbij het eerste afwijkende cijfer, van links naar rechts gerekend, het grootste is.*

422. Tellen in het g-tallig stelsel. Daar het op een getal a volgende getal het kleinste der getallen is, die $> a$ zijn, blijkt uit het in n°. 420 en 421 gevondene, *dat het getal, dat op het in het g-tallig stelsel geschreven getal a volgt, verkregen wordt door het eerste cijfer van rechts gerekend, dat $< g - 1$ is, met 1 te vermeerderen en de cijfers $g - 1$, die daar rechts van staan (zoo deze aanwezig zijn) alle door 0 te vervangen. Bestaat het getal a uitsluitend uit cijfers $g - 1$, dan moeten die (om het volgende getal te verkrijgen) alle door 0 worden vervangen, terwijl daarvoor het cijfer 1 geplaatst moet worden;* dit valt onder den vorigen regel als men voor de cijfers $g - 1$ een cijfer 0 geplaatst denkt (zie n°. 418).

Op het getal $c_m c_{m-1} \ldots . c_2 c_1 c_0$ volgt dus als $c_0 < g - 1$ is:

$$c_m c_{m-1} \ldots . c_2 c_1 c_0{}'$$

waarin $c_0{}' = c_0 + 1$ is. Evenzoo volgt op

$$c_m c_{m-1} \ldots . c_2 c_1 l$$

als $c_1 < g - 1$ en l een afkorting voor $g - 1$ is:

$$c_m c_{m-1} \ldots c_2 c_1{}' \, 0,$$

waarin $c_1{}' = c_1 + 1$. In het algemeen volgt op

$$c_m c_{m-1} \ldots c_k l l \ldots l \text{ (}k\text{ cijfers } l = g - 1\text{)}$$

als $c_k < g - 1$ is:

$$c_m c_{m+1} \ldots c_{k+1} c_k{}' \, 0 \, 0 \ldots 0 \text{ (}k\text{ cijfers } 0\text{)},$$

waarin $c_k{}' = c_k + 1$.

423. Tot hetzelfde resultaat geraakt men door te bedenken, dat het op a volgende getal $a + 1$ is. Is dus a door de gelijkheid (258) van n⁰. 412 aangegeven, dan is het volgende getal:

$$a + 1 = c_m g^m + c_{m-1} g^{m-1} + \ldots + c_2 g^2 + c_1 g + (c_0 + 1). \quad (261)$$

Voor $c_0 < g - 1$ is (met de notatie van n⁰. 422) voor $a + 1$ te schrijven:

$$c_m c_{m-1} \ldots c_2 c_1 c_0{}'.$$

Is $c_0 = l$ (dus $c_0 + 1 = g$) en $c_1 < g - 1$, dan vormen we (261) om tot:

$$a + 1 = c_m g^m + c_{m-1} g^{m-1} + \ldots + c_2 g^2 + (c_1 + 1) g =$$
$$= c_m c_{m-1} \ldots c_2 c_1{}' \, 0.$$

Voor $c_0 = c_1 = l$ en $c_2 < g - 1$ vindt men:

$$a + 1 = c_m g^m + c_{m-1} g^{m-1} + \ldots + c_3 g^3 + (c_2 + 1) g^2 =$$
$$= c_m c_{m-1} \ldots c_3 c_2{}' \, 0 \, 0,$$

enz.

424. In n⁰. 422 is een voorschrift verkregen, dat ons in staat stelt uit ieder getal het volgende af te leiden. Hoewel dit minder natuurlijk is, had men dit voorschrift ook als uitgangspunt ter vorming van de onbepaald voortloopende getallenrij 1, 2, 3, ... kunnen bezigen. Bij dat standpunt moet dan worden aangetoond, dat het door (260) voorgestelde getal aan (258) voldoet, waarin dan g het aantal ingevoerde cijferteekens is (0 medegerekend).

Om dit bewijs te leveren moet dan eerst worden aangetoond, dat het getal

$$100 \ldots 0 \text{ (}m\text{ nullen)} \quad (262)$$

gelijk is aan g^m. Dit kan geschieden door het aantal aan (262) voorafgaande getallen, dus de getallen van minder dan $m + 1$ cijfers te bepalen. Op de in n⁰. 419 aangegeven wijze vindt men daarvoor, het getal 0 medegerekend, g^m. *Daar nu ieder natuurlijk*

getal gelijk is aan het aantal der voorafgaande getallen, 0 medegerekend, blijkt zoo, dat inderdaad het getal (262) gelijk aan g^m is.

Om het aantal getallen (0 medegerekend) te vinden, die aan het door (260) voorgestelde getal voorafgaan, merken we op, dat daaronder voorkomen:

g^m getallen van minder dan $m + 1$ cijfers,

$(c_m - 1)g^m$ getallen van $m + 1$ cijfers, waarvan het eerste (van links) een der getallen $1, 2, \ldots, c_m - 1$ is,

$c_{m-1}g^{m-1}$ getallen van $m + 1$ cijfers, waarvan het eerste gelijk is aan c_m en het tweede een der getallen $0, 1, 2, \ldots, c_{m-1} - 1$ is,

$c_{m-2}g^{m-2}$ getallen van $m + 1$ cijfers, waarvan het eerste en tweede resp. c_m en c_{m-1} zijn, terwijl het derde een der getallen $0, 1, 2, \ldots, c_{m-2} - 1$ is,

enz.

Op deze wijze ziet men de gelijkheid (258) ontstaan.

425. Tweetallig en tientallig stelsel. Het eenvoudigste talstelsel is dat, waarbij het grondtal twee [1]) $(1 + 1)$ is. Uit een theoretisch oogpunt zou dit stelsel aanbeveling verdienen. Het heeft echter het practische bezwaar, dat reeds kleine getallen een lange schrijfwijze verkrijgen.

In het tweetallig stelsel heeft men slechts de cijfers 0 en 1. De natuurlijke getallen in de gewone volgorde zijn (volgens het voorschrift van n°. 422):

1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111, 10000, 10001, 10010, 10011, ...

De aldus geschreven getallen worden ***dyadische getallen*** genoemd [2]).

426. In alle beschaafde landen is als grondtal van het talstelsel het getal tien (aan te duiden als het aantal vingers van beide handen, waaraan deze keus ongetwijfeld haar ontstaan te danken heeft, of wat misschien nog beter is als $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 +$

---

[1]) We schrijven hier niet 2, daar dit teeken in het tweetallig stelsel niet voorkomt. Immers het getal twee wordt daarin als 10 geschreven.

[2]) De uitvinding van het tweetallig stelsel wordt wel aan den Chineeschen keizer Fu hi (omstreeks 2852 v. Chr.) toegeschreven.

$+ 1 + 1 + 1 + 1)$ [1]) in gebruik. De zoo verkregen beknopte en overzichtelijke schrijfwijze der getallen, die als een vinding van de grootste beteekenis te beschouwen is [2]), is van de Voor-Indiërs afkomstig [3]) en door de Arabieren omstreeks 800 tot ons gekomen.

De getallen in het tientallig of ***decimale stelsel***, die ***dekadische getallen*** heeten, worden met behulp van de bekende cijferteekens

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$$

geschreven [4]).

427. We merken nog op, dat het niet aangaat het in n⁰. 426 beschouwde talstelsel als het 10-tallige aan te duiden, daar men, om te kunnen beoordeelen welk getal met 10 bedoeld wordt, moet weten in welk talstelsel 10 geschreven is. Neemt men daarvoor juist het talstelsel, dat men bezig is te definiëeren, dan wordt het grondtal uit den aard der zaak door 10 voorgesteld, zoodat ieder ander talstelsel, even zoo goed als het tientallige, 10-tallig genoemd kan worden. Door deze aanduiding „10-tallig" is het talstelsel dus niet gedefiniëerd [5]).

---

[1]) Ook is het getal tien aan te duiden als het getal, dat in het $1 + 1 =$ tweetallig stelsel als 1010 geschreven wordt.

[2]) Men vergelijke slechts de gebrekkige Romeinsche schrijfwijze der getallen.

[3]) De tijd van het ontstaan dier schrijfwijze laat zich niet met zekerheid aanwijzen. De oudste Indische oorkonde, waarin het cijfer 0 voorkomt, is van het jaar 738 na Chr. De Indische oorsprong van ons talstelsel is den laatsten tijd ook in twijfel getrokken.

[4]) Op deze schrijfwijze zijn we vroeger reeds enkele malen (zie b.v. n⁰. 197) vooruitgeloopen. Daar ze echter algemeen bekend is en het slechts voorbeelden betrof, zijn we over deze afwijking van de geregelde volgorde heengestapt.

[5]) Men heeft hier met een niet-praedicatieve definitie (zie n⁰. 282) te doen, daar zoo het talstelsel door middel van het grondtal en het grondtal weer door middel van het talstelsel gedefiniëerd wordt; voordat de gevormde begrippen vaststaan worden ze dus reeds toegepast. De onbepaaldheid, waartoe de definitie voert, is te vergelijken met de in de noot van blz. 122 voorkomende onbepaaldheid.

Definiëert men een talstelsel T door het grondtal 11 geschreven in het talstelsel T, dan krijgt men een onmogelijkheid, niettegenstaande 11 stellig > 1 is en ieder getal > 1 als grondtal van een talstelsel te bezigen is. De oorzaak der paradox is natuurlijk weer het niet-praedicatief zijn der definitie.

428. Tweede bewijs van de stelling van Fermat. We laten hier een bewijs van de stelling van FERMAT (zie n⁰. 385) volgen, dat berust op de beschouwing der *getallen van n cijfers geschreven in het g-tallig stelsel.* Laat men ook getallen toe, die met een of meer nullen beginnen (zie n⁰. 418), alsmede het geval, dat alle cijfers nul zijn, dan bedraagt het aantal dier getallen g^n.

Ieder der g^n getallen gaat in een ander of hetzelfde dier getallen over als men de cijfers daarvan **cyclisch verwisselt,** d. w. z. *het tweede cijfer tot eerste maakt, het derde tot tweede, enz. en als laatste cijfer het eerste van het oorspronkelijke getal neemt,* dus het getal

$$c_{n-1}c_{n-2}\ .\ .\ .\ .\ c_2c_1c_0 \qquad (263)$$

vervangt door

$$c_{n-2}c_{n-3}\ .\ .\ .\ .\ c_1c_0c_{n-1}.$$

Wanneer men van het nieuwe getal weer de cijfers cyclisch verwisselt, en dit nog verder herhaalt, heeft men, na in het geheel n cyclische verwisselingen uitgevoerd te hebben, uit (263) de n de getallen

$$\begin{array}{l}
c_{n-2}c_{n-3}c_{n-4}\ .\ .\ .\ .\ c_1\ \ c_0\ \ c_{n-1},\\
c_{n-3}c_{n-4}c_{n-5}\ .\ .\ .\ .\ c_0\ \ c_{n-1}c_{n-2},\\
c_{n-4}c_{n-5}c_{n-6}\ .\ .\ .\ .\ c_{n-1}c_{n-2}c_{n-3},\\
.\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\\
c_1\ \ c_0\ \ c_{n-1}\ .\ .\ .\ .\ c_4\ \ c_3\ \ c_2\ ,\\
c_0\ \ c_{n-1}c_{n-2}\ .\ .\ .\ .\ c_3\ \ c_2\ \ c_1\ ,\\
c_{n-1}c_{n-2}c_{n-3}\ .\ .\ .\ .\ c_2\ \ c_1\ \ c_0
\end{array}$$

afgeleid. Het laatste dier getallen is weer het getal (263), waarvan we zijn uitgegaan.

Zij het q^{de} der n bovenstaande getallen het eerste, dat aan (263) gelijk is ($q \leqq n$). Dan zijn de eerste q dier getallen alle verschillend, daar, als het l^{de} getal gelijk was aan het k^{de} ($k < l \leqq q$), het $(l - 1)^{\text{ste}}$ getal gelijk zou zijn aan het $(k - 1)^{\text{ste}}$ enz. en dus het $(l - k)^{\text{de}}$ getal gelijk aan (263), hetgeen wegens $l - k < q$ in strijd is met de beteekenis van het getal q.

Is $q < n$, dan is het $(q + 1)^{\text{ste}}$ der n getallen gelijk aan het eerste, het $(q + 2)^{\text{de}}$ gelijk aan het tweede enz., zoodat men de eerste q getallen in dezelfde volgorde terugkrijgt. Daar het n^{de} getal gelijk is aan het q^{de}, maar van ieder der aan het q^{de} voorafgaande getallen verschilt, is $n \geqq 2q$. Voor $n > 2q$ krijgt men de eerste

q getallen nog eens, enz. Op deze wijze blijkt, dat de n getallen uit twee of meer groepen ieder van q getallen bestaan (welke groepen onderling niet verschillen), waaruit verder volgt, *dat q een deeler van n is.* Dit laatste is ook nog geldig voor $q = n$ en dus in ieder geval juist.

Is nu n een priemgetal, dan kan dus q slechts 1 of n zijn. Voor $q = 1$ is het eerste der n uit (263) afgeleide getallen aan (263) gelijk, dus

$$c_{n-1} = c_{n-2},\ c_{n-2} = c_{n-3},\ \ldots,\ c_2 = c_1,\ c_1 = c_0,\ c_0 = c_{n-1},$$

zoodat dan alle cijfers van (263) gelijk zijn; de n uit (263) afgeleide getallen zijn dan alle aan (263) gelijk. Dit geval doet zich bij g getallen voor, het uit g nullen bestaande getal medegerekend.

Voor ieder der $g^n - g$ overige getallen van n cijfers is $q = n$. Ieder dier getallen behoort dus tot een groep van n getallen, die alle verschillend zijn en uit een er van (onverschillig welk) door cyclische verwisseling der cijfers ontstaan. Die $g^n - g$ getallen zijn derhalve in groepen ieder van n getallen te verdeelen, waaruit blijkt, *dat $g^n - g$, d.i. $g(g^{n-1} - 1)$, door n deelbaar is.* Is nu g geen n-voud, dan is dus g^{n-1} door n deelbaar (zie de eigenschap van n⁰. 198), waarmede de stelling van FERMAT is aangetoond.

429. In het voorgaande bewijs is niet wezenlijk van de theorie der talstelsels gebruik gemaakt, daar de talstelsels slechts gediend hebben om het bewijs een eenvoudige inkleeding te geven. Hetzelfde bewijs kan dan ook zonder van talstelsels te spreken geformuleerd worden.

Hiertoe heeft men te bedenken, dat een getal in het g-tallig stelsel op te vatten is als een *manier om aan ieder der getallen 1, 2, 3, ..., n* (de rangnummers der cijfers) *een der cijfers 0, 1, 2, ..., $g - 1$ toe te voegen* (waarbij ook ieder dier cijfers meerdere malen gebezigd kan worden), dus als een *belegging der getallen 1, 2, 3, ..., n met elementen eener uit g elementen bestaande hoeveelheid* (zie n⁰. 131). Men kan nu het bewijs zoo formuleeren, dat men van zulke beleggingen spreekt en niet van getallen in het g-tallig stelsel.

---

§ 6. Het rekenen in talstelsels.

430. **Omvorming van een som van machten van g tot een getal in het g-tallig stelsel.** Zooals blijken zal, komt men zoowel bij de optelling als bij de vermenigvuldiging van getallen in het g-tallig stelsel tot uitdrukkingen van den vorm

$$t_m g^m + t_{m-1} g^{m-1} + \ldots + t_2 g^2 + t_1 g + t_0. \qquad (264)$$

Zijn de hierin voorkomende getallen t_m, t_{m-1}, ..., t_2, t_1, t_0 alle $< g$, dus getallen van één cijfer (of nul), dan is het getal (264) onmiddellijk als

$$t_m t_{m-1} \ldots t_2 t_1 t_0$$

in het g-tallig stelsel neer te schrijven.

Dit is ook nog direct mogelijk als van de getallen t_m, t_{m-1}, ..., t_1, t_0 slechts $t_m \geqq g$ is. Alleen is er dit verschil, dat t_m dan niet één cijfer van het getal (264), maar meerdere cijfers van dat getal levert.

Is nl. (in het g-tallig stelsel geschreven):

$$t_m = u_{m+k}\, u_{m+k-1} \ldots u_{m+1} u_m$$

(waarbij nu de indices niet de exponenten der bijbehoorende machten van g aanwijzen), dan is:

$$t_m = u_{m+k}\, g^k + u_{m+k-1} g^{k-1} + \ldots + u_{m+1} g + u_m,$$

zoodat het getal (264) dan gelijk is aan:

$$u_{m+k} g^{m+k} + u_{m+k-1} g^{m+k-1} + \ldots + u_{m+1} g^{m+1} + u_m g^m +$$
$$+ t_{m-1} g^{m-1} + t_{m-2} g^{m-2} + \ldots + t_2 g^2 + t_1 g + t_0,$$

hetgeen in het g-tallig stelsel geschreven luidt:

$$u_{m+k} u_{m+k-1} \ldots u_{m+1} u_m t_{m-1} t_{m-2} \ldots t_2 t_1 t_0.$$

Zoo is b.v. voor $g > 7$:

$$2343 g^5 + 7 g^4 + g^2 + 5g + 6 = 234370156.$$

431. Zijn de in (264) voorkomende getallen t_{m-1}, t_{m-2}, ..., t_2, t_1, t_0 niet alle $< g$, dan vormen we de gelijkheden:

$$\left.\begin{aligned} t_0 &= q_1 g + u_0, \\ t_1 + q_1 &= q_2 g + u_1, \\ t_2 + q_2 &= q_3 g + u_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ t_{m-1} + q_{m-1} &= q_m g + u_{m-1}, \end{aligned}\right\} \qquad (265)$$

$$t_m + q_m = u_{m+k} g^k + u_{m+k-1} g^{k-1} + \ldots + u_{m+1} g + u_m, \qquad (266)$$

waarin u_0, u_1, u_2, ..., u_{m+k} alle $< g$ zijn. Uit deze betrekkingen vindt men, door ze resp. met 1, g, g^2, ..., g^m te vermenigvuldigen, de overeenkomstige leden op te tellen en vervolgens beide leden met

$$q_1 g + q_2 g^2 + \ldots + q_{m-1} g^{m-1} + q_m g^m$$

te verminderen:

$$t_m g^m + t_{m-1} g^{m-1} + \ldots + t_2 g^2 + t_1 g + t_0 =$$
$$= u_{m+k} g^{m+k} + u_{m+k-1} g^{m+k-1} + \ldots + u_2 g^2 + u_1 g + u_0 = \qquad (267)$$
$$= u_{m+k} u_{m+k-1} \ldots u_2 u_1 u_0.$$

432. Tot de gelijkheden (265) en (266) geraakt men van zelf door met de eerste dier gelijkheden te beginnen, waardoor voor het getal (264), dat we kortweg A noemen, gevonden wordt:

$$A = t_m g^m + t_{m-1} g^{m-1} + \ldots + t_2 g^2 + (t_1 + q_1) g + u_0.$$

Dit voert tot opstelling van de tweede der gelijkheden (265), waardoor men vindt:

$$A = t_m g^m + t_{m-1} g^{m-1} + \ldots + t_3 g^3 + (t_2 + q_2) g^2 + u_1 g + u_0.$$

Dit voert tot de derde der gelijkheden (265), enz. Zoo doorgaande geraakt men tot (267).

433. *De getallen u_0, u_1, u_2, ..., u_{m-1} worden resp. gevonden als de cijfers der eenheden van de getallen*

$$t_0,\ t_1 + q_1,\ t_2 + q_2,\ \ldots,\ t_{m-1} + q_{m-1}, \qquad (268)$$

terwijl q_1, q_2, ..., q_m resp. verkregen worden door van de getallen (268) de cijfers der eenheden te schrappen. Als u_j en q_{j+1} bepaald worden, zijn t_j en q_j reeds gevonden, waarna u_j en q_{j+1} dan op de aangegeven wijze uit $t_j + q_j$ worden afgeleid.

De getallen u_m, u_{m+1}, ..., u_{m+k} zijn niets anders dan de cijfers van het getal $t_m + q_m$, *zoodat de cijfers van het door (264) voorgestelde getal gevonden worden als de cijfers der een-*

heden van de getallen (268) en alle cijfers van het getal $t_m + q_m$.

Voor de omvorming der getallen

$$t_1 + q_1,\ t_2 + q_2, \ldots,\ t_m + q_m$$

tot in het g-tallig stelsel geschreven getallen (welke omvorming in het uitvoeren van optellingen van telkens twee getallen bestaat) verwijzen we naar n°. 434—437.

We merken nog op, *dat de cijfers van het getal (264) van rechts naar links bepaald worden*, dus beginnend met het cijfer der eenheden.

434. Optelling van twee getallen in het g-tallig stelsel. We willen nu de som van twee getallen a en b, geschreven in het g-tallig stelsel, eveneens in het g-tallig stelsel neerschrijven. Bevatten a en b niet evenveel cijfers, dan kunnen we de aantallen cijfers gelijk maken door voor het kleinste getal eenige nullen te plaatsen (zie n°. 418) [1]. De getallen a en b zijn dan aldus geschreven:

$$a = c_m c_{m-1} \ldots c_2 c_1 c_0, \qquad (269)$$

$$b = d_m d_{m-1} \ldots d_2 d_1 d_0. \qquad (270)$$

Hieruit vindt men voor de som (zie de gelijkheid (258) van n°. 412):

$$S = a + b = (c_m + d_m)\, g^m + (c_{m-1} + d_{m-1})\, g^{m-1} + \ldots + \\ + (c_2 + d_2)\, g^2 + (c_1 + d_1)\, g + (c_0 + d_0) = \\ = t_m g^m + t_{m-1} g^{m-1} + \ldots + t_2 g^2 + t_1 g + t_0. \qquad (271)$$

435. De getallen

$$t_m,\ t_{m-1}, \ldots,\ t_1,\ t_0 \qquad (272)$$

worden gevonden door telkens twee getallen van één cijfer op te tellen. De bepaling der getallen (272) vordert dus de kennis van de ***tafel van optelling,*** d.w.z. de tafel, die voor ieder tweetal der getallen $1, 2, \ldots, g - 1$ de som aangeeft.

Dat we in het tientallig stelsel gemakkelijker optellen dan in een ander talstelsel (de talstelsels met grondtal 2 of 3 misschien uitgezonderd) zit natuurlijk niet daarin dat het tientallig stelsel uit den aard der zaak voordeelen bezit, die andere talstelsels

---

[1]) Bij de toepassing is natuurlijk het werkelijk neerschrijven dier nullen niet noodig. Deze dienen nl. slechts voor de redeneering.

missen, maar slechts daarin dat we alleen voor het tientallig stelsel de tafel van optelling in het geheugen geprent hebben. Heeft men b.v. de volgende tafel van optelling in het zeventallig

1	2	3	4	5	6	
2	3	4	5	6	10	1
	4	5	6	10	11	2
		6	10	11	12	3
			11	12	13	4
				13	14	5
					15	6

stelsel goed in zich opgenomen, dan kan men in dat talstelsel even gemakkelijk optellingen verrichten als in het tientallige.

Een soortgelijke opmerking geldt ook voor de overige verbindingswijzen van getallen (aftrekken, vermenigvuldigen, enz.).

436. Het laatste lid van (271) kan verder op de in n⁰. 430—433 besproken wijze tot een getal in het g-tallig stelsel herleid worden. Daar nu $t_j = c_j + d_j$ is, heeft men:

$$t_j \leqq 2(g - 1),$$

hetgeen geldt voor $j = 0, 1, 2, \ldots, m$. Uit de eerste der gelijkheden (265) volgt dan verder, dat q_1 hoogstens 1 (dus 0 of 1 is). Uit de tweede gelijkheid (265) volgt daarna:

$$q_2 g + u_1 = t_1 + q_1 \leqq 2(g - 1) + 1 = 2g - 1,$$

waaruit men besluit, dat ook q_2 hoogstens 1 is. Daaruit leidt men weer af, dat q_3 hoogstens 1 is, enz.

De eerste leden der gelijkheden (265) en (266) zijn nu dus alle $< 2g$, zoodat voor $t_m + q_m$ kan geschreven worden $q_{m+1} g + u_m$, waarin q_{m+1} weer 0 of 1 is. De gelijkheden (265) en (266) gaan bijgevolg over in:

$$\left.\begin{array}{llll} c_0 + d_0 & & = q_1 g & + u_0 \;, \\ c_1 + d_1 & + q_1 & = q_2 g & + u_1 \;, \\ c_2 + d_2 & + q_2 & = q_3 g & + u_2 \;, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{m-1} + d_{m-1} & + q_{m-1} & = q_m g & + u_{m-1}, \\ c_m + d_m & + q_m & = q_{m+1} g & + u_m \;, \end{array}\right\} \qquad (273)$$

waarin $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_m$ *alle* $< g$ *en* $q_1, q_2, \ldots, q_m, q_{m+1}$ *alle 0 of 1 zijn. De som der getallen (269) en (270) is dan:*

$$q_{m+1} u_m u_{m-1} \ldots u_2 u_1 u_0. \qquad (274)$$

Daar de optellingen voorkomende in de eerste leden van (273) met een tafel van optelling te verrichten zijn, is hiermede de gevraagde som gevonden.

437. De optelling van twee getallen is in het voorgaande tot de in n⁰. 430—433 besproken omvorming teruggebracht. Men krijgt daarbij echter een zoo eenvoudig geval dier omvorming, dat de optellingen, die daarvoor verricht moeten worden, geen moeilijkheid meer bieden.

Omgekeerd kan nu de optelling van twee getallen dienen om de omvorming van n⁰. 430—433 in meer gecompliceerde gevallen tot uitvoering te brengen. We laten hiervan een voorbeeld in het tientallig stelsel volgen:

$$\begin{array}{llllll} 349\,.\,10^5 & +\,118\,.\,10^3 & +\,37\,.\,10^2 & +\,502\,.\,10 & +\,93 & = 35126813. \\ \underline{2} & \underline{22}\quad\underline{8} & \underline{51} & \underline{9} & & \\ 35\mathit{1} & 22\quad 22\mathit{6} & 8\mathit{8} & 51\mathit{7} & 9\mathit{3} & \end{array}$$

De hiervoor te verrichten optellingen zijn slechts duidelijkheidshalve volledig neergeschreven. Ze kunnen echter met gemak uit het hoofd worden uitgevoerd, zoodat zich de uitkomst direct laat opschrijven.

438. Som van meer dan twee getallen in het g-tallig stelsel. Om de som van meerdere getallen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ te vinden zou men dit aldus tot $n - 1$ optellingen van telkens twee getallen kunnen terugbrengen (waarbij S_n de gevraagde som is):

$$S_2 = a_1 + a_2,\ S_3 = S_2 + a_3,\ S_4 = S_3 + a_4,\ \ldots,$$
$$S_{n-1} = S_{n-2} + a_{n-1},\ S_n = S_{n-1} + a_n.$$

Veel eenvoudiger is het echter direct alle termen der som in de beschouwing op te nemen, dus de som in den vorm

$$t_m g^m + t_{m-1} g^{m-1} + \ldots + t_2 g^2 + t_1 g + t_0 \qquad (264)$$

te brengen, waarin t_j de som van de cijfers der g^j-tallen voor de getallen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ is; voor een getal van minder dan $j + 1$ cijfers moet dan natuurlijk het cijfer der g^j-tallen als nul beschowd worden. De optelling dier cijfers is (als men de tafel van optelling kent) gemakkelijk uit het hoofd te verrichten.

De uitdrukking (264) moet dan verder nog tot een getal in het g-tallig stelsel herleid worden (zie n⁰. 430—433).

439. Het is aangewezen de beide in n⁰. 438 genoemde be-

werkingen (berekening der getallen (272) en herleiding tot een getal in het g-tallig stelsel) niet na elkaar, maar gecombineerd uit te voeren. Men komt zoo tot den bekenden algorithmus tot vorming van de som van een willekeurig aantal getallen. *Die algorithmus bestaat in achtereenvolgende berekening van de getallen* $s_0, s_1, s_2, \ldots, s_m$. *Hierin is* s_0 *de som van de cijfers der eenheden van de getallen* $a_1, a_2, \ldots, a_n$, *terwijl* s_j *gevonden wordt door het getal, dat ontstaat door van* s_{j-1} *het cijfer der eenheden te schrappen, met de cijfers der* g^j*-tallen van* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *te vermeerderen. De cijfers der eenheden van de getallen* $s_0, s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}$ *en alle cijfers van* s_m *leveren dan (van rechts naar links) de cijfers van de gevraagde som.*

---

440. Aftrekking van getallen in het g-tallig stelsel. We zoeken het getal

$$V = a - b$$

te bepalen, waarin $a > b$ is en a en b (geschreven in het g-tallig stelsel) door de gelijkheden (269) en (270) van n⁰. 434 worden aangewezen.

Een *eerste wijze van aftrekking* bestaat daarin, *dat het getal a in den vorm (264) gebracht wordt, er voor zorgend dat voor iedere waarde van j de aftrekking* $t_j - d_j$ *mogelijk is en een uitkomst* $< g$ *oplevert. Stelt men:*

$$v_j = t_j - d_j,$$

dan is:

$$V = v_m v_{m-1} \ldots . v_2 v_1 v_0 \tag{275}$$

het gezochte verschil.

441. Om nu het getal a in den genoemden vorm te brengen, waarbij dus

$$d_j \leqq t_j < d_j + g$$

is, gaat men aldus te werk. Is $c_0 \geqq d_0$, dan neemt men $t_0 = c_0$, terwijl $t_0 = c_0 + g$ genomen wordt als $c_0 < d_0$ is. In het laatste

geval wordt c_1 door $c_1 - 1$ vervangen om de vermeerdering van a met g weer te niet te doen. Dit proces wordt *leenen* genoemd (de eenheden leenen van de g-tallen).

Het cijfer der g-tallen is dus $c_1 - q_1$ geworden, waarin $q_1 = 0$ of $= 1$ is al naar gelang $c_0 \geqq d_0$, dan wel $< d_0$ is. Is nu $c_1 - q_1 \geqq d_1$, dan wordt $t_1 = c_1 - q_1$ genomen; zoo niet, dan neemt men $t_1 = (c - q_1) + g$, waarbij weer (om de vermeerdering met g^2 te niet te doen) het cijfer der g^2-tallen met 1 verminderd wordt, dus door $c_2 - 1$ vervangen (de g-tallen leenen van de g^2-tallen). Is $q_2 = 0$ of $= 1$ al naar gelang $c_1 - q_1 \geqq d_1$, dan wel $< d_1$ is (dus al naar gelang men bij de bepaling van t_1 niet of wel heeft moeten leenen), dan neemt men $t_2 = c_2 - q_2$ als de aftrekking $(c_2 - q_2) - d_2$ mogelijk is en anders $t_2 = (c_2 - q_2) + g$, enz. Op deze wijze worden de verschillen $t_0 - d_0$, $t_1 - d_1, t_2 - d_2$, enz. alle $< g$. Is c_l het eerste cijfer van a (van links gerekend), dat van het correspondeerende cijfer d_l van b verschilt, dan is $c_l > d_l$, daar $a > b$ ondersteld is (zie n⁰. 420 en 421). Bijgevolg is de aftrekking $(c_l - q_l) - d_l$ mogelijk, zoodat $t_l = c_l - q_l$ is. Is $l < m$, dan is $c_{l+1} = d_{l+1}$, dus de aftrekking $c_{l+1} - d_{l+1}$ mogelijk, dus $t_{l+1} = c_{l+1}$, enz. De in n⁰. 440 genoemde omvorming blijkt dus mogelijk. Opgemerkt zij nog, dat voor $l < m$ de aan v_l voorafgaande cijfers van V alle 0 zijn; ook v_l kan 0 zijn, evenals eenige der op v_l volgende cijfers van V (v_{l-1}, v_{l-2}, enz.).

442. Bij het betoog van n⁰. 441 is het geval buiten beschouwing gelaten, *dat de aftrekking* $c_1 - q_1$ *niet mogelijk is.* Dit geval doet zich voor als $c_1 = 0$ en $q_1 = 1$ (dus $c_0 < d_0$) is. Is dan c_k het eerste op c_0 volgende cijfer van a (van rechts gerekend), dat niet 0 is, dan kan men de vermeerdering van a met g te niet doen door c_k door $c_k - 1$ en de cijfers $c_{k-1}, c_{k-2}, \ldots, c_1$ (die nul zijn) alle door $g - 1$ te vervangen. De g^{k-1}-tallen leenen dan van de g^k-tallen, vervolgens de g^{k-2}-tallen van de g^{k-1}-tallen, enz. en eindelijk de g-tallen van de g^2-tallen en de eenheden van de g-tallen.

Op soortgelijke wijze handelt men als bij het verdere deel der berekening geleend moet worden, maar het volgende cijfer van a (naar links) nul is.

443. Andere aftrekkingsmethode. Men kan het getal V van n⁰. 440 ook anders bepalen, waarbij we beginnen met op te merken, dat, als a een getal van $m+1$ cijfers is, V hoogstens uit $m+1$ cijfers bestaat en dus door (275) is voor te stellen. Daar nu

$$a = V + b$$

is, heeft men volgens de gelijkheden (273) van n⁰. 436 (waarin nu $q_{m+1} = 0$ is, daar anders het getal (274), dat de som voorstelt, meer dan $m+1$ cijfers zou hebben):

$$\left.\begin{array}{llll} v_0 + d_0 & & = c_0 & + q_1 g\,, \\ v_1 + d_1 & + q_1 & = c_1 & + q_2 g\,, \\ v_2 + d_2 & + q_2 & = c_2 & + q_3 g\,, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_{m-1} + d_{m-1} & + q_{m-1} & = c_{m-1} & + q_m g, \\ v_m + d_m & + q_m & = c_m\,. & \end{array}\right\} \qquad (276)$$

Hieruit volgt:

$$\begin{array}{llll} v_0 = c_0 & + q_1 g & - d_0 & , \\ v_1 = c_1 & + q_2 g & - (d_1 + q_1) & , \\ v_2 = c_2 & + q_3 g & - (d_2 + q_2) & , \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ v_{m-2} = c_{m-2} & + q_{m-1} g & - (d_{m-2} + q_{m-2}), & \\ v_{m-1} = c_{m-1} & + q_m g & - (d_{m-1} + q_{m-1}), & \\ v_m = c_m & & - (d_m + q_m) & . \end{array}$$

De hierin voorkomende getallen $q_1, q_2, \ldots . q_m$ *zijn* (volgens het in n⁰. 436 gevondene) *alle 0 of 1.* Door deze getallen in de volgorde $q_1, q_2, \ldots$ te bepalen en ze alleen 1 te nemen als dit noodig is om de aftrekking mogelijk te maken worden de getallen $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_m$ alle $< g$. Men heeft dus:

$$q_{k+1} = 0 \quad \text{voor} \quad c_k \geqq d_k + q_k\,,$$
$$q_{k+1} = 1 \quad \text{voor} \quad c_k < d_k + q_k\,,$$

waarbij q_0 als 0 te beschouwen is.

444. Uit het in n⁰. 434 gevondene vloeit de volgende algorithmus ter bepaling van het verschil $V = a - b$ der getallen (269) en (270) (zie n⁰. 434) voort. *Het cijfer v_0 van V wordt verkregen door het cijfer c_0 zoo mogelijk met d_0 te verminderen, terwijl, zoo dit niet mogelijk is, $c_0 + g$ met d_0 wordt verminderd. Het cijfer v_1 wordt gevonden door c_1 zoo mogelijk met $d_1 + q_1$ (waarin $q_1 = 0$*

of $= 1$ *is al naar gelang de aftrekking* $c_0 - d_0$ *al of niet mogelijk is) te verminderen en anders* $c_1 + g$ *met* $d_1 + q_1$ *te verminderen, enz. In het algemeen wordt het cijfer* v_k *gevonden door zoo mogelijk* c_k *en anders* $c_k + g$ *met* $d_k + q_k$ *te verminderen, waarin* $q_k = 0$ *of* $= 1$ *is al naar gelang de aftrekking* $c_{k-1} - (d_{k-1} + q_{k-1})$ *al of niet mogelijk is.*

445. De algorithmus komt hierop neer, dat c_k door $c_k + g$ wordt vervangen, als dit noodig is om de aftrekking mogelijk te maken, waarbij dan tevens d_{k+1} door $d_{k+1} + 1$ wordt vervangen. Dit is ook als een toepassing der eigenschap van n°. 87 op te vatten. Door genoemde vervangingen wordt nl. zoowel het aftrektal a als de aftrekker b met g^{k+1} vermeerderd, hetgeen op het verschil geen invloed heeft. Dit geeft een zeer eenvoudige verklaring van den in n°. 444 beschreven algorithmus.

446. Vergelijking van beide aftrekkingsmethoden. *De aftrekkingsmethode van n°. 444 verdient boven de methode van het leenen* (zie n°. 440—442), die hier te lande de gebruikelijke is, *de voorkeur*, omdat de verklaring zooals we die in n°. 445 gegeven hebben eenvoudiger is dan die van het leenen. Dit staat daarmede in verband, dat het in n°. 442 genoemde geval, dat aan de methode van het leenen moeilijkheid in den weg legt, bij de methode van n°. 444 niets bijzonders oplevert; *de vervanging van* d_k *door* $d_k + 1$ *is nl. steeds mogelijk, die van* c_k *door* $c_k - 1$ *niet.*

447. Het voordeel van de methode van n°. 444 komt ook daarin uit, dat daarbij de aftrekking het duidelijkste als omkeering der optelling verschijnt. De in (276) voorkomende gelijkheid

$$v_k + d_k + q_k = c_k + q_{k+1}g$$

voert nl. het allereerst tot

$$v_k = c_k + q_{k+1}g - (d_k + q_k). \qquad (277)$$

Dit kan dan vervolgens worden omgezet tot:

$$v_k = \{(c_k - q_k) + q_{k+1}g\} - d_k\ ^{1}), \qquad (278)$$

---

[1]) Zie de formules (29) en (31) van n°. 77 en 79.

echter slechts dan als $c_k \geqq q_k$ is. De laatste uitdrukking voor v_k behoort bij de methode van het leenen.

De formule (278) laat ons in den steek als $c_k = 0$ en $q_k = 1$ is. Volgens (277) is dan $q_{k+1} = 1$, zoodat (278) dan aldus te schrijven is:

$$v_k = (g - 1) - d_k.$$

Dit wijst aan op welke wijze het leenen dan moet worden uitgevoerd.

---

448. Vermenigvuldiging van getallen in het g-tallig stelsel. We beschouwen het product ba, waarin b een getal van één cijfer is. Wordt a door de gelijkheid (269) van n⁰. 434, dus door de gelijkheid (258) van n⁰. 412, aangewezen, dan is wegens de distributieve eigenschap der vermenigvuldiging:

$$ba = bc_m g^m + bc_{m-1} g^{m-1} + \ldots + bc_2 g^2 + bc_1 g + bc_0. \qquad (279)$$

Om de producten bc_m, bc_{m-1}, enz. direct te kunnen neerschrijven moet men over de ***tafel van vermenigvuldiging*** in het g-tallig stelsel beschikken, dus een tafel, die voor ieder tweetal der getallen 2, 3, ..., g—1 het product aangeeft. Als voorbeeld geven we hier de tafel van vermenigvuldiging in het zeventallig stelsel:

2	3	4	5	6	
4	6	11	13	15	2
	12	15	21	24	3
		22	26	33	4
			34	42	5
				51	6

Het tweede lid van (279) wordt verder op de bekende wijze (zie n⁰. 430—433) tot een getal in het g-tallig stelsel herleid, welke herleiding natuurlijk direct met de bepaling der producten bc_0, bc_1, enz. gecombineerd en uit het hoofd uitgevoerd wordt (van rechts naar links).

449. Is ook b een getal met een willekeurig aantal cijfers, b.v.

$$b = d_n d_{n-1} \ldots d_2 d_1 d_0 =$$
$$= d_n g^n + d_{n-1} g^{n-1} + \ldots + d_2 g^2 + d_1 g + d_0, \qquad (280)$$

dan is:

$$ab = d_n a g^n + d_{n-1} a g^{n-1} + \dots + d_2 a g^2 + d_1 a g + d_0 a.$$

De getallen

$$d_n a,\ d_{n-1} a,\ \dots,\ d_2 a,\ d_1 a,\ d_0 a$$

worden op de in n⁰. 448 besproken wijze berekend. De vermenigvuldiging resp. met g^n, g^{n-1}, ..., g geschiedt door achterplaatsing van n, $n - 1$, ..., 1 nullen, waarna nog een optelling moet worden uitgevoerd. Men krijgt zoo den bekenden algorithmus der vermenigvuldiging als nog de nullen achter de producten $d_n a$, $d_{n-1} a$, enz. worden weggelaten en daarvoor inspringen der rijen in de plaats gesteld wordt.

450. Kortere vermenigvuldigingsalgorithmus. Het product der door (269) en (280) aangegeven getallen a en b kan ook gevonden worden door de algemeene distributieve eigenschap voor een product van twee factoren (zie n⁰. 100) toe te passen en de gelijknamige machten van g samen te nemen. Men vindt dan:

$$\begin{aligned} ab = {} & c_m d_n g^{m+n} + (c_{m-1} d_n + c_m d_{n-1}) g^{m+n-1} + \\ & + (c_{m-2} d_n + c_{m-1} d_{n-1} + c_m d_{n-2}) g^{m+n-2} + \\ & + \dots + (c_0 d_3 + c_1 d_2 + c_2 d_1 + c_3 d_0) g^3 + \\ & + (c_0 d_2 + c_1 d_1 + c_2 d_0) g^2 + (c_0 d_1 + c_1 d_0) g + c_0 d_0 = \\ = {} & p_{m+n} g^{m+n} + p_{m+n-1} g^{m+n-1} + \dots + p_1 g + p_0. \qquad (281) \end{aligned}$$

Hierin is

$$p_k = c_0 d_k + c_1 d_{k-1} + c_2 d_{k-2} + \dots + c_{k-1} d_1 + c_k d_0,$$

waarbij de c's met een index $> m$ en de d's met een index $> n$ als nul te beschouwen zijn.

Het laatste lid van (281) moet nu verder nog tot een getal in het g-tallig stelsel herleid worden, hetgeen reeds direct bij de berekening van p_0, p_1, p_2, enz. kan gebeuren. Als steeds begint de berekening bij het cijfer der eenheden.

451. We laten hier een voorbeeld van den in n⁰. 450 besproken algorithmus volgen (in het tientallig stelsel):

```
 431508
   7269
-------
3136631652
```

		5
	7	9 . 5 = 45
	9 . 0 = 0	6 . 0 = 0
	6 . 8 = 48	2 . 8 = 16
9 . 8 = 7***2***	5***5***	6***6***
6	10	5
9 . 1 = 9	9 . 3 = 27	9 . 4 = 36
6 . 5 = 30	6 . 1 = 6	6 . 3 = 18
2 . 0 = 0	2 . 5 = 10	2 . 1 = 2
7 . 8 = 56	7 . 0 = 0	7 . 5 = 35
10***7***	5***3***	9***6***
9		
6 . 4 = 24	4	
2 . 3 = 6	2 . 4 = 8	3
7 . 1 = 7	7 . 3 = 21	7 . 4 = 28
4***6***	3***3***	***31***

De tafeltjes dienen om de berekeningswijze volledig aan te geven (de vet-cursief gedrukte cijfers zijn die van het gezochte product).

De nu besproken methode heeft echter alleen dan voordeel boven de gewone als men met voldoende zekerheid uit het hoofd rekent om de tafeltjes te kunnen missen. Daarbij wordt dan het product direct neergeschreven en loopt de berekening aanmerkelijk vlugger af dan wanneer men de vermenigvuldiging met vier rijen uitvoert [1]).

452. Wie de berekening uit het hoofd der getallen 72, 55, 66, enz. van n⁰. 451 te lastig vindt kan de vermenigvuldiging uitvoeren door voor 7269 te schrijven:

$$72 \,.\, 10^2 + 69.$$

Is de andere factor van het gezochte product a, dan wordt dit product:

$$72a \,.\, 10^2 + 69a.$$

De vermenigvuldiging is hiermede tot twee vermenigvuldigingen met getallen van twee cijfers en een optelling teruggebracht.

---

[1]) Zeer eenvoudig wordt de verkorte vermenigvuldigingsalgorithmus als de vermenigvuldiger 11 is. Voor de berekening der cijfers van $11a$ heeft men dan telkens twee opvolgende cijfers van a op te tellen (rechts beginnend) en deze som nog met 1 te vermeerderen zoo de voorafgaande som $\geqq 10$ is.

De berekening van het in n⁰. 451 voorkomende product wordt dan aldus:

```
  431508
    7269
--------
31068576
 29774052
----------
3136631652
```

453. Door voor 7269 te schrijven

$$7 . 10^3 + 2 . 10^2 + 6 . 10 + 9$$

krijgt men den in n⁰. 449 besproken algorithmus, die in het beschouwde geval aldus verloopt:

```
     431508
       7269
    -------
    3020556
      863016
      2589048
        3883572
  -----------
  3136631652
```

Merkbaar sneller wordt echter de vermenigvuldiging uitgevoerd door niet cijfer voor cijfer van den vermenigvuldiger te beschouwen, maar groepen van twee, drie, vier of vijf cijfers (al naar de zekerheid, waarmede men uit het hoofd rekent) samen te nemen.

454. We laten hier nog een voorbeeld in het zeventallig stelsel van een vermenigvuldiging volgens den verkorten algorithmus volgen (zie voor de tafels van optelling en vermenigvuldiging in dat talstelsel resp. n⁰. 435 en 448):

```
    42352
     6031
---------
353114542
```

			2
		1	1 . 2 = 2
	1 . 5 = 5	1 . 3 = 3	3 . 3 = 12
	3 . 2 = 6	3 . 5 = 21	6 . 2 = 15
. 2 = **2**	**14**	**25**	**34**
3			
1 . 4 = 4	6		
3 . 2 = 6	3 . 4 = 15	5	2
6 . 5 = 42	6 . 3 = 24	6 . 2 = 15	6 . 4 = 33
61	**51**	**23**	**35**

In de tafeltjes zijn de producten met een factor nul weggelaten. De in die tafeltjes voorkomende berekeningen kunnen na eenige oefening uit het hoofd worden uitgevoerd.

---

455. Eigenschappen betreffende partiëele quotiënten. Het *partiëele quotiënt* (zie n⁰. 168) *der deeling van a door b* wordt (zooals reeds terloops in n⁰. 396 is opgemerkt) door

$$\left[\frac{a}{b}\right]$$

voorgesteld. *Is a door b deelbaar, dan is met dit symbool het quotiënt a : b bedoeld.*

Het partiëele quotiënt wordt derhalve gedefiniëerd door:

$$a = \left[\frac{a}{b}\right] b + r \ (r < b), \tag{282}$$

hetgeen ook aldus geschreven kan worden:

$$\left[\frac{a}{b}\right] b \leqq a < \left\{\left[\frac{a}{b}\right] + 1\right\} b. \tag{283}$$

Men kan deze definitie ook volhouden *als $a < b$ is.* Uit (283) blijkt, *dat dan onder $\left[\frac{a}{b}\right]$ het getal nul te verstaan is.*

Opgemerkt zij, *dat eens en vooral wordt uitgesloten, dat de deeler nul is.* Voor $b = 0$ kan nl. aan (283) niet worden voldaan. Wel mag $a = 0$ zijn, in welk geval ook $\left[\frac{a}{b}\right] = 0$ is.

456. Uit (282) volgt:

$$ka = \left[\frac{a}{b}\right] kb + kr \ (kr < kb),$$

waaruit men afleest:

$$\left[\frac{ka}{kb}\right] = \left[\frac{a}{b}\right]. \tag{284}$$

In woorden luidt deze formule (die ook uit (283) is af te leiden door alle leden met k te vermenigvuldigen):

Een partiëel quotiënt verandert niet als men deeltal en deeler met een zelfde getal vermenigvuldigt.

Dit getal, dat we k genoemd hebben, wordt natuurlijk > 0

ondersteld, daar anders de deeler kb nul zou worden (zie de opmerking aan het eind van n⁰. 455).

457. Heeft men:

$$a = qb + r \quad (r < b),$$
$$q = q'c + r' \quad (r' < c),$$

dan is:

$$a = q'bc + br' + r.$$

Hierin is:

$$br' + r \leqq b\,(c - 1) + (b - 1) = bc - 1 < bc.$$

waaruit blijkt, dat q' het partiëele quotiënt der deeling van a door bc is. Men heeft dus:

$$\left[\frac{\left[\frac{a}{b}\right]}{c}\right] = \left[\frac{a}{bc}\right]. \qquad (285)$$

In woorden luidt dit:

Een partiëel quotiënt wordt partiëel door een getal gedeeld door den deeler met dat getal te vermenigvuldigen.

Een onmiddellijk gevolg van deze eigenschap, dus van (285), is:

$$\left[\frac{\left[\frac{a}{b}\right]}{c}\right] = \left[\frac{\left[\frac{a}{c}\right]}{b}\right];$$

immers zoowel het eerste als het tweede lid hiervan is gelijk aan het tweede lid van (285).

458. Men kan de eigenschap van n⁰. 457 ook aantoonen door van de definitie van partiëel quotiënt uit te gaan, die in (283) staat uitgedrukt.

Men heeft nl.:

$$qb \leqq a, \; a + 1 \leqq (q + 1)\,b,$$
$$q'c \leqq q, \; q + 1 \leqq (q' + 1)\,c.$$

Door van de boven elkaar staande ongelijkheden de overeenkomstige leden te vermenigvuldigen vindt men:

$$q'bc \leqq a, \; a + 1 \leqq (q' + 1)\,bc,$$

hetgeen samen te vatten is tot:

$$q'bc \leqq a < (q' + 1)\,bc.$$

459. *Men heeft de ongelijkheden:*

$$\left[\frac{a}{c}\right] + \left[\frac{b}{c}\right] \leqq \left[\frac{a+b}{c}\right] \leqq \left[\frac{a}{c}\right] + \left[\frac{b}{c}\right] + 1. \qquad (286)$$

Volgens (283) is nl.:

$$\left[\frac{a}{c}\right]c \leqq a \quad , \quad a < \left\{\left[\frac{a}{c}\right]+1\right\}c,$$

$$\left[\frac{b}{c}\right]c \leqq b \quad , \quad b < \left\{\left[\frac{b}{c}\right]+1\right\}c,$$

$$a+b < \left\{\left[\frac{a+b}{c}\right]+1\right\}c, \quad \left[\frac{a+b}{c}\right]c \leqq a+b \quad .$$

Door de overeenkomstige leden der onder elkaar geplaatste ongelijkheden op te tellen vindt men:

$$\left\{\left[\frac{a}{c}\right]+\left[\frac{b}{c}\right]\right\}c < \left\{\left[\frac{a+b}{c}\right]+1\right\}c, \quad \left[\frac{a+b}{c}\right]c < \left\{\left[\frac{a}{c}\right]+\left[\frac{b}{c}\right]+2\right\}c,$$

$$\left[\frac{a}{c}\right]+\left[\frac{b}{c}\right] < \left[\frac{a+b}{c}\right]+1 \quad , \quad \left[\frac{a+b}{c}\right] < \left[\frac{a}{c}\right]+\left[\frac{b}{c}\right]+2 \quad ,$$

$$\left[\frac{a}{c}\right]+\left[\frac{b}{c}\right] \leqq \left[\frac{a+b}{c}\right] \quad , \quad \left[\frac{a+b}{c}\right] \leqq \left[\frac{a}{c}\right]+\left[\frac{b}{c}\right]+1 \quad .$$

Met behulp van (282) kan het bewijs van (286) aldus geleverd worden. Uit:

$$a = qc + r \quad (r < c),$$

$$b = q'c + r' \quad (r' < c),$$

volgt:

$$a+b = (q+q')c + r + r' \quad (r + r' < 2c),$$

$$\left[\frac{a+b}{c}\right] \geqq q + q',$$

$$a+b < (q+q'+2)c,$$

$$\left[\frac{a+b}{c}\right] < q + q' + 2,$$

$$\left[\frac{a+b}{c}\right] \leqq q + q' + 1.$$

460. Door volledige inductie *kan men de eigenschap van n°. 459 uitbreiden tot:*

$$\left[\frac{a_1}{c}\right]+\left[\frac{a_2}{c}\right]+\ldots.+\left[\frac{a_n}{c}\right] \leqq \left[\frac{a_1+a_2+\ldots.+a_n}{c}\right] \leqq$$

$$\leqq \left[\frac{a_1}{c}\right]+\left[\frac{a_2}{c}\right]+\ldots.+\left[\frac{a_n}{c}\right]+(n-1). \quad (287)$$

Neemt men nl. de juistheid hiervan voor een zekere waarde van n aan, dan heeft men volgens (286):

$$\left[\frac{a_1}{c}\right]+\left[\frac{a_2}{c}\right]+\ldots.+\left[\frac{a_n}{c}\right]+\left[\frac{a_{n+1}}{c}\right] \leqq \left[\frac{a_1+a_2+\ldots.+a_n}{c}\right]+\left[\frac{a_{n+1}}{c}\right] \leqq$$

$$\leqq \left[\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1}}{c}\right] \leqq \left[\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{c}\right] + \left[\frac{a_{n+1}}{c}\right] + 1 \leqq$$

$$\leqq \left[\frac{a_1}{c}\right] + \left[\frac{a_2}{c}\right] + \ldots + \left[\frac{a_n}{c}\right] + (n-1) + \left[\frac{a_{n+1}}{c}\right] + 1 =$$

$$= \left[\frac{a_1}{c}\right] + \left[\frac{a_2}{c}\right] + \ldots + \left[\frac{a_{n+1}}{c}\right] + n.$$

Hiermede zijn de ongelijkheden verkregen, waarin de ongelijkheden (287) overgaan als men daarin n door $n + 1$ vervangt, waarmede de stap van n op $n + 1$ verricht is. Daar de eigenschap volgens (286) juist is voor $n = 2$, is hiermede het bewijs geleverd.

We merken nog op, dat de eigenschap (287) ook geldt voor $n = 1$, in welk geval de beide teekens $\leqq$ door $=$ kunnen worden vervangen.

461. Eigenschappen betreffende gelijkheid en ongelijkheid van twee partiëele quotiënten. We toonen eerst aan:

Is $ad \geqq bc$, dan is:

$$\left[\frac{a}{b}\right] \geqq \left[\frac{c}{d}\right].$$

Stelt men kortheidshalve

$$\left[\frac{a}{b}\right] = q, \quad \left[\frac{c}{d}\right] = q',$$

dan is:

$$a = qb + r \quad (r < b),$$
$$c = q'd + r' \quad (r' < d).$$

Hieruit volgt:

$$ad + b(q'd + r') = bc + d(qb + r),$$

of in verband met $ad \geqq bc$:

$$(ad - bc) + bq'd + br' = dqb + dr, \tag{288}$$
$$bq'd \leqq dqb + dr.$$

Wegens $r < b$ heeft men dus:

$$bq'd < dqb + db = (q + 1)\, bd,$$
$$q' < q + 1,$$
$$q' \leqq q.$$

Gebruik makend (zooals boven) van de resten der deelingen is het bewijs het gemakkelijkst te vinden (doordat men dan eerst met gelijkheden werkt en niet direct behoeft te beslissen welke ongelijkheden moeten worden toegepast). Het bewijs kan echter belangrijk korter aldus worden neergeschreven, gebruik makend van de ongelijkheden (283) van n^0. 455:

$$\left\{\left[\frac{a}{b}\right]+1\right\}bd > ad \geqq bc \geqq \left[\frac{c}{d}\right]bd,$$

$$\left[\frac{a}{b}\right]+1 > \left[\frac{c}{d}\right].$$

462. Uit de eigenschap van n⁰. 461 leidt men door een redeneering uit het ongerijmde af:

Is

$$\left[\frac{a}{b}\right] > \left[\frac{c}{d}\right],$$

dan is $ad > bc$.

Immers uit $ad \leqq bc$ zou volgen:

$$\left[\frac{a}{b}\right] \leqq \left[\frac{c}{d}\right],$$

in strijd met het onderstelde.

De eigenschap van n⁰. 461 kan echter niet worden omgekeerd *doordat uit*

$$\left[\frac{a}{b}\right] = \left[\frac{c}{d}\right]$$

niet tot $ad = bc$ *kan worden besloten.* Zoo is b.v.:

$$\left[\frac{3}{2}\right] = \left[\frac{9}{5}\right],$$

maar $3 \,.\, 5 < 2 \,.\, 9$.

463. In de eigenschap van n⁰. 461 ligt opgesloten:

Is $a \geqq c$ *en* $b \leqq d$, *dan is:*

$$\left[\frac{a}{b}\right] \geqq \left[\frac{c}{d}\right].$$

Uit het onderstelde volgt nl. $ad \geqq bc$.

Men kan de eigenschap ook zoo formuleeren:

Een partiëel quotiënt blijft gelijk of wordt kleiner als men het deeltal verkleint of den deeler vergroot.

464. De eigenschap van n⁰. 461 kan aldus worden aangevuld:

Is $ad > bc$ *en* a *deelbaar door* b, *dan is:*

$$\frac{a}{b} > \left[\frac{c}{d}\right].$$

Uit de gelijkheid (288) van n⁰. 461, waarin $r = 0$ te stellen is, volgt dan nl.:

$$bq'd < dqb,$$

$$q' < q.$$

Bijzondere gevallen der eigenschap zijn:

Is a door b deelbaar en > c, dan is:

$$\frac{a}{b} > \left[\frac{c}{b}\right].$$

Is b < d en a deelbaar door b en > 0, dan is:

$$\frac{a}{b} > \left[\frac{a}{d}\right].$$

465. Verdere eigenschappen van partiëele quotiënten. Men heeft vooreerst:

Al naar gelang a + 1 niet of wel door b deelbaar is geldt:

$$\left[\frac{a+1}{b}\right] = \left[\frac{a}{b}\right],$$

of:

$$\frac{a+1}{b} = \left[\frac{a}{b}\right] + 1.$$

Stelt men nl.:

$$a = qb + r \quad (r < b), \tag{289}$$

dan is:

$$a + 1 = qb + r + 1 \quad (r + 1 \leqq b). \tag{290}$$

Is $r + 1 < b$, dus $a + 1$ niet door b deelbaar, dan besluit men uit (290) tot $\left[\frac{a+1}{b}\right] = q$. Is echter $r + 1 = b$, dus $a + 1$ door b deelbaar, dan voert (290) tot $\frac{a+1}{b} = q + 1$.

466. *Is voldaan aan:*

$$a \leqq b\,(b + 1), \tag{291}$$

dan is:

$$\left[\frac{a}{b}\right] \leqq \left[\frac{a}{b+1}\right] + 1.$$

In verband met de eigenschap van n⁰. 463 drukt dit uit, *dat men dan heeft:*

$$\left[\frac{a}{b}\right] = \left[\frac{a}{b+1}\right] \quad \text{of} \quad \left[\frac{a}{b}\right] = \left[\frac{a}{b+1}\right] + 1.$$

Het bewijs kan aldus geleverd worden. Is

$$a = qb + r \quad (r < b), \tag{289}$$

$$a = q'(b + 1) + r' \quad (r' < b + 1), \tag{292}$$

dan volgt hieruit:

$$qb + r = q'\,(b + 1) + r',$$

of wegens $q \geqq q'$:

$$(q - q')\,(b + 1) = r' + q - r \leqq r' + q. \tag{293}$$

Uit (289) en (291) volgt verder:

$$qb \leqq a \leqq b\,(b+1),$$

$$q \leqq b+1, \qquad (294)$$

zoodat men (lettend op $r' < b+1$) uit (293) besluit tot:

$$(q-q')\,(b+1) < 2\,(b+1),$$

$$q - q' < 2,$$

$$q \leqq q' + 1$$ [1].

467. We beschouwen nu nader het geval, *dat voldaan is aan:*

$$2a < b\,(b+1), \quad 2r' \leqq b+1,$$

waarbij de beteekenis van r' *door (292) wordt aangewezen.* Men heeft dan volgens (289):

$$2qb \leqq 2a < b\,(b+1),$$

$$2q < b+1,$$

zoodat uit (293) volgt:

$$2\,(q-q')\,(b+1) \leqq 2r' + 2q < 2\,(b+1),$$

$$q \dot{-} q' < 1,$$

$$q - q' = 0.$$

Het blijkt dus, *dat in het beschouwde geval geldt:*

$$\left[\frac{a}{b}\right] = \left[\frac{a}{b+1}\right].$$

De daarbij gemaakte onderstelling $2r' \leqq b+1$ kan ook op een der volgende wijzen worden geformuleerd:

$$2\{a - q'\,(b+1)\} \leqq b+1,$$

$$2a \leqq (2q'+1)\,(b+1),$$

$$a - q'\,(b+1) \leqq (q'+1)\,(b+1) - a. \qquad (295)$$

De ongelijkheid (295) drukt uit, *dat* $q'\,(b+1)$ *niet meer van* a *verschilt dan* $(q'+1)\,(b+1)$.

468. Insluiting van een partiëel quotiënt tusschen twee grenzen. Men heeft dienaangaande:

---

[1]) Men kan het bewijs iets korter leveren door voor (289) te schrijven, lettend op (294):

$$a + (b+1) = q\,(b+1) + (b+1-q) + r,$$

waaruit men onmiddellijk afleest:

$$\left[\frac{a}{b+1}\right] + 1 \geqq q.$$

Met het oog op n°. 467 hebben we echter het bewijs met behulp van (293) gegeven.

Is voldaan aan:

$$a'p \leqq a < (a' + 1)\,p, \qquad (296)$$

$$b'p \leqq b < (b' + 1)\,p, \qquad (297)$$

dan is:

$$\left[\frac{a'}{b'+1}\right] \leqq \left[\frac{a}{b}\right] \leqq \left[\frac{a'}{b'}\right].$$

Uit het onderstelde volgt nl., in verband met de eigenschappen van n⁰. 463 en 456:

$$\left[\frac{a}{b}\right] \geqq \left[\frac{a'p}{(b'+1)\,p}\right] = \left[\frac{a'}{b'+1}\right].$$

Evenzoo vindt men:

$$\left[\frac{a}{b}\right] \leqq \left[\frac{a'+1}{b'}\right].$$

Is nu $a' + 1$ niet door b' deelbaar, dan volgt hieruit in verband met de eigenschap van n⁰. 465:

$$\left[\frac{a}{b}\right] \leqq \left[\frac{a'+1}{b'}\right] = \left[\frac{a'}{b'}\right].$$

Is $a' + 1$ wel door b' deelbaar, dan is volgens de eigenschap van n⁰. 464 (lettend op $(a' + 1)\,b > b'a$):

$$\frac{a'+1}{b'} > \left[\frac{a}{b}\right],$$

zoodat men volgens de eigenschap van n⁰. 465 heeft:

$$\left[\frac{a'}{b'}\right] + 1 > \left[\frac{a}{b}\right],$$

$$\left[\frac{a'}{b'}\right] \geqq \left[\frac{a}{b}\right].$$

469. Uit de eigenschap van n⁰. 468 volgt in verband met die van n⁰. 466, *dat voor* $a' \geqq b'$ *en* $\leqq b'(b' + 1)$ *uit (296) en (297) besloten kan worden tot:*

$$\left[\frac{a'}{b'}\right] - 1 \leqq \left[\frac{a'}{b'+1}\right] \leqq \left[\frac{a}{b}\right] \leqq \left[\frac{a'}{b'}\right] \leqq \left[\frac{a'}{b'+1}\right] + 1.$$

Hieruit volgt:

Is aan de ongelijkheden (296) en (297) van n⁰. 468 voldaan en is $a' \geqq b'$ *en* $\leqq b'(b' + 1)$, *dan is:*

$$\left[\frac{a'}{b'+1}\right] \leqq \left[\frac{a}{b}\right] \leqq \left[\frac{a'}{b'+1}\right] + 1,$$

$$\left[\frac{a'}{b'}\right] - 1 \leqq \left[\frac{a}{b}\right] \leqq \left[\frac{a'}{b'}\right].$$

Hiermede is $\left[\frac{a}{b}\right]$ op twee manieren tusschen twee grenzen ingesloten, die 1 verschillen. Zoowel $\left[\frac{a'}{b'+1}\right]$ als $\left[\frac{a'}{b'}\right]$ verschilt dus hoogstens 1 van $\left[\frac{a}{b}\right]$, terwijl het eerste getal alleen te klein, het tweede alleen te groot kan zijn.

470. Uit de eigenschap van n°. 468 volgt in verband met het in n°. 467 gevondene:

Is aan de ongelijkheden (296) *en* (297) *van n°. 468 voldaan en*

$$2a' < b'(b'+1), \quad q' = \left[\frac{a'}{b'+1}\right],$$

terwijl $q'(b'+1)$ *niet meer van* a' *verschilt dan* $(q'+1)(b'+1)$; *dan is:*

$$\left[\frac{a}{b}\right] = q'.$$

Hiermede is de waarde van het partiëele quotiënt $\left[\frac{a}{b}\right]$ volledig aangegeven als het partiëele quotiënt $\left[\frac{a'}{b'+1}\right]$ bekend is.

---

471. Deeling van getallen in het g-tallig stelsel; het quotiënt heeft één cijfer. Zijn twee getallen a en b $(a > b)$ gegeven, dan willen we het partiëele quotiënt $\left[\frac{a}{b}\right]$ als een getal in het g-tallig stelsel bepalen. Noemen we dit quotiënt q, dan is dus:

$$a = qb + r \quad (r < b). \tag{289}$$

We beschouwen eerst het geval, *dat* $a < bg$ *is. Dan is* q *kleiner dan* g, *dus een der getallen* $1, 2, 3, \ldots, g-1$, of nog anders gezegd *een getal van één cijfer.*

Zijn de gegeven getallen in het g-tallig stelsel:

$$a = c_m c_{m-1} \ldots c_2 c_1 c_0,$$
$$b = d_n d_{n-1} \ldots d_2 d_1 d_0,$$

dan is:

$$bg = d_n d_{n-1} \ldots d_2 d_1 d_0 0,$$

zoodat men het geval $a < bg$ direct daaraan herkent, *dat òf* a *en* b *evenveel cijfers bezitten* $(m = n)$, *òf* a *één cijfer meer heeft dan* b $(m = n + 1)$ *en het eerste afwijkende cijfer van links*

gerekend (*dus* c_{n+1} *vergeleken met* d_n, c_n *met* d_{n-1}, *enz.*) *bij* a *kleiner is dan bij* b (zie n⁰. 420 en 421).

472. *Het door* (289) *aangegeven quotiënt* q *wordt door probeeren gevonden.* Dit kan geschieden door achtereenvolgens de producten

$$2b,\ 3b,\ 4b, \ldots\ldots, (g-1)\,b \qquad (298)$$

te berekenen tot men voor het eerst een product verkrijgt, dat $\geqq a$ is. Is dit product sb, dan is:

$$q = s \quad \text{voor} \quad sb = a,$$
$$q = s - 1 \quad \text{voor} \quad sb > a.$$

Is $(s-1)\,b < a$, maar is onmiddellijk te zien, dat $sb > a$ uitvalt (doordat men ziet, dat $a - (s-1)\,b < b$ is), dan behoeft het product sb natuurlijk niet berekend te worden.

Ook is het niet steeds noodig de getallen (298) beginnend met $2b$ te berekenen. Ziet men b.v. direct, dat $4b$ nog $< a$ is, dan heeft men $2b$ en $3b$ niet uit te rekenen.

Gewoonlijk kan men het gezochte getal q onmiddellijk herkennen. Dit is echter niet steeds het geval. Zijn nl. a en b getallen met een groot aantal cijfers en verschilt a b.v. weinig van $7b$, dan is het niet direct te zien of $q = 6$, dan wel $= 7$ is; dit blijkt eerst na de vermenigvuldiging $7 \,.\, b$ te hebben uitgevoerd.

473. Regel omtrent het te bepalen quotiënt. *Zijn* a' *en* b' *getallen, die uit de in n⁰. 471 en 472 beschouwde getallen* a *en* b *ontstaan door rechts een zelfde aantal cijfers te schrappen* en is j dit aantal, dan is:

$$a'g^j \leqq a < (a'+1)\,g^j, \qquad (299)$$
$$b'g^j \leqq b < (b'+1)\,g^j. \qquad (300)$$

Volgens de eigenschap van n⁰. 468 *gelden dan de ongelijkheden*

$$\left[\frac{a'}{b'+1}\right] \leqq \left[\frac{a}{b}\right] \leqq \left[\frac{a'}{b'}\right] \text{[1]}. \qquad (301)$$

Hierdoor vindt men grenzen, waartusschen het gezochte partiëele quotiënt $q = \left[\frac{a}{b}\right]$ *gelegen moet zijn* en wordt dus het aantal waarden, die men probeeren moet, beperkt.

[1]) Dit is natuurlijk ook nog het geval als het gezochte partiëele quotiënt meerdere cijfers bezit. We houden ons echter voorloopig alleen met het geval van een quotiënt van één cijfer bezig.

Het eenvoudigst zou zijn zooveel cijfers van a en b te schrappen, dat er van het getal b nog slechts één cijfer over is, in welk geval van a een of twee cijfers over zijn. De door (301) aangegeven grenzen kunnen dan echter nog tamelijk ver uit elkaar liggen, zooals blijkt door b.v.

$$a = 95738, \qquad b = 14693$$

te nemen. Men vindt dan:

$$\left[\frac{a}{b}\right] \geqq \left[\frac{9}{2}\right] = 4,$$

$$\left[\frac{a}{b}\right] \leqq \left[\frac{9}{1}\right] = 9.$$

Dit geeft een beperking der nog te probeeren waarden van q, waaraan men niet veel heeft.

474. Neemt men het getal j van n⁰. 473 zoo, dat van het getal b twee cijfers overblijven, dan is (met de notatie van n⁰. 473):

$$b' \geqq g. \tag{302}$$

Verder is (wegens de in n⁰. 471 gemaakte onderstelling) $q < g$, dus volgens (301):

$$q' = \left[\frac{a'}{b'+1}\right] \leqq q < g,$$

$$q' + 1 \leqq g.$$

Hieruit volgt:

$$a' < (q'+1)(b'+1) \leqq g(b'+1)\ ^{1)}, \tag{303}$$

dus in verband met (302):

$$a' < b'(b'+1).$$

Volgens de eigenschap van n⁰. 466 is dus het laatste lid van (301) hoogstens 1 grooter dan het eerste lid, zoodat er omtrent $\left[\frac{a}{b}\right]$ nog slechts een onzekerheid ten bedrage van 1 bestaat.

We vinden dus:

Zijn a en b in het g-tallig stelsel geschreven en zij

$$b < a < gb$$

---

[1]) Dit kan ook direct uit (299) en (300) (in verband met $a < gb$) worden afgeleid, nl. aldus:

$$a'g^j \leqq a < gb < (b'+1)g^{j+1},$$

$$a' < g(b'+1).$$

(zoodat het partiëele quotiënt $q = \left[\frac{a}{b}\right]$ *uit één cijfer bestaat); laten verder* a' *en* b' *de getallen zijn, die uit* a *en* b *ontstaan door een zelfde aantal cijfers van rechts te schrappen zoodanig, dat er twee cijfers van* b *overblijven (zoodat* b' *gevormd wordt door de eerste twee cijfers van* b*, van links gerekend, en* a' *door de eerste twee of drie cijfers van* a *al naar gelang* a *evenveel cijfers heeft als* b *of een cijfer meer). Het gezochte quotiënt* q *is dan het partiëele quotiënt* $\left[\frac{a'}{b'+1}\right]$ *of 1 grooter; evenzoo is* q *het partiëele quotiënt* $\left[\frac{a'}{b'}\right]$ *of 1 kleiner.*

Hierin wordt b natuurlijk ondersteld uit minstens twee cijfers te bestaan.

475. Blijkens het bewijs geldt de eigenschap van n⁰. 474 ook als men minder cijfers schrapt, waarbij dan b' minstens drie cijfers heeft; immers ook dan is aan de ongelijkheid (302) voldaan. Door minder cijfers te schrappen wordt echter de deeling van a' door b' of $b'+1$ minder eenvoudig, terwijl de onzekerheid van 1 blijft bestaan. Het ligt in den aard der zaak, dat, als men cijfers van a en b buiten beschouwing laat, de onzekerheid van 1 kan blijven bestaan; immers het kan voorkomen, dat zelfs de cijfers der eenheden van de uit veel cijfers bestaande getallen a en b op het gezochte quotiënt $\left[\frac{a}{b}\right]$ van invloed zijn.

476. De eigenschap van n⁰. 474 krijgt natuurlijk eerst beteekenis als b drie of meer cijfers bezit. Door een deeling van een getal van twee op een getal van twee of drie cijfers kan men dan het gezochte quotiënt bepalen met een onzekerheid 1, terwijl men het quotiënt stellig niet te groot vindt als men $\left[\frac{a'}{b'+1}\right]$ en en niet te klein als men $\left[\frac{a'}{b'}\right]$ berekend heeft.

We laten hier (in het tientallig stelsel) eenige voorbeelden volgen:

$$\left[\frac{5376}{2114}\right] = 2, \quad \left[\frac{53}{22}\right] = \left[\frac{53}{21}\right] = 2;$$

$$\left[\frac{4034}{1387}\right] = 2, \quad \left[\frac{40}{14}\right] = 2, \quad \left[\frac{40}{13}\right] = 3;$$

$$\left[\frac{4767}{2318}\right] = 2, \quad \left[\frac{47}{24}\right] = 1, \quad \left[\frac{47}{23}\right] = 2.$$

477. Geval, waarin geen onzekerheid omtrent het quotiënt bestaat. Zooals in n⁰. 475 is opgemerkt, kan geen algemeene regel gegeven worden, die in ieder geval het quotiënt (dat we nog steeds uit één cijfer bestaand onderstellen) met zekerheid doet vinden en waarbij niet alle cijfers van a (deeltal) en b (deeler) betrokken zijn. Wel laten zich echter enkele gevallen aangeven, waarbij men (onder bepaalde omstandigheden) uit een eenvoudiger deeling tot de juiste waarde van het quotiënt kan besluiten.

Daar ten aanzien van iederen regel, die men in dit opzicht geven kan, zich gevallen kunnen voordoen, waarbij die niet van toepassing is, zijn een groot aantal dergelijke regels te geven. Aangezien deze echter slechts weinig nut hebben zoo ze niet zeer eenvoudig zijn, zullen we met een enkele aanwijzing in deze richting volstaan.

478. *We onderstellen, dat het eerste cijfer van* b (dus ook van het uit twee cijfers bestaande getal b' van n⁰. 474) *niet 1 is.* Dit is ook zoo uit te drukken, *dat* $b' \geqq 2g$ *ondersteld wordt.*

In verband met de ongelijkheid (303) van n⁰. 474 is dan:

$$2a' < 2g(b' + 1) \leqq b'(b' + 1).$$

Volgens de eigenschap van n⁰. 470 *kan men dan tot*

$$\left[\frac{a}{b}\right] = q' \tag{304}$$

besluiten (*waarin* q' *het partiëele quotiënt der deeling van* a' *door* $b' + 1$ *is*) *als* $q'(b' + 1)$ *niet meer van* a' *verschilt dan* $(q' + 1)(b' + 1)$.

Onder de genoemde omstandigheden (waarvan het al of niet zich voordoen onmiddellijk te herkennen is) levert dus de deeling van a' door $b' + 1$ met zekerheid de juiste waarde van het gezochte partiëele quotiënt $\left[\frac{a}{b}\right]$. Zoo volgt bij het eerste der voorbeelden van n⁰. 476, dat dit quotiënt stellig 2 is, uit de omstandigheid, dat $2 \cdot 22 = 44$ minder van 53 verschilt dan $3 \cdot 22 = 66$.

479. *Begint het getal b* (dus ook b') *met het cijfer 1*, dan kan men volgens (302) nog steeds tot $2a' < b'\,(b'+1)$ besluiten als voldaan is aan:

$$2a' < g(b'+1),$$

hetgeen voor het tientallig stelsel luidt:

$$a' < 5(b'+1).$$

Is hieraan voldaan (hetgeen voor $a' < 55$ steeds het geval is) *en verschilt $q'(b'+1)$ niet meer van a' dan $(q'+1)\,(b'+1)$, dan geldt nog steeds de gelijkheid (304).* Het nut van dezen regel is echter reeds zeer twijfelachtig.

480. Deeling met een quotiënt van meerdere cijfers. We beschouwen nu het geval, *dat het partiëele quotiënt der getallen a en b van n⁰. 471 meerdere cijfers bevat*, dus het geval, *dat $a \geqq gb$ is.*

Zij P het kleinste der getallen

$$c_m,\ c_m c_{m-1},\ c_m c_{m-1} c_{m-2},\ \ldots\ldots,$$
$$c_m c_{m-1} \ldots\ldots c_2 c_1,\ c_m c_{m-1} \ldots\ldots c_2 c_1 c_0 = a,$$

dat $\geqq b$ is; wegens $a > b$ is zulk een getal aanwezig. Is

$$P = c_m c_{m-1} \ldots\ldots c_k,$$

dan is het aantal $m+1-k$ der cijfers van P gelijk aan $n+1$ (het aantal cijfers van b) of $n+2$, al naar gelang bij a of bij b het eerste afwijkende cijfer, van links gerekend (dus c_m vergeleken met d_n, c_{m-1} met d_{n-1}, enz.), het grootste is; zijn de cijfers d_n, $d_{n-1}, \ldots\ldots;\ d_1$, d_0 resp. gelijk aan c_m, $c_{m-1}, \ldots\ldots, c_{m+1-n}$, c_{m-n} (in welk geval de cijfers van b zijn uitgeput voordat er een afwijkend cijfer gekomen is), dan bestaat P uit $n+1$ cijfers en is gelijk aan b.

Voor het zoo bepaalde getal P geldt:

$$c_m c_{m-1} \ldots\ldots c_{k+1} < b \leqq P = c_m c_{m-1} \ldots\ldots c_{k+1} c_k, \qquad (305)$$
$$a = Pg^k + c_{k-1} c_{k-2} \ldots\ldots c_1 c_0. \qquad (306)$$

481. Uit (305) volgt:

$$b \geqq c_m c_{m-1} \ldots\ldots c_{k+1} + 1,$$
$$bg \geqq (c_m c_{m-1} \ldots\ldots c_{k+1}) \cdot g + g >$$
$$> (c_m c_{m-1} \ldots\ldots c_{k+1}) \cdot g + c_k = c_m c_{m-1} \ldots\ldots c_{k+1} c_k = P,$$

zoodat men heeft:

$$b \leqq P < bg.$$

Het partiëele quotiënt

$$w_k = \left[\frac{P}{b}\right]$$

is dus een (van nul verschillend) getal van één cijfer; dit wordt op de in n⁰. 471—479 besproken wijze bepaald.

Is nu:

$$P = w_k b + r_k \ (r_k < b), \tag{307}$$

dan wordt r_k door aftrekking gevonden. Volgens (306) en (307) is

$$a = bw_k g^k + r_k g^k + c_{k-1} c_{k-2} \ldots c_1 c_0 =$$
$$= bw_k g^k + (r_k g + c_{k-1}) g^{k-1} + c_{k-2} c_{k-3} \ldots c_1 c_0. \tag{308}$$

Nu is $r_k \leqq b - 1$, dus:

$$r_k g + c_{k-1} < (b - 1) g + g = bg.$$

Het getal w_{k-1}, dat aan

$$r_k g + c_{k-1} = w_{k-1} b + r_{k-1} \ (r_{k-1} < b) \tag{309}$$

voldoet, is dus weer een getal van één cijfer, dat echter ook nul zijn kan.

Volgens (308) en (309) is verder:

$$a = b(w_k g^k + w_{k-1} g^{k-1}) + r_{k-1} g^{k-1} + c_{k-2} c_{k-3} \ldots c_1 c_0 =$$
$$= b(w_k g^k + w_{k-1} g^{k-1}) + (r_{k-1} g + c_{k-2}) g^{k-2} + c_{k-3} \ldots c_1 c_0.$$

Hierin is $r_{k-1} g + c_{k-2} < bg$ en levert dus bij deeling door b een partiëel quotiënt w_{k-2} van één cijfer, enz.

Zoo doorgaande vindt men:

$$a = b(w_k g^k + w_{k-1} g^{k-1} + w_{k-2} g^{k-2}) +$$
$$+ (r_{k-2} g + c_{k-3}) g^{k-3} + c_{k-4} \ldots c_1 c_0 =$$
$$= \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots =$$
$$= b(w_k g^k + w_{k-1} g^{k-1} + \ldots + w_2 g^2) + (r_2 g + c_1) g + c_0 =$$
$$= b(w_k g^k + w_{k-1} g^{k-1} + \ldots + w_1 g) + r_1 g + c_0 =$$
$$= b(w_k g^k + w_{k-1} g^{k-1} + \ldots + w_1 g + w_0) + r_0,$$

waarin $r_0 < b$ is. Men heeft dus:

$$\left[\frac{a}{b}\right] = w_k g^k + w_{k-1} g^{k-1} \ldots + w_1 g + w_0 =$$
$$= w_k w_{k-1} \ldots w_1 w_0,$$

zoodat w_k, w_{k-1}, ..., w_1, w_0 de cijfers van het gezochte quotiënt zijn. Deze worden verkregen als de partiëele quotiënten bij deeling der getallen

$$P, \ r_k g + c_{k-1}, \ r_{k-1} g + c_{k-2}, \ \ldots, \ r_2 g + c_1, \ r_1 g + c_0 \tag{310}$$

door b. De getallen (310) worden gevonden door achter r_k,

$r_{k-1}, \ldots, r_1$ het eerste nog niet beschouwde cijfer van a te plaatsen (aan te halen), terwijl $r_k, r_{k-1}, \ldots, r_1$ als resten van deelingen van de in n⁰. 471—479 besproken soort optreden; de laatste rest r_0 is de rest der deeling van a door b. Dit geeft den bekenden algorithmus der deeling.

---

482. Overgang op een ander talstelsel. We willen nu het getal

$$a = c_m c_{m-1} \ldots c_2 c_1 c_0, \tag{269}$$

geschreven in het g-tallig stelsel, omvormen tot een getal in het h-tallig stelsel. Daartoe moet a in den vorm

$$d_n h^n + d_{n-1} h^{n-1} + \ldots + d_2 h^2 + d_1 h + d_0$$

gebracht worden, waarin $d_n, d_{n-1}, \ldots, d_1, d_0$ alle $< h$ zijn.

Het getal d_0 is de rest der deeling van a door h. Heeft men:

$$a = q_1 h + d_0,$$

dan is:

$$q_1 = d_n h^{n-1} + d_{n-1} h^{n-2} + \ldots + d_2 h + d_1,$$

zoodat d_1 de rest der deeling van q_1 door h is. Is verder:

$$q_1 = q_2 h + d_1,$$

dan is d_2 de rest der deeling van q_2 door h, enz. Dit gaat door totdat er een quotiënt ontstaat, dat $< h$ is; dit quotiënt is d_n, dus het eerste cijfer van a in het h-tallig stelsel, terwijl de bijbehoorende rest het tweede cijfer is. Men krijgt dus het volgende stel gelijkheden:

$$\left.\begin{array}{lll} a = q_1 h + d_0 & (d_0 < h), \\ q_1 = q_2 h + d_1 & (d_1 < h), \\ q_2 = q_3 h + d_2 & (d_2 < h), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ q_{n-2} = q_{n-1} h + d_{n-2} & (d_{n-2} < h), \\ q_{n-1} = d_n h + d_{n-1} & (d_{n-1} < h,\ d_n < h). \end{array}\right\} \tag{311}$$

In het h-tallig stelsel is het getal a dan:

$$d_n d_{n-1} \ldots d_2 d_1 d_0.$$

Opgemerkt zij nog, *dat de deelingen in het g-tallig stelsel worden uitgevoerd.*

483. De herleiding van a tot een getal in het h-tallig stelsel kan ook geschieden door voor a te schrijven:

$$a = c_m g^m + c_{m-1} g^{m-1} + \dots + c_2 g^2 + c_1 g + c_0 =$$
$$= (c_m g^{m-1} + c_{m-1} g^{m-2} + \dots + c_2 g^2 + c_1) g + c_0 =$$
$$= \{(c_m g^{m-2} + c_{m-1} g^{m-3} + \dots + c_2) g + c_1\} g + c_0 = \text{enz.}$$

Is b.v. $m = 5$, dan vindt men zoo ten slotte:

$$a = \left[\left\{\left[(c_5 g + c_4) g + c_3\right] g + c_2\right\} g + c_1\right] g + c_0.$$

De berekeningen, die men heeft uit te voeren, kunnen ook door de volgende gelijkheden worden aangegeven:

$$\left.\begin{aligned} p_{m-1} &= c_m\, g + c_{m-1}, \\ p_{m-2} &= p_{m-1} g + c_{m-2}, \\ p_{m-3} &= p_{m-2} g + c_{m-3}, \\ &\dots\dots\dots \\ p_1 &= p_2\, g + c_1\,, \\ a &= p_1\, g + c_0\,. \end{aligned}\right\} \qquad (312)$$

De vermenigvuldigingen en optellingen moeten nu in het h-tallig stelsel worden uitgevoerd, waardoor a ten slotte als een in het h-tallig stelsel geschreven getal verschijnt.

484. Vergelijking der methoden van n⁰. 482 en 483. De methoden van n⁰. 482 en 483 zijn ook onmiddellijk uit elkaar af te leiden. Wanneer men nl. de gelijkheden (311) van n⁰. 482 in omgekeerde volgorde leest kunnen ze ook dienen om het in het h-tallig stelsel geschreven getal a tot een getal in het g-tallig stelsel om te vormen. Men krijgt zoo echter de methode van n⁰. 483. Beide methoden zijn dus als elkaars omgekeerde te beschouwen.

Men kan de twee beschreven methoden aanduiden als die der *deeling in het oorspronkelijke* en die der *vermenigvuldiging in het nieuwe talstelsel.* Is een der beide talstelsels het tientallige, dan zal men die methode kiezen, waarbij in het tientallig stelsel gerekend wordt.

Als men de methode van n⁰. 482 toepast wordt ondersteld, dat bekend is *hoe de cijfers en het grondtal h van het nieuwe talstelsel in het oude talstelsel* (*dat met grondtal g*) *geschreven worden.* Men begint bij die methode met h in het g-tallig stelsel te schrijven en heeft dan verder nog de door de deelingen opge-

leverde resten d_0, d_1, ..., d_n (die in het g-tallig stelsel gevonden worden) als cijfers in het h-tallig stelsel te schrijven.

Bij toepassing der methode van n⁰. 483 wordt daarentegen bekend ondersteld *hoe cijfers en grondtal van het oude talstelsel in het nieuwe talstelsel* (*dat met grondtal h*) *geschreven worden*. Men begint daarbij met het oude grondtal g en de oorspronkelijke cijfers c_m, c_{m-1}, ..., c_1, c_0 als getallen in het h-tallig stelsel te schrijven, waarna de door (312) aangegeven berekeningen worden uitgevoerd.

485. Het *omvormen van cijfers en grondtal van het g-tallig stelsel tot in het h-tallig stelsel geschreven getallen* kan geschieden door die cijfers in de natuurlijke volgorde neer te schrijven en daaronder de getallen in het h-tallig stelsel, eveneens in de natuurlijke volgorde (dus naar de grootte gerangschikt), hetgeen op de in n⁰. 422 aangegeven wijze geschieden kan. Men zou zoo ook ieder getal van het eene talstelsel in het andere kunnen overbrengen, hetgeen echter bij groote getallen een zeer omslachtige methode is.

Het is natuurlijk aangewezen *die cijfers van het eene talstelsel, die ook in het andere talstelsel getallen van één cijfer zijn, in laatstgenoemd talstelsel door dezelfde teekens voor te stellen als in het eerste*, dus voor een getal kleiner dan beide grondtallen in beide talstelsels hetzelfde cijferteeken te kiezen. Is $h > g$, dan heeft men dus voor de omvorming van cijfers en grondtal van het g-tallig stelsel tot getallen in het h-tallig stelsel slechts te weten door welk cijferteeken g in het h-tallig stelsel wordt aangewezen. Is $h < g$, dan moet men op de aangegeven wijze een tabel aanleggen, die de cijfers van het g-tallig stelsel, welke $> h$ zijn, benevens het grondtal g zelf, in het h-tallig stelsel aangeeft.

We laten hier zulk een tabel volgen, die cijfers en grondtal van het vierentwintigtallig stelsel in het viertallig stelsel uitdrukt:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*a*	*b*	
0	1	2	3	10	11	12	13	20	21	22	23	
c	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*	*k*	*l*	*m*	*n*	10
30	31	32	33	100	101	102	103	110	111	112	113	120

Hierin stellen a, b, c, ..., n de cijferteekens in het vierentwintigtallig stelsel voor, die op 9 volgen, dus $a =$ tien, $b = 11$, enz.

We merken nog op, *dat het vervaardigen van zulk een tabel overbodig is als men die methode kiest, waarbij in het talstelsel met het grootste grondtal gerekend wordt*, dus de methode van n⁰. 482 als men op een kleiner en de methode van n⁰. 483 als men op een grooter grondtal overgaat. Het kleinste grondtal is nl. direct als een cijfer van het andere talstelsel te schrijven en wel als het cijfer volgend op het grootste cijfer voorkomend in het talstelsel met het kleinste grondtal.

486. Voorbeeld ter toelichting. Als voorbeeld nemen we de omvorming van het getal 352406, geschreven in het zeventallig stelsel, tot een getal in het negentallig stelsel. Het nieuwe grondtal h is dan (in het oorspronkelijke, dus in het zeventallig stelsel) 12. De berekening volgens de methode van n⁰. 482 loopt aldus (in het zeventallig stelsel):

```
12 /352406\ 26336            12 /26336\ 2164
  / 24     \                   / 24    \
    112                            23
    105                            12
     44                            113
     36                            105
      50                            56
      36                            51
     116                             5
     105
      11 1)

12 /2164\ 152      12 /152\ 12      12 /12\ 1
  / 12   \           / 12  \          / 12 \
    66                 32                0
    63                 24
     34                 5
     24
     10 2)
```

In het negentallig stelsel is het getal dus 105758.

[1]) Dit geeft in het negentallig stelsel het cijfer 8 (zie n⁰. 484).

[2]) Dit geeft in het negentallig stelsel het cijfer 7.

De berekening volgens de methode van n⁰. 483 is als volgt (in het negentallig stelsel):

```
   3            222             1685
   7 ×            2 +              7 ×
  23            224            13358
   5 +            7 ×              7 ×
  28           1681           105752
   7 ×            4 +              6 +
 222           1685           105758
```

Wil men becijferingen in andere talstelsels dan het tientallige vermijden, dan kan men het getal eerst tot het tientallig stelsel herleiden (met de methode van n⁰. 483) en vervolgens tot het negentallig stelsel (volgens de methode van n⁰. 482). De berekening is dan aldus:

```
   3            182             1292
   7 ×            2 +              7 ×
  21            184             9044
   5 +            7 ×              7 ×
  26           1288            63308
   7 ×            4 +              6 +
 182           1292            63314
```

```
9 /63314\ 7034            9 /7034\ 781
 / 63    \                 / 63   \
   31                         73
   27                         72
    44                         14
    36                          9
     8                          5

9 /781\ 86         9 /86\ 9          9 /9\ 1
 / 72  \            / 81 \            / 9 \
   61                  5                 0
   54
    7
```

In het tientallig stelsel is het getal dus 63314 en in het negentallig stelsel 105758.

Hoewel men daarbij meer heeft neer te schrijven, voert de

laatste berekening allicht het snelst tot het doel door de grootere gemakkelijkheid, waarmede men in het tientallig stelsel rekent.

487. Wanneer men omgekeerd het in het negentallig stelsel geschreven getal 105758 tot het zeventallig stelsel wil herleiden is de (in het negentallig stelsel uitgevoerde) berekening volgens de methode van 482 aldus (bedenkend, dat het nieuwe grondtal in het negentallig stelsel als 7 wordt geschreven):

```
7 /105758\ 13358        7 /13358\ 1685
 / 7      \              / 7     \
   25                      53
   23                      46
    27                      65
    23                      62
     45                      38
     38                      38
      68                      0
      62
       6

7 /1685\ 224      7 /224\ 28      7 /28\ 3
 / 15   \          / 15  \         / 23 \
   18                64               5
   15                62
    35                2
    31
     4
```

Het getal is dus in het zeventallig stelsel 352406.

Bij de methode van n°. 483 begint men met de cijfers 7 en 8 van het getal 105758 en het grondtal van het negentallig stelsel in het zeventallig stelsel resp. als 10, 11 en 12 te schrijven. De berekening is dan aldus (in het zeventallig stelsel):

```
   1               152               26331
  12                12                   5
  --- ×           ---- ×            ----- +
  12              2154               26336
  12                10                  12
  --- ×           ---- +            ------ ×
 144              2164              352365
   5                12                  11
  --- +           ----- ×           ------ +
 152              26331             352406
```

De omvorming via het tientallig stelsel laten we aan den lezer over.

HOOFDSTUK III.

INVOERING DER NEGATIEVE GEHEELE GETALLEN.

---

§ 1. Stelsels getallen, waarbij de aftrekking onbeperkt mogelijk is.

488. Permanentie der rekenregels. Wanneer we van de in Hoofdst. I, § 8 besproken transfiniete (oneindige) getallen verder geheel afzien, kunnen de tot nu toe beschouwde getallen, dit zijn de *natuurlijke getallen en het getal nul*, als *aantallen elementen eener eindige hoeveelheid* optreden. We duiden deze daarom (zooals reeds in n^0. 291 is opgemerkt), in tegenstelling met de getallen, die nog zullen worden ingevoerd (negatieve getallen, gebroken getallen enz.), als ***aantallen*** aan.

Het stelsel der aantallen heeft het vaak hinderlijke bezwaar, *dat daarin de aftrekking en de deeling niet steeds mogelijk is.* Met de uitbreidingen, die het getalbegrip heeft ondergaan, wordt beoogd *deze omgekeerde verbindingen mogelijk te maken* (waarbij dan echter, zooals blijken zal, aan de deeling steeds de beperking moet worden opgelegd, dat de deeler niet nul is).

Aan iedere uitbreiding van het getalbegrip wordt (zooals het woord uitbreiding reeds uitdrukt) de eisch gesteld, *dat de reeds vroeger gevormde getallen deel uitmaken van het nieuwe stelsel getallen*, dus dat aan het reeds aanwezige stelsel iets wordt toegevoegd, maar niets daarvan wordt weggelaten.

Natuurlijk moeten bij iedere uitbreiding de begrippen „grooter" „som" en „product" opnieuw gedefiniëerd worden. Hierbij wordt verlangd, dat daardoor geen wijziging in die begrippen

gebracht wordt voor de tweetallen getallen, die beide reeds vóór de beschouwde uitbreiding tot het stelsel getallen behoorden, dus *dat de nieuwe definities van grooter, optelling en vermenigvuldiging voor deze paren getallen op hetzelfde neerkomen als de oude.*

489. Bij het uitbreiden van het getalbegrip laat men zich verder daardoor leiden, *dat men de rekenregels, die voor aantallen gelden, wenscht te behouden.* Dit is door HANKEL [1]) het ***beginsel van de permanentie** der formeele wetten* genoemd.

Om verzekerd te zijn, dat de verschillende eigenschappen na de uitbreiding van het getalstelsel geldig gebleven zijn, behoeft men er zich slechts van te overtuigen, *dat de grondeigenschappen behouden blijven,* daar dit dan voor de daaruit afgeleide eigenschappen van zelf het geval is (zie n^0. 10).

490. We resumeeren hier nog eens de grondeigenschappen, daaronder ook het *bestaan* der verbindingen „optellen" en „vermenigvuldigen" opnemend. Daarbij verdeelen we die eigenschappen in twee groepen.

I. Grondeigenschappen der rechtstreeksche verbindingen.

a) *Er is een verbinding „optelling", die uit ieder tweetal getallen van het stelsel één en slechts één getal van dat stelsel doet vinden.* Of anders gezegd: *de optelling is in dat stelsel mogelijk en ondubbelzinnig.*

b) *De optelling is commutatief;* $a + b = b + a$.

c) *De optelling is associatief;* $(a + b) + c = a + (b + c)$.

d) *De optelling bezit een modulus;* $a + 0 = a$.

e) *Er is een tweede verbinding „vermenigvuldiging", die uit ieder tweetal getallen van het stelsel één en slechts één getal van dat stelsel doet vinden.* Of anders gezegd: *de vermenigvuldiging is in dat stelsel mogelijk en ondubbelzinnig.*

f) *De vermenigvuldiging is commutatief;* $ab = ba$.

g) *De vermenigvuldiging is associatief;* $a(bc) = (ab)c$.

h) *De vermenigvuldiging is distributief ten opzichte van de optelling;* $(a + b)c = ac + bc$.

---

[1]) HERMANN HANKEL. Theorie der complexen Zahlensysteme. 1867.

i) *De vermenigvuldiging bezit een modulus;* $1 \cdot a = a$.

II. ***Grondeigenschappen der volgorde*** *(grooter en kleiner).*

a) *Voor ieder tweetal getallen* a *en* b *van het stelsel bestaat één en slechts één der drie volgende betrekkingen:*

$$a = b,$$
$$a > b \text{ (ook te schrijven als } b < a),$$
$$a < b \text{ (ook te schrijven als } b > a).$$

b) *Is* $a > b$ *en* $b > c$, *dan is* $a > c$.

c) *Is* $a > b$, *dan is* $a + c > b + c$.

491. Algemeene eigenschap betreffende de mogelijkheid en ondubbelzinnigheid der aftrekking. Zooals reeds in n⁰. 68 is opgemerkt, blijft de aftrekking bij iedere uitbreiding van het getalbegrip als de *omkeering der optelling* gedefiniëerd. Het gaat er daarbij dus om *het getal* x *zoo te bepalen, dat aan*

$$x + b = a \qquad (23)$$

voldaan is, waarin a *en* b *gegeven getallen zijn.*

De vraag, die zich nu voordoet, is deze *of aan de vergelijking (23) kan worden voldaan en of aan die vergelijking door niet meer dan één getal kan worden voldaan,* dus of de aftrekking *mogelijk* en *ondubbelzinnig* is.

Men heeft dienaangaande de volgende algemeene eigenschap: *Voor een stelsel getallen is de aftrekking steeds mogelijk en ondubbelzinnig als de eigenschappen Ia, b* [1]*), c, d van n⁰. 490 (grondeigenschappen der optelling) gelden en bovendien de aftrekking van nul (d. w. z. met aftrektal nul) steeds mogelijk is.*

In het ondersteld behoeft niet te worden opgenomen, dat de aftrekking van nul ondubbelzinnig is. Die ondubbelzinnigheid blijkt achteraf (d. w. z. als de stelling is aangetoond) van zelf aanwezig te zijn als gevolg van de mogelijkheid der aftrekking van nul.

492. Om de *ondubbelzinnigheid der aftrekking* aan te toonen nemen we aan, dat door een zekere waarde van x aan de vergelijking (23) voldaan is. Volgens het laatste deel van het onder-

---

[1]) De commutatieve eigenschap der optelling maakt, dat er van slechts *één soort aftrekking* sprake is (zie n⁰. 68).

stelde der eigenschap van n⁰. 491 kan men een getal y bepalen, waarvoor aan

$$y + b = 0 \tag{313}$$

voldaan is. Hieruit volgt in verband met (23):

$$(x + b) + y = a + y,$$
$$x + (y + b) = a + y,$$
$$x + 0 = a + y,$$
$$x = a + y. \tag{314}$$

Hiermede is aangetoond, *dat het getal x, dat aan de vergelijking (23) van n⁰. 490 voldoet, niets anders zijn kan dan $a + y$*, dus dat de aftrekking, zoo ze mogelijk is, ondubbelzinnig is.

In het bijzonder kan men dus besluiten, dat aan de vergelijking

$$x + b = b,$$

waaraan voldaan is door $x = 0$, door geen andere waarde van x voldaan wordt, dus *dat de optelling geen andere modulus heeft dan het getal 0* (iets dat voor het bewijs niet behoefde ondersteld te worden).

We merken nog op, *dat bij dit bewijs van de ondubbelzinnigheid der aftrekking niet* (zooals in n⁰. 69) *van de grondeigenschappen der volgorde gebruik gemaakt is*, maar dat in plaats daarvan nu de mogelijkheid der aftrekking van nul getreden is.

493. Daar in n⁰. 492 uitgegaan is van de nog niet bewezen onderstelling, dat aan de vergelijking (23) kan worden voldaan, en alleen bewezen is, dat *als daaraan kan worden voldaan* dit slechts door $x = a + y$ mogelijk is, moet nog worden aangetoond, dat door $x = a + y$ werkelijk aan (23) voldaan wordt. Dit geschiedt door $x = a + y$ in het eerste lid van (23) te substitueeren (d. w. z. daarin x door $a + y$ te vervangen), waardoor dit overgaat in:

$$(a + y) + b = a + (y + b) = a + 0 = a$$

en dus inderdaad gelijk wordt aan het tweede lid van (23). Hiermede is (uitgaande van de in n⁰. 491 genoemde onderstellingen) de *mogelijkheid der aftrekking* aangetoond.

494. Gevolgen van de mogelijkheid der aftrekking. In het voorgaande is gebleken, *dat de aftrekking mogelijk en ondubbelzinnig is*, als het getalstelsel van dien aard is, dat behalve de in

n⁰. 490 genoemde grondeigenschappen nog de volgende *grondeigenschap* geldt:

De aftrekking van nul (modulus der optelling) is mogelijk.

Alvorens tot een zoodanige uitbreiding van het getalbegrip over te gaan, dat die grondeigenschap geldig wordt, zullen we daaruit enkele gevolgtrekkingen afleiden.

495. Om te beginnen merken we op, *dat de formules* (*29*), (*31*)—(*38*), (*42*) *en* (*59*)—(*61*) *van n⁰. 77, 79—83, 87 en 103—104 zonder uitzondering geldig geworden zijn*, dus zonder dat beperkende ongelijkheden (die dienden om de verschillende aftrekkingen mogelijk te maken) noodig zijn; de van die formules gegeven bewijzen, die op de grondeigenschappen van n⁰. 490 berusten, blijven nl. van kracht. De door de formules uitgedrukte eigenschappen krijgen nu niet alleen een *eenvoudiger formuleering*, maar ook een *ruimere geldigheid*. Hierin bestaat het groote voordeel der uitbreiding van het getalbegrip.

Tevens zal blijken, *dat de genoemde formules door de onbeperkte mogelijkheid der aftrekking op veel eenvoudiger, of althans doorzichtiger, wijze kunnen worden aangetoond* (zie n⁰. 499 en 511) en zoo kunnen worden opgevat, dat ze slechts als bijzondere vormen verschijnen van formules, waarin geen aftrekking maar optelling voorkomt. Dit geeft een aanmerkelijke *vereenvoudiging der theorie.*

496. De eigenschappen van n⁰. 84, 85 en 88 kunnen nu korter zoo worden uitgesproken:

Is $a > b$, *dan is* $a - c > b - c$.

Men heeft dan en alleen dan $a - b = c - d$ *als* $a + d = c + b$ *is.*

Men heeft dan en alleen dan $a - b > c - d$ als $a + d > c + b$ *is.*

De daarvan gegeven bewijzen blijven geldig, maar kunnen weer op meer overzichtelijke wijze gegeven worden (zie n⁰. 500).

497. Terugbrenging der aftrekking tot de optelling. We maken nu eenige verdere gevolgtrekkingen uit de grondeigenschappen van n⁰. 490 en 494.

De oplossing der vergelijking (23) van n⁰. 491 wordt door $a - b$ voorgesteld. De oplossing der vergelijking (313) van n⁰. 492 is dan $0 - b$, *waarvoor men kortweg* $-b$ *schrijft.* Men kan dus ook

zeggen, *dat het getal* $-b$ *gedefiniëerd wordt door de betrekking*

$$-b+b=0. \tag{315}$$

In deze formule (die ook als $b+(-b)=0$ geschreven kan worden) spelen de getallen b en $-b$ dezelfde rol, m. a. w. *het verband tusschen* b *en* $-b$ *is* ***wederkeerig*** *of* ***reciprook.*** Van deze getallen wordt het eene het ***tegengestelde*** van het andere genoemd.

De wederkeerigheid van het verband tusschen b en $-b$ wordt ook uitgedrukt door de uit (315) voortvloeiende formule:

$$-(-b)=b. \tag{316}$$

Uit $0+0=0$ volgt $0=0-0$, dus:

$$-0=0, \tag{317}$$

zoodat het getal nul gelijk is aan zijn tegengestelde.

498. Door de notaties van n°. 497 kan voor de vergelijking (314) van n°. 492 (die de oplossing der vergelijking (23) aangeeft) geschreven worden:

$$a-b=a+(-b). \tag{318}$$

Deze belangrijke formule drukt uit, *dat de aftrekking op te vatten is als vervanging van den aftrekker door zijn tegengestelde* (waarbij dus de aftrekker van nul wordt afgetrokken) *gevolgd door optelling bij het aftrektal.*

Door deze terugbrenging van de aftrekking tot optelling kunnen verschillende eigenschappen der aftrekking als eigenschappen van de optelling geïnterpreteerd worden.

499. Vereenvoudiging van de eigenschappen der aftrekking. Met behulp van de formule (318) kunnen de formules (29), (36) en (37) van n°. 77 en 83 aldus uit de eigenschappen der optelling worden afgeleid:

$$a+(b-c)=a+\{b+(-c)\}=$$
$$=(a+b)+(-c)=(a+b)-c, \tag{29}$$
$$(a-b)-c=\{a+(-b)\}+(-c)=$$
$$=\{a+(-c)\}+(-b)=(a-c)-b, \tag{36}$$
$$a+(b-c)=a+\{b+(-c)\}=$$
$$=b+\{a+(-c)\}=b+(a-c). \tag{37}$$

Ook kan (37) door tweemalige toepassing van (29) worden aangetoond.

500. Op soortgelijke wijze bewijst men de eigenschappen van n⁰. 496. Uit $a > b$ volgt in verband met de eigenschap *IIc* van n⁰. 490:

$$a + (-c) > b + (-c),$$
$$a - c > b - c,$$

waarmede de eerste eigenschap van n⁰. 496 is aangetoond.

Uit $a - b = c - d$ volgt:

$$a + (-b) = c + (-d),$$
$$a + (-b) + b + d = c + (-d) + b + d,$$
$$a + d = b + c.$$

Evenzoo vormt men de laatste gelijkheid tot $a - b = c - d$ om, waarmede de tweede eigenschap van n⁰. 496 is aangetoond. Een overeenkomstig bewijs kan van de derde eigenschap gegeven worden.

501. De in n⁰. 499 en 500 gegeven bewijzen zijn zoo eenvoudig, dat het nauwelijks de moeite waard is de betreffende eigenschappen der aftrekking naast de eigenschappen der optelling, waartoe ze zijn teruggebracht, te vermelden. Door $a - b$ slechts als een afkorting voor $a + (-b)$ te beschouwen, kan men zeggen, *dat de in n⁰. 499 bewezen formules niets anders dan reeds bekende eigenschappen der optelling zijn.*

Door de formule (318) kan de aftrekking om zoo te zeggen als nieuwe verbinding worden uitgeschakeld, mits men het *vormen van het tegengestelde van een getal* behoudt. Dienovereenkomstig heeft men in een uitdrukking als

$$a - b - c + d \qquad (319)$$

een optelling der vier getallen a, $-b$, $-c$ en d te zien, waarmede tevens gezegd is, dat de bepaling van (319) van links naar rechts moet worden uitgevoerd, dus dat daarmede bedoeld is:

$$\{(a - b) - c\} + d.$$

---

502. Product met een factor nul. Uit de grondeigenschappen *I* van n⁰. 490 volgt:

$$ab + a \,.\, 0 = a\,(b + 0) = ab.$$

Hieruit volgt in verband met de grondeigenschappen *IIa* en *c*:

$$0 \,.\, a = a \,.\, 0 = 0; \tag{320}$$

uit $a \,.\, 0 > 0$ of < 0 zou nl. volgen:

$$ab + a \,.\, 0 > ab \text{ of } < ab.$$

In woorden luidt (320):

Een product is nul als een zijner factoren nul is.

Deze eigenschap, die we in n⁰. 304 voor aantallen hebben aangetroffen, is dus een gevolg van de grondeigenschappen van n⁰. 490 en bijgevolg zelf geen grondeigenschap. Bij de verschillende uitbreidingen van het getalbegrip behoeft dus de formule (320) niet afzonderlijk te worden aangetoond (hetgeen overigens zonder moeite geschieden kan).

503. De formule (320) kan ook uit de grondeigenschappen *I* van n⁰. 490 in verband met de grondeigenschap van n⁰. 494 worden afgeleid. Uit de formule (315) van n⁰. 497 volgt nl.:

$$a \,.\, 0 = 0 + a \,.\, 0 =$$
$$= (-\, ab + ab) + a \,.\, 0 = -\, ab + (ab + a \,.\, 0) =$$
$$= -\, ab + a\,(b + 0) = -\, ab + ab = 0.$$

In plaats van de grondeigenschappen der volgorde is hierbij de mogelijkheid der aftrekking van nul gebruikt.

504. Enkele eigenschappen betreffende vermenigvuldiging en aftrekking. Uit (315) volgt in verband met (320):

$$a\,(-\,b + b) = a \,.\, 0,$$
$$a\,(-\,b) + ab = 0,$$

dus:

$$a\,(-\,b) = -\,(ab). \tag{321}$$

In woorden luidt dit (door van het tweede lid uit te gaan): *Men vormt het tegengestelde van een product door een der factoren van het product door zijn tegengestelde te vervangen.*

Uit (321) volgt natuurlijk verder nog:

$$a\,(-\,b) = (-\,a)\,b.$$

505. Uit (321) vindt men door $b = 1$ te nemen:

$$a\,(-\,1) = -\,(a \,.\, 1),$$

dus:

$$(-\,1)\,a = -\,a. \tag{322}$$

In woorden luidt dit:

Door een getal met — 1 te vermenigvuldigen krijgt men het tegengestelde van dat getal.

Men kan dit ook zoo uitdrukken, *dat aftrekken van nul op hetzelfde neerkomt als vermenigvuldigen met — 1.*

506. Uit (321) volgt door a door $-a$ te vervangen;

$$(-a)(-b) = -\{(-a)b\} = -(-ab),$$

dus in verband met (316):

$$(-a)(-b) = ab. \qquad (323)$$

Men heeft dus:

Een product van twee factoren verandert niet als men beide factoren door hun tegengestelde vervangt.

Deze eigenschap, die van n⁰. 504 en die van n⁰. 505 zijn blijkbaar afgeleide eigenschappen. We merken nog op, *dat voor het bewijs daarvan niet van de grondeigenschappen der volgorde gebruik is gemaakt.*

507. Door in (323) $a = b = 1$ te nemen vindt men:

$$(-1)^2 = 1. \qquad (324)$$

Hieruit leidt men verder af:

$$(-1)^3 = (-1)(-1)^2 = (-1) . 1 = -1,$$
$$(-1)^4 = (-1)(-1)^3 = (-1)^2 = 1,$$
$$(-1)^5 = (-1)(-1)^4 = (-1) . 1 = -1,$$

enz.

Men vindt zoo:

$$(-1)^n = 1 \quad \textit{als } n \textit{ even is,}$$
$$(-1)^n = -1 \quad \textit{als } n \textit{ oneven is.}$$

Dit kan ook aldus geschreven worden:

$$(-1)^{2n} = 1, \; (-1)^{2n+1} = -1. \qquad (325)$$

Hierin is n een aantal.

Uit (322) en (324) zijn, in verband met de commutatieve, associatieve en de moduluseigenschap der vermenigvuldiging, aldus de formules (321) en (323) terug te vinden:

$$a(-b) = a\{(-1)b\} = (-1)(ab) = -(ab),$$
$$(-a)(-b) = \{(-1)a\}\{(-1)b\} =$$
$$= (-1)^2 (ab) = 1 . (ab) = ab.$$

De formules (322) en (324) maken dus de formules (321) en (323) min of meer overbodig.

508. Verdere vereenvoudiging van de eigenschappen der aftrekking. Met behulp van (322) kan de formule (318) van n⁰. 498 ook aldus geschreven worden:

$$a - b = a + (-1)b. \tag{326}$$

Hierdoor is de aftrekking tot *vermenigvuldigen met — 1 en optellen* teruggebracht.

Dit maakt, *dat zonder uitzondering alle eigenschappen der aftrekking een onmiddellijk uitvloeisel worden van die van de optelling en de vermenigvuldiging.* De bijbehoorende formules zijn nl. door slechts aan optellen en vermenigvuldigen te denken onmiddellijk neer te schrijven. Men krijgt zoo een nog verder gaande vereenvoudiging dan de in n⁰. 499—501 besprokene (zie n⁰. 511).

509. Uit de distributieve eigenschap der vermenigvuldiging volgt in verband met de formule (322) van n⁰. 505:

$$-(a+b) = (-1)(a+b) = (-1)a + (-1)b = -a + (-b).$$

Men heeft dus:

$$-(a+b) = -a + (-b), \tag{327}$$

hetgeen ook zoo te schrijven is:

$$-(a+b) = -a - b.$$

Vervangt men in (327) b door $-b$, dan vindt men volgens (316) en (318):

$$-(a-b) = -a + b. \tag{328}$$

510. Door volledige inductie is (327) aldus tot een som van een willekeurig aantal termen uit te breiden:

$$-(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = -a_1 + (-a_2) + \ldots + (-a_n), \tag{329}$$

of:

$$-\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} - a_i.$$

In plaats hiervan schrijft men ook:

$$-(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = -a_1 - a_2 - \ldots - a_n.$$

In woorden luidt (329):

Men vormt het tegengestelde van een som door ieder der termen van die som door zijn tegengestelde te vervangen.

511. Met behulp van (327) en (328) kan men zonder eenige moeite al die formules voor den dag brengen, waarbij het teeken — voor een uitdrukking tusschen haakjes staat. We laten hiervan eenige voorbeelden volgen:

$$(a - b) - c = \{a + (-b)\} + (-c) =$$
$$= a + \{-b + (-c)\} = a + \{-(b + c)\} =$$
$$= a - (b + c), \qquad (31)$$
$$a - (b - c) = a + \{-(b - c)\} =$$
$$= a + (-b + c) = (a + c) + (-b) =$$
$$= (a + c) - b, \qquad (32)$$
$$(a - b) - (c - d) = \{a + (-b)\} + \{-(c - d)\} =$$
$$= \{a + (-b)\} + (-c + d) = (a + d) + \{-b + (-c)\} =$$
$$= (a + d) + \{-(b + c)\} = (a + d) - (b + c), \qquad (34)$$
$$(a + c) - (b + c) = (a + c) + \{-(b + c)\} =$$
$$= (a + c) + \{-b + (-c)\} = \{a + (-b)\} + \{c + (-c)\} =$$
$$= (a - b) + 0 = a - b. \qquad (42)$$

Uit (318) en (321) volgt verder nog:

$$ac - bc = ac + (-bc) =$$
$$= ac + (-b)c = \{a + (-b)\}c = (a - b)c. \qquad (59)$$

---

512. Positieve en negatieve getallen. Een van nul verschillend getal van het stelsel is volgens de grondeigenschap *IIa* van n°. 490 òf > 0 òf < 0. In het eerste geval wordt het getal ***positief***, in het tweede geval ***negatief*** genoemd.

Is het getal a b.v. positief, dus

$$a > 0,$$

dan volgt daaruit in verband met de grondeigenschap *IIc*:

$$-a + a > -a + 0,$$
$$0 > -a,$$
$$-a < 0.$$

Omgekeerd leidt men uit $a < 0$ af, dat $-a > 0$ is. We vinden dus:

Het tegengestelde van een positief getal is negatief en het tegengestelde van een negatief getal positief.

Hieruit blijkt tevens, *dat een stelsel getallen, waarvoor de in n⁰. 490 en 494 genoemde grondeigenschappen gelden, zoowel positieve als negatieve getallen bevat.*

Een andere gevolgtrekking uit de eigenschap is, *dat nul het eenige getal is, dat gelijk is aan zijn tegengestelde* (zie n⁰. 497).

513. Uit $a > b$ volgt in verband met de eigenschap *IIc* van n⁰. 490:

$$a + (-b) > b + (-b),$$
$$a - b > 0.$$

Daar men evenzoo uit $a - b > 0$ tot $a > b$ (of uit $a < b$ tot $a - b < 0$) besluit, vinden we:

Zijn a en b twee verschillende getallen, dan is $a > b$ of $< b$ al naar gelang $a - b > 0$ (positief) dan wel < 0 (negatief) is.

514. Voor de formule (328) van n⁰. 509 kan men schrijven:

$$-(a - b) = -a + \{-(-b)\} =$$
$$= -a - (-b).$$

Is nu $a > b$, dan is $a - b$ positief, dus $-(a - b)$ negatief, dus $-a - (-b)$ negatief, dus $-a < -b$. Men heeft dus:

Is $a > b$, dan is $-a < -b$.

Men kan dit ook bewijzen door uit $a > b$ af te leiden:

$$a + (-a) + (-b) > b + (-a) + (-b),$$
$$0 + (-b) > 0 + (-a),$$
$$-b > -a.$$

515. Product van positieve getallen. We nemen verder aan, dat voor het beschouwde stelsel getallen de volgende eigenschap geldt:

Is $a > 0$ en $b > 0$, dan is $ab > 0$.

Of anders uitgedrukt:

Het product van twee positieve getallen is positief.

Deze eigenschap is niet uit de grondeigenschappen af te leiden, dus zelf een *grondeigenschap*.

516. Is $a > b$ en $c > 0$, dan volgt uit de eigenschappen van n⁰. 513 en 515:

$$a - b > 0,$$
$$(a - b)c > 0,$$
$$ac - bc > 0,$$
$$ac > bc.$$

Men heeft dus:

Is $a > b$ en $c > 0$, dan is $ac > bc$.

Of anders uitgedrukt:

De betrekking „grooter" tusschen twee getallen blijft bestaan als men beide getallen met een zelfde positief getal vermenigvuldigt.

517. Is $c < 0$, dan is (volgens de eigenschap van n⁰. 512) $-c > 0$. Uit $a > b$ volgt dan (wegens de eigenschap van n⁰. 516):

$$a(-c) > b(-c),$$

dus in verband met (321):

$$-ac > -bc.$$

Hieruit volgt weer in verband met de eigenschap van n⁰. 514:

$$ac < bc.$$

Men heeft dus:

Is $a > b$ en $c < 0$, dan is $ac < bc$.

Hieruit blijkt, *dat de betrekking „grooter" in „kleiner" overgaat (en omgekeerd) als men beide getallen met een zelfde negatief getal vermenigvuldigt.*

518. Door in de eigenschap van n⁰. 516 $a = 0$ (of in die van n⁰. 517 $b = 0$) te nemen vindt men:

Is $b < 0$ en $c > 0$, dan is $bc < 0$.

Men kan dit ook zoo formuleeren, *dat het product van een positief en een negatief getal negatief is.*

Neemt men in de eigenschap van n⁰. 517 $a = 0$, dan vindt men:

Is $b < 0$ en $c < 0$, dan is $bc > 0$.

Dit drukt uit, *dat het product van twee negatieve getallen positief is.*

Uit het voorgaande volgt verder nog, *dat de modulus 1 der vermenigvuldiging positief is.* Is nl. a een positief getal, dan volgt uit $1 . a = a$ in verband met de eigenschap van n⁰. 502,

dat 1 niet aan 0 gelijk is, en uit de eerste eigenschap van dit nummer, dat 1 niet negatief is [1]).

519. Uit de grondeigenschap van n⁰. 515 en de eigenschappen van n⁰. 518 blijkt, *dat het product van twee getallen, die geen van beide nul zijn, eveneens van nul verschilt.* Men kan dit aldus met de eigenschap van n⁰. 502 samenvatten:

Een product van twee getallen is dan en alleen dan nul als een der factoren nul is.

Door volledige inductie is dit tot een product van meerdere factoren uit te breiden.

Uit de eigenschap blijkt opnieuw, dat nul het eenige getal is, dat gelijk is aan zijn tegengestelde (zie n⁰. 512). Uit

$$x = -x$$

volgt nl.: $2x = 0$, dus (daar $2 = 1 + 1 > 0$ is) $x = 0$.

520. Absolute waarde van een getal. Onder de ***absolute*** (of *volstrekte*) ***waarde*** *van een getal a* verstaat men *het getal a als a positief is en het getal — a als a negatief is;* voor de absolute waarde van nul neemt men dat getal zelf.

De absolute waarde van a wordt door $|a|$ voorgesteld. Blijkens $-0 = 0$ (zie n⁰. 497) heeft men dus:

$$|a| = a \quad \textit{als a positief of nul is,}$$
$$|a| = -a \quad \textit{als a negatief of nul is.}$$

521. Uit de eigenschap van n⁰. 512 blijkt, *dat $|a|$ positief is als a van nul verschilt,* zoodat men heeft:

$$|a| \geqq 0; \tag{330}$$

$|a| = 0$ geldt dan en alleen dan als $a = 0$ is.

Verder volgt uit de eigenschap van n⁰. 512 nog:

$$|a| = |-a|. \tag{331}$$

In woorden luidt dit:

Twee getallen, die elkaars tegengestelde zijn, hebben dezelfde absolute waarde.

---

[1]) De betrekking $1 > 0$ blijkt dus een gevolg der grondeigenschappen te zijn.

522. Zijn a en b beide positief, dus ook ab positief (zie n⁰. 515), dan is volgens de definitie van n⁰. 520:

$$|a| \,.\, |b| = ab = |ab|.$$

Zijn a en b beide negatief, dus ab positief (zie n⁰. 518), dan is, in verband met de formule (323) van n⁰. 506:

$$|a| \,.\, |b| = (-a)(-b) = ab = |ab|.$$

Is a positief en b negatief, dus ab negatief, dan is in verband met de formule (321) van n⁰. 504:

$$|a| \,.\, |b| = a(-b) = -ab = |ab|.$$

In al deze gevallen heeft men dus:

$$|ab| = |a| \,.\, |b|. \qquad (332)$$

Deze formule geldt ook nog als a of b nul is, daar dan beide leden nul zijn.

Door volledige inductie is (332) uit te breiden tot:

$$|a_1 a_2 \ldots . a_n| = |a_1| \,.\, |a_2| \ldots . |a_n|. \qquad (333)$$

In woorden luidt dit:

De absolute waarde van een product is gelijk aan het product van de absolute waarden der factoren.

523. Absolute waarde van een som. Zijn a en b beide $\geqq 0$, dan is ook $a + b \geqq 0$ (zie de eigenschap van n⁰. 58). Men heeft dan dus:

$$|a+b| = a+b = |a| + |b|.$$

Zijn a en b beide $\leqq 0$, dan is ook $a + b \leqq 0$, dus in verband met (327):

$$|a+b| = -(a+b) = -a + (-b) = |a| + |b|.$$

Men heeft dus:

Zijn a en b beide positief of beide negatief, dan is:

$$|a+b| = |a| + |b|, \qquad (334)$$

hetgeen ook nog geldt als a of b nul is.

524. Van positieve getallen zegt men ook, *dat ze het positieve teeken (het teeken +)* en van negatieve getallen, *dat ze het negatieve teeken (het teeken —) hebben.* Men kan de eigenschap van n⁰. 523 dus ook zoo uitdrukken:

De absolute waarde van de som van twee getallen, die hetzelfde teeken hebben, is gelijk aan de som van de absolute waarden der termen.

Door volledige inductie blijkt, *dat dit ook geldt voor de som van een willekeurig aantal termen met hetzelfde teeken.*

525. Is $a \geqq 0$ en $b \leqq 0$, dan is:

$$|a+b| = \pm (a+b) =$$
$$= \pm \{|a| + (-|b|)\} = \pm (|a| - |b|). \qquad (335)$$

Hierbij is onder $\pm c$ een der getallen c (waarvoor ook wel $+c$ geschreven wordt) en $-c$ te verstaan.

Daar het eerste lid van (335) $\geqq 0$ is, geldt in het tweede, derde en vierde lid het teeken + of — al naar gelang $|a| - |b| \geqq 0$ of $\leqq 0$ is, dus al naar gelang $|a| \geqq |b|$ of $\leqq |b|$ is. In ieder geval kan men echter voor (335) schrijven:

$$|a+b| = \big||a| - |b|\big|. \qquad (336)$$

Hiervoor kan ook geschreven worden:

$$|a+b| = \big||b| - |a|\big|. \qquad (337)$$

De formules (336) en (337) gelden ook als $a \leqq 0$ en $b \geqq 0$ is. Men heeft dus:

Hebben a en b tegengesteld teeken (d. w. z. is a positief en b negatief of omgekeerd), dan is de absolute waarde van de som van a en b gelijk aan de absolute waarde van het verschil der absolute waarden van a en b. Dit geldt ook nog als a of b nul is.

526. Uit $|b| \geqq 0$ en $-|b| \leqq 0$ volgt:

$$|a| + |b| \geqq |a|,$$
$$|a| - |b| \leqq |a|,$$

waaruit:

$$|a| - |b| \leqq |a| + |b|,$$

Evenzoo is:

$$|b| - |a| \leqq |a| + |b|,$$

dus:

$$\big||a| - |b|\big| \leqq |a| + |b|.$$

In het in n⁰. 523 beschouwde geval is dus:

$$|a+b| \geqq \big||a| - |b|\big|$$

en in het in n⁰. 525 beschouwde geval:

$$|a+b| \leqq |a| + |b|.$$

Hierbij geldt overal het teeken $=$ dan en alleen dan als $a = 0$ of $b = 0$ is.

In *ieder geval* heeft men dus:

$$\big| |a| - |b| \big| \leqq |a + b| \leqq |a| + |b|. \qquad (338)$$

Hieruit leidt men in verband met de formules (318) en (331) van n⁰. 498 en 521 af:

$$\big| |a| - |b| \big| \leqq |a - b| \leqq |a| + |b|. \qquad (339)$$

Men heeft dus:

Zoowel van $a + b$ *als van* $a - b$ *is de absolute waarde* $\leqq |a| + |b|$ *en* $\geqq \big| |a| - |b| \big|$.

527. Uit $|a + b| \leqq |a| + |b|$ leidt men af:

$$|a + b + c| = |(a + b) + c| \leqq$$
$$\leqq |a + b| + |c| \leqq (|a| + |b|) + |c|,$$

dus:

$$|a + b + c| \leqq |a| + |b| + |c|.$$

Bijgevolg kan door volledige inductie het rechterdeel van (338) aldus worden uitgebreid:

$$|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leqq |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|. \qquad (340)$$

In woorden luidt dit:

De absolute waarde van een som is kleiner dan of gelijk aan de som van de absolute waarden der termen.

Opgemerkt zij nog, *dat het teeken* $=$ *dan en alleen dan geldt als de van nul verschillende termen van de som alle hetzelfde teeken hebben.* We laten het aan den lezer over dit na te gaan.

§ 2. Het stelsel der geheele getallen.

528. Verschillen beschouwd als getallenparen. Bij een stelsel getallen van de in de vorige paragraaf beschouwde soort (waarin dus de aftrekking onbeperkt mogelijk is) is ieder getal c in den vorm $a - b$ [1]), dus als een verschil te schrijven, terwijl omgekeerd ook $a - b$ steeds een getal van het stelsel is als a en b getallen van het stelsel zijn.

In den vorm van verschillen geschreven wordt de optelling volgens de formule (33) van n⁰. 81 en de vermenigvuldiging volgens de formule (61) van n⁰. 104 uitgevoerd. Verder kan men het gelijk of grooter zijn met de tweede resp. derde eigenschap van n⁰. 496 beoordeelen.

529. Men kan nu het verschil $a - b$ ook opvatten als een *getallenpaar (a, b), waarbij op de volgorde der getallen gelet moet worden.* Twee zulke getallenparen worden dan op de volgende wijze opgeteld en vermenigvuldigd:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \tag{341}$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac + bd, ad + bc), \tag{342}$$

terwijl men aldus getallenparen vergelijkt:

Men heeft dan en alleen dan

$$(a, b) = (c, d)$$

als voldaan is aan:

$$a + d = c + b. \tag{40}$$

Men heeft dan en alleen dan

$$(a, b) > (c, d)$$

als voldaan is aan:

$$a + d > c + b. \tag{44}$$

---

[1]) Men heeft nl.:

$$c = (c + b) - b,$$
$$c = a - (a - c);$$

a of b kan daarin nog willekeurig worden aangenomen.

Verder heeft men nog:

$$(a,\ 0) = a. \qquad (343)$$

Uit deze eigenschappen is het teeken — der aftrekking verdwenen.

530. Gelijkheid van aantallenparen. Voor de aantallen (natuurlijke getallen of nul) gelden de grondeigenschappen van n°. 490, echter niet de grondeigenschap van n°. 494.

Na het in n°. 529 opgemerkte ligt het nu voor de hand *het getalbegrip uit te breiden door het vormen van getallenparen* $(a,\ b)$, *waarin a en b aantallen zijn*, dus door het vormen van ***aantallenparen.*** De formules en eigenschappen van n°. 529 worden daarbij als *definities* overgenomen.

Men heeft hierbij voorloopig in $(a,\ b)$ geen verschil te zien, maar niets anders dan een *aantallenpaar, waarbij op de volgorde der aantallen gelet wordt.* Dit maakt echter de volgende ontwikkelingen noodig, die we ook zonder meer ter uitbreiding van het getalbegrip hadden kunnen vooropstellen. We hebben dit niet gedaan, ten einde aan de definities het kunstmatige te ontnemen.

531. Twee aantallenparen $(a,\ b)$ en $(c,\ d)$ worden dan en alleen dan ***gelijk*** genoemd, hetgeen als

$$(a,\ b) = (c,\ d) \qquad (344)$$

geschreven wordt, *als* $a + d = c + b$ *is.*

Bij deze definitie spelen beide aantallenparen dezelfde rol, zoodat de betrekking van gelijkheid van twee aantallenparen een wederkeerige is.

Deze wederkeerigheid blijkt daaruit, dat de gelijkheid $a+d=c+b$ door verwisseling van beide aantallenparen (dus van a met c en van b met d) in $c + b = a + d$ overgaat, een betrekking, die op hetzelfde neerkomt. Men drukt dit uit door te zeggen, *dat de betrekking* $a + d = c + b$ ***symmetrisch*** *is ten opzichte van beide aantallenparen.* In plaats van (344) kan men dus ook schrijven:

$$(c,\ d) = (a,\ b).$$

532. Het gelijk zijn van twee aantallenparen beteekent niet, dat beide paren hetzelfde zijn; zoo is b.v. $(7,\ 3) = (9,\ 5)$.

Zijn beide aantallenparen hetzelfde, of zooals men ook zegt ***identiek,*** dan is:

$$a = c, \ b = d.$$

In dat geval is aan $a+d=c+b$ voldaan, *zoodat identieke aantallenparen ook gelijk zijn* (terwijl, zooals reeds is opgemerkt, het omgekeerde niet het geval behoeft te zijn). Men kan dit ook zoo uitdrukken, *dat ieder aantallenpaar aan zich zelf gelijk is.*

533. Uit de definitie van n⁰. 531 leiden we af:

Is

$$(a,\ b)=(c,\ d) \quad en \quad (c,\ d)=(e,\ f), \tag{345}$$

dan is:

$$(a,\ b)=(e,\ f). \tag{346}$$

Of anders gezegd:

Twee aantallenparen, die aan een zelfde aantallenpaar gelijk zijn, zijn ook onderling gelijk.

Dit is de ***transitieve eigenschap*** *der gelijkheid van aantallenparen* (vergelijk n⁰. 6). Voor het bewijs daarvan merken we op, dat uit (345) volgt:

$$a+d=c+b,$$
$$c+f=e+d,$$

Hieruit leidt men af:

$$(a+d)+(c+f)=(c+b)+(e+d),$$
$$(a+f)+(c+d)=(e+b)+(c+d).$$

Uit de laatste gelijkheid volgt (zie de opmerking aan het eind van n⁰. 69):

$$a+f=e+b,$$

waaruit de juistheid van (346) blijkt.

Drukt men het ongelijk zijn door het teeken $\neq$ uit, dan volgt uit de transitieve eigenschap door een redeneering uit het ongerijmde, *dat uit* $(a,\ b)=(c,\ d)$ *en* $(c,\ d)\neq(e,\ f)$ *volgt* $(a,\ b)\neq(e,\ f)$.

534. Definitie der geheele getallen. Men kan *het aantallenpaar* $(a,\ b)$ *en alle daaraan gelijke aantallenparen* tot één begrip vereenigd denken. Dit begrip wordt een ***geheel getal*** genoemd.

Is $(c,\ d)$ een aan $(a,\ b)$ gelijk aantallenpaar, dan kunnen (wegens de transitieve eigenschap van n⁰. 533) de aan $(a,\ b)$ gelijke aantallenparen even goed als de aan $(c,\ d)$ gelijke aantallenparen beschreven worden. Hieruit blijkt, *dat alle aantallenparen, die men tot het begrip „geheel getal" vereenigd heeft, ten aanzien van dit begrip dezelfde rol spelen.* Ieder dier aantallenparen kan dienen om het geheele getal aan te wijzen; we noemen deze

aantallenparen de ***representanten** van het geheele getal* en spreken kortweg van het geheele getal (a, b), waarmede dan bedoeld is *het aantallenpaar* (a, b) *of ieder daaraan gelijk aantallenpaar.*

535. Bij twee geheele getallen beteekent het ***gelijk*** zijn, *dat ze geheel hetzelfde zijn, dus dezelfde representanten hebben.* Men kan ook zeggen, dat twee geheele getallen gelijk zijn als men niet met *twee* geheele getallen, maar met *één enkel* geheel getal te doen heeft.

Zijn (a, b) en (c, d) representanten van twee geheele getallen, dan zijn deze laatste dan en alleen dan gelijk als de aantallenparen (a, b) en (c, d) gelijk zijn.

536. **Geheele getallen, die aantallen en die welke geen aantallen zijn.** *Men identificeert het begrip van het geheele getal* $(a, 0)$ *met dat van het aantal* a, *d.w.z. men maakt tusschen beide begrippen geen onderscheid.* Dit kan ook zoo worden uitgedrukt, *dat het aantal* a *onder de representanten van het geheele getal* $(a, 0)$ *wordt opgenomen.* In formule luidt dit:

$$(a, 0) = a. \qquad (343)$$

Men kan dus ook spreken van *het geheele getal* a.

Door de definitie, die in (343) staat uitgedrukt, vallen de aantallen onder het begrip „geheele getallen". De vorming van dit begrip is dus een *tweede uitbreiding van het getalbegrip* [1]).

We merken nog op, *dat de getallenparen* $(a, 0)$ *en* $(b, 0)$, *waarin* a *en* b *ongelijke aantallen zijn, ongelijk zijn* (volgens de definitie van n⁰. 531, in verband met de moduluseigenschap der optelling van aantallen), zoodat een geheel getal slechts één representant van den vorm $(a, 0)$ kan hebben. Het kan dus niet voorkomen, dat een geheel getal met twee verschillende aantallen geïdentificeerd wordt. Hieruit blijkt, *dat het begrip „gelijkheid" door de beschouwde uitbreiding geen verandering heeft ondergaan.*

---

[1]) De eerste is de invoering van het getal nul, waardoor de natuurlijke getallen tot aantallen worden uitgebreid. Zooals in n⁰. 488 is opgemerkt, wordt van de uitbreiding tot transfiniete getallen verder geheel afgezien.

537. Uit de in n°. 531 van gelijkheid van aantallenparen gegeven definitie volgt onmiddellijk:

$$(a, b) = (a + c, b + c), \qquad (347)$$

daar toch voldaan is aan:

$$a + (b + c) = (a + c) + b.$$

Is $c \leqq a$ en $\leqq b$, dan heeft men evenzoo:

$$(a, b) = (a - c, b - c). \qquad (348)$$

Men kan de gelijkheden (347) en (348) ook zoo uitdrukken: *Een aantallenpaar wordt door een daaraan gelijk aantallenpaar vervangen als men beide aantallen van het paar met een zelfde aantal vermeerdert of vermindert.*

538. Is $b \leqq a$, dan kan men in de gelijkheid (348) $c = b$ nemen, waardoor $b - c = 0$ wordt. Men vindt dan:

$$(a, b) = (a - b, 0),$$

dus volgens (343):

$$(a, b) = a - b \quad (a \geqq b).$$

Men heeft dus:

Is $a \geqq b$, dan is het geheele getal (a, b) gelijk aan $a - b$, dus een aantal.

In het bijzonder heeft men:

$$(a, a) = 0. \qquad (349)$$

539. Heeft men:

$$(a, b) = c\ ^{1)}, \qquad (350)$$

dan volgt daaruit:

$$(a, b) = (c, 0),$$
$$a + 0 = c + b,$$
$$a \geqq b.$$

Voor $a < b$ kan dus (350) niet gelden, waaruit volgt:

Is $a < b$, dan is het geheele getal (a, b) geen aantal.

Men kan dit met de eigenschap van n°. 538 aldus samenvatten: *Het geheele getal (a, b) is een natuurlijk getal, nul of geen aantal al naar gelang $a > b$, $= b$ of $< b$ is.*

540. Is $a < b$, dan kan men in de gelijkheid (348) van n°. 537 $c = a$ nemen, waardoor deze overgaat in:

$$(a, b) = (0, b - a). \qquad (351)$$

---

[1]) Hierin is c een aantal; voorloopig stellen de gewone (Latijnsche) letters aantallen en de Grieksche letters geheele getallen voor.

Daar $b - a$ voor $a < b$ een natuurlijk getal is, heeft men dus: *Een geheel getal, dat geen aantal is, is te schrijven als een aantallenpaar, waarvan het eerste aantal wel, maar het tweede niet nul (dus een natuurlijk getal) is.*

We merken nog op, dat de gelijkheid (351) ook nog geldt voor $a = b$. Wegens (349) is (351) dan echter overbodig.

---

541. Definitie van grooter en kleiner bij geheele getallen. Men schrijft:

$$(a,\ b) > (c,\ d) \tag{352}$$

dan en alleen dan als voldaan is aan:

$$a + d > c + b. \tag{44}$$

In plaats van (352) schrijft men ook:

$$(c,\ d) < (a,\ b).$$

Daar (44) hetzelfde is als $c + b < a + d$, *heeft men:*

$$(a,\ b) > \textit{ of } < (c,\ d),$$

al naar gelang

$$a + d > \textit{ of } < c + b$$

is.

542. Uit de definitie van n⁰. 541 leidt men gemakkelijk af: *Is*

$$(a',\ b') = (a,\ b),\ (c',\ d') = (c,\ d) \textit{ en } (a,\ b) > (c,\ d), \tag{353}$$

dan is ook:

$$(a',\ b') > (c',\ d'). \tag{354}$$

Uit (353) volgt nl.:

$$a' + b = a + b',$$
$$d' + c = d + c',$$
$$a + d > c + b.$$

Hieruit volgt in verband met de eigenschap van n⁰. 49:

$$(a' + b) + (d' + c) + (a + d) > (a + b') + (d + c') + (c + b),$$
$$(a' + d') + (a + b + c + d) > (c' + b') + (a + b + c + d),$$

waaruit in verband met de eigenschap van n⁰. 84 volgt:

$$a' + d' = c' + b'.$$

Dit beteekent echter hetzelfde als (354).

543. Uit de eigenschap van n⁰. 542 blijkt, *dat bij aantallenparen de betrekking „grooter of kleiner" blijft bestaan als men die aantallenparen door daaraan gelijke vervangt.*

Dit maakt, *dat men de definitie van grooter en kleiner van aantallenparen op de daardoor gerepresenteerde geheele getallen kan overdragen.*

544. Het begrip „grooter" voor geheele getallen is een uitbreiding van dat voor aantallen. Hiermede wordt bedoeld, *dat de nieuwe definitie van grooter, toegepast op geheele getallen, die tot aantallen te herleiden zijn* (dus waarbij onder de representanten aantallen voorkomen), *tot hetzelfde resultaat voert als de oorspronkelijke definitie* (zie n⁰. 488). Om dit te bewijzen merken we op, dat het aantal a volgens de nieuwe definitie grooter dan het aantal b is als men heeft:

$$(a,\ 0) > (b,\ 0),$$
$$a + 0 > b + 0,$$
$$a > b,$$

dus als a volgens de oude definitie $> b$ is.

545. Eigenschappen betreffende grooter en kleiner. Uit het voorgaande blijkt, dat de grondeigenschap *IIa* van n⁰. 490 voor geheele getallen geldig is.

Ook de eigenschap IIb blijft voor geheele getallen doorgaan. Uit

$$(a,\ b) > (c,\ d),\quad (c,\ d) > (e,\ f)$$

volgt nl.:

$$a + d > c + b,$$
$$c + f > e + d,$$

waaruit in verband met de eigenschap van n⁰. 57 volgt:

$$(a + d) + (c + f) > (c + b) + (e + d),$$
$$(a + f) + (c + d) > (e + b) + (c + d),$$
$$a + f > e + b,$$
$$(a,\ b) > (e,\ f).$$

546. Uit $0 = (0,\ 0)$ blijkt, dat aan

$$(a,\ b) > 0$$

voldaan is als $a + 0 > 0 + b$, dus als $a > b$ is. Voor $a < b$ of $= b$ is $(a,\ b) < 0$ resp. $= 0$, zoodat men heeft:

Het geheele getal (a, b) *is positief, negatief of nul al naar gelang* $a > b$, $< b$ *of* $= b$ *is.*

547. In verband met de laatste eigenschap van n⁰. 539 volgt hieruit:

De positieve geheele getallen zijn de natuurlijke getallen. De negatieve geheele getallen zijn de geheele getallen, die geen aantal zijn.

Uit dit laatste volgt in verband met de eigenschap van n⁰. 540: *Een negatief geheel getal is te schrijven in den vorm* $(0, a)$, *waarin* a *een natuurlijk getal is.*

Is $a > b$, dan is $0 + b < 0 + a$, dus:

$$(0, a) < (0, b). \qquad (355)$$

Daar men omgekeerd uit (355) tot $a > b$ kan besluiten, *is dan en alleen dan aan* (355) *voldaan als* $a > b$ *is.*

548. Definitie der optelling van geheele getallen. Onder de ***som***

$$(a, b) + (c, d)$$

der aantallenparen (a, b) *en* (c, d) verstaat men het aantallenpaar

$$(a + c, b + d).$$

Hieruit volgt zonder moeite:

Is

$$(a, b) = (a', b') \text{ en } (c, d) = (c', d'), \qquad (356)$$

dan is:

$$(a, b) + (c, d) = (a', b') + (c', d'). \qquad (357)$$

Uit (356) volgt nl.:

$$a + b' = a' + b,$$
$$c + d' = c' + d,$$

waaruit men afleidt:

$$(a + b') + (c + d') = (a' + b) + (c' + d),$$
$$(a + c) + (b' + d') = (a' + c') + (b + d),$$
$$(a + c, b + d) = (a' + c', b' + d').$$

Hieruit besluit men tot (357).

549. Uit de eigenschap van n⁰. 548 blijkt, *dat een som van twee aantallenparen door een daaraan gelijk aantallenpaar vervangen wordt als men de termen dier som door daaraan gelijke aantallenparen vervangt.*

Dit maakt weer, *dat men de definitie van optelling van de aantallenparen op de daardoor gerepresenteerde geheele getallen*

kan overdragen. De ***som** van twee geheele getallen* α en β is dan het geheele getal $\alpha + \beta$, dat gerepresenteerd wordt door een aantallenpaar, dat men verkrijgt door een representant van α en een representant van β op te tellen; welke representanten men daarvoor kiest heeft op het geheele getal, dat ontstaat, geen invloed.

550. *Dat de optelling van geheele getallen een uitbreiding is van de tot nu toe beschouwde optelling,* is verder gemakkelijk aan te toonen. Men heeft nl.:

$$(a,\ 0) + (b,\ 0) = (a + b,\ 0 + 0) = (a + b,\ 0) = a + b,$$

zoodat het op hetzelfde neerkomt of men van $(a,\ 0)$ en $(b, 0)$ de som vormt volgens de nieuwe definitie, dan wel van a en b (welke aantallen resp. aan $(a,\ 0)$ en $(b,\ 0)$ gelijk zijn) volgens de oude definitie.

551. Is een der termen van de som een aantal, dan heeft men:

$$(a,\ b) + c = (a,\ b) + (c,\ 0) = (a + c,\ b + 0) = (a + c,\ b),$$

dus:

$$(a,\ b) + c = (a + c,\ b). \tag{358}$$

Evenzoo is:

$$c + (a,\ b) = (a + c,\ b)\ ^{1}).$$

Het blijkt dus, *dat een aantallenpaar met het aantal c vermeerderd wordt door het eerste aantal van het paar met c te vermeerderen.*

552. Grondeigenschappen der optelling van geheele getallen. Uit het in n^0. 549 gevondene ziet men, dat de grondeigenschap *Ia* van n^0. 490 ook voor geheele getallen blijft doorgaan. We willen dit nu ook voor de overige grondeigenschappen der optelling bewijzen. Dit geschiedt *door deze tot de overeenkomstige eigenschappen voor aantallen terug te brengen.*

Voor de *commutatieve eigenschap* (*Ib*) loopt dit bewijs aldus:

$$(a,\ b) + (c,\ d) = (a + c,\ b + d) =$$
$$= (c + a,\ d + b) = (c,\ d) + (a,\ b)$$

en voor de *associatieve eigenschap* (*Ic*):

---

[1]) Dit is een gevolg van de vorige gelijkheid als eerst de commutatieve eigenschap der optelling voor geheele getallen is aangetoond (zie n^0. 552).

$$\{(a,\ b) + (c,\ d)\} + (e,\ f) = (a + c,\ b + d) + (e,\ f) =$$
$$= \big((a + c) + e,\ (b + d) + f\big) = \big(a + (c + e),\ b + (d + f)\big) =$$
$$= (a,\ b) + (c + e,\ d + f) = (a,\ b) + \{(c,\ d) + (e,\ f)\}.$$

Het bewijs van de *moduluseigenschap* (*Id*) is als volgt, lettend op (358):

$$(a,\ b) + 0 = (a + 0,\ b) = (a,\ b).$$

553. We willen nu de grondeigenschap *IIc* van n⁰. 490 voor geheele getallen aantoonen. Is

$$(a,\ b) > (c,\ d),$$

dan geldt (zie n⁰. 541):

$$a + d > c + b,$$

dus volgens de eigenschap van n⁰. 49:

$$(a + d) + (e + f) > (c + b) + (e + f),$$
$$(a + e) + (d + f) > (c + e) + (b + f),$$
$$(a + e,\ b + f) > (c + e,\ d + f),$$
$$(a,\ b) + (e,\ f) > (c,\ d) + (e,\ f).$$

554. Definitie der vermenigvuldiging van geheele getallen. Onder het *product* $(a,\ b) . (c,\ d)$ *der aantallenparen* $(a,\ b)$ *en* $(c,\ d)$ verstaat men het aantallenpaar

$$(ac + bd,\ ad + bc).$$

Voor de vermenigvuldiging gelden geheel soortgelijke beschouwingen als voor de optelling. Zoo heeft men:

Is $(a,\ b) = (a',\ b')$, *dan is:*

$$(a,\ b) . (c,\ d) = (a',\ b') . (c,\ d).$$

Daarvoor moet worden aangetoond:

$$(ac + bd,\ ad + bc) = (a'c + b'd,\ a'd + b'c),$$
$$(ac + bd) + (a'd + b'c) = (a'c + b'd) + (ad + bc),$$
$$(a + b')c + (b + a')d = (a' + b)c + (b' + a)d.$$

Dit laatste nu volgt onmiddellijk uit $a + b' = a' + b$.

Evenzoo blijkt, *dat voor* $(c,\ d) = (c',\ d')$ *aan*

$$(a,\ b) . (c,\ d) = (a,\ b) . (c',\ d')$$

voldaan is [1]).

Uit het voorgaande volgt (geheel op dezelfde wijze als in n⁰.

---

[1]) Hieruit leidt men in verband met het voorgaande af:
Is $(a, b) = (a', b')$ *en* $(c, d) = (c', d')$, *dan is:*

$$(a, b) . (c, d) = (a', b') . (c', d').$$

549), *dat men de definitie van vermenigvuldiging van de aantallenparen op de daardoor gerepresenteerde geheele getallen kan overdragen.*

555. Is een der beide factoren van het product een aantal, dan heeft men:

$$(a, b) \,.\, c = (a, b) \,.\, (c, 0) = (ac + b \,.\, 0, a \,.\, 0 + bc).$$

Volgens de formule (161) van n⁰. 304 heeft men dus:

$$(a, b) \,.\, c = (ac, bc).$$

Evenzoo is:

$$c \,.\, (a, b) = (ac, bc), \tag{359}$$

zoodat een aantallenpaar met een aantal c vermenigvuldigd wordt door beide aantallen van het paar met c te vermenigvuldigen.

Door voor beide factoren aantallen te nemen blijkt, dat het product van twee aantallen volgens de nieuwe definitie hetzelfde is als volgens de oude, *zoodat weer de vermenigvuldiging van geheele getallen een uitbreiding is van de tot nu toe beschouwde vermenigvuldiging.*

556. Grondeigenschappen der vermenigvuldiging van geheele getallen. We hebben verder aan te toonen, dat de grondeigenschappen *I e, f, g, h, i* van n⁰. 490 voor geheele getallen blijven gelden. Voor de eigenschap *I e*, die de mogelijkheid en ondubbelzinnigheid der vermenigvuldiging constateert, is dit reeds gebleken. De overige eigenschappen worden weer aangetoond met behulp van de overeenkomstige eigenschappen voor aantallen.

De geldigheid van de commutatieve eigenschap (*I f*) is onmiddellijk uit de in 554 gegeven definitie der vermenigvuldiging af te lezen en de moduluseigenschap (*I i*) uit de formule (359) door daarin $c = 1$ te nemen. Slechts de eigenschappen *I g* en *h* behoeven dus nog een nader betoog.

557. Het bewijs van de associatieve eigenschap der vermenigvuldiging (*I g*) is aldus:

$$\{(a, b) \,.\, (c, d)\} \,.\, (e, f) = (ac + bd, ad + bc) \,.\, (e, f) =$$
$$= \big((ac + bd)e + (ad + bc)f, (ac + bd)f + (ad + bc)e\big) =$$
$$= \big(a(ce + df) + b(cf + de), a(cf + de) + b(ce + df)\big) =$$
$$= (a, b) \,.\, (ce + df, cf + de) = (a, b) \,.\, \{(c, d) \,.\, (e, f)\}.$$

De distributieve eigenschap ($I\ h$) bewijst men als volgt:

$$\{(a,\ b)+(c,\ d)\}\,.\,(e,\ f)=(a+c,\ b+d)\,.\,(e,\ f)=$$
$$=\big((a+c)e+(b+d)f,\ (a+c)f+(b+d)e\big)=$$
$$=\big((ae+bf)+(ce+df),\ (af+be)+(cf+de)\big)=$$
$$=(ae+bf,\ af+be)+(ce+df,\ cf+de)=$$
$$=(a,\ b)\,.\,(e,\ f)+(c,\ d)\,.\,(e,\ f).$$

Bij het zoeken naar deze bewijzen gaat men zoowel van het eerste als van het laatste lid uit en herleidt men ieder van deze tot één enkel aantallenpaar. Van de zoo verkregen aantallenparen heeft men dan de gelijkheid te constateeren, hetgeen gemakkelijk geschiedt doordat ze identiek blijken te zijn.

---

§ 3. Aftrekking met geheele getallen.

558. Mogelijkheid der aftrekking met geheele getallen. Men heeft:

$$(a,\ b) + (b,\ a) = (a + b,\ b + a),$$

dus in verband met de formule (349) van n⁰. 538:

$$(a,\ b) + (b,\ a) = 0. \qquad (360)$$

Hieruit blijkt, *dat men steeds een geheel getal* η *kan vinden, dat voldoet aan de vergelijking*

$$\eta + \beta = 0, \qquad (361)$$

waarin β *een gegeven geheel getal is.* Dit beteekent, *dat voor de geheele getallen de grondeigenschap van n⁰. 494 geldt.*

Door de oplossing van (361) $-\beta$ te noemen (zie n⁰. 497) kan men (360) omvormen tot:

$$-(a,\ b) = (b,\ a). \qquad (362)$$

559. Uit het in n⁰. 558 gevondene vloeit voort, *dat alle gevolgtrekkingen, die we in § 1 van dit Hoofdst. uit de grondeigenschappen van n⁰. 490 en 494 hebben afgeleid, voor de geheele getallen geldig zijn.*

In het bijzonder blijkt dus, *dat voor het stelsel der geheele getallen de aftrekking zonder uitzondering mogelijk en ondubbelzinnig is* (zie de eigenschap van n⁰. 491). Dit is het doel, dat met de uitbreiding der aantallen tot geheele getallen (dus met de invoering der negatieve getallen) beoogd wordt.

560. Rechtstreeksch bewijs van de mogelijkheid der aftrekking. Ook zonder de algemeene eigenschap van n⁰. 491 is de mogelijkheid en ondubbelzinnigheid der aftrekking met geheele getallen aan te toonen. Vooreerst blijkt op dezelfde wijze als in n⁰. 69 (uit de grondeigenschap *IIc* van n⁰. 490, die blijkens n⁰.

553 voor geheele getallen geldig gebleven is), *dat de aftrekking ondubbelzinnig is.*

Om de mogelijkheid der aftrekking aan te toonen heeft men te laten zien, dat er een aantallenpaar (x, y) bestaat, dat voldoet aan de vergelijking

$$(x, y) + (c, d) = (a, b), \qquad (363)$$

waarin (a, b) en (c, d) gegeven aantallenparen zijn. Aan (363) nu wordt voldaan door $x = a + d$, $y = b + c$, dus:

$$(x, y) = (a + d, b + c).$$

Immers volgens de eigenschap van n⁰. 537 heeft men:

$$(a + d, b + c) + (c, d) = (a + d + c, b + c + d) = (a, b).$$

Men kan het verkregen resultaat aldus in formule brengen:

$$(a, b) - (c, d) = (a + d, b + c). \qquad (364)$$

561. Zijn α en β geheele getallen, dan is volgens het in n⁰. 498 gevondene:

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta), \qquad (365)$$

waarin $-\beta$ de oplossing der vergelijking (361) van n⁰. 558 is.

Zonder de eigenschap van n⁰. 491 bewijst men (365) aldus (met behulp van de formules (362) en (364) van n⁰. 558 en 560):

$$(a, b) - (c, d) = (a + d, b + c) =$$
$$= (a, b) + (d, c) = (a, b) + \{-(c, d)\}.$$

562. Andere bewijzen van enkele eigenschappen betreffende geheele getallen. Blijkens het voorgaande *gelden de eigenschappen van n⁰. 502—506 en 512—514 voor geheele getallen.* Die eigenschappen hebben we afgeleid uit de grondeigenschappen; het spreekt evenwel van zelf, dat ze ook meer rechtstreeks kunnen worden aangetoond door de geheele getallen als aantallenparen te schrijven. Wegens hun eenvoudigheid laten we die rechtstreeksche bewijzen hier volgen, hoewel ze feitelijk overbodig zijn.

563. Voor de eigenschap van n⁰. 502 wordt het bedoelde bewijs aldus, lettend op de formule (359) van n⁰. 555:

$$0 \,.\, (a, b) = (0 \,.\, a, 0 \,.\, b) = (0, 0) = 0.$$

Lettend op de formule (362) van n⁰. 558 kan men de eigenschappen van n⁰. 504 en 506 als volgt aantoonen:

$$(a, b) \,.\, \{-(c, d)\} = (a, b) \,.\, (d, c) =$$

$$= (ad + bc,\ ac + bd) =$$
$$= -(ac + bd,\ ad + bc) = -(a,\ b)\,.\,(c,\ d),$$
$$\{-(a,\ b)\}\,.\,\{-(c,\ d)\} = (b,\ a)\,.\,(d,\ c) =$$
$$= (bd + ac,\ bc + ad) = (a,\ b)\,.\,(c,\ d).$$

564. De juistheid der eigenschap van n°. 512 voor geheele getallen volgt onmiddellijk uit de eigenschap van n°. 546 in verband met de formule (362) van n°. 558. Uit $(a,\ b) > 0$ volgt nl. $a > b$, $b < a$, dus $(b,\ a) < 0$.

Evenzoo toont men de eigenschap van n°. 514 aan. Uit

$$(a,\ b) > (c,\ d)$$

volgt nl. $a + d > c + b$, dus $b + c < d + a$, dus:

$$(b,\ a) < (d,\ c),$$
$$-(a,\ b) < -(c,\ d).$$

565. Grondeigenschap van n°. 515 voor geheele getallen. Volgens de eerste eigenschap van n°. 547 zijn positieve geheele getallen natuurlijke getallen en omgekeerd; bijgevolg *is het product van twee positieve geheele getallen* een natuurlijk getal, dus *positief.* Hieruit blijkt, *dat de grondeigenschap van n°. 515 voor geheele getallen geldig is.* De daaruit afgeleide eigenschappen van n°. 516—519 zijn dus ook alle voor geheele getallen van kracht.

566. Genoemde eigenschappen kunnen natuurlijk ook weer rechtstreeks voor geheele getallen worden aangetoond (zie het in n°. 562 opgemerkte).

Om zoo de eigenschap van n°. 516 aan te toonen leiden we uit $(a,\ b) > (c,\ d)$ af (als e een natuurlijk getal voorstelt):

$$a + d > c + b,$$
$$(a + d)e > (c + b)e,$$
$$ae + de > ce + be,$$
$$(ae,\ be) > (ce,\ de),$$

dus volgens de formule (359) van n°. 555:

$$(a,\ b)\,.\,e > (c,\ d)\,.\,e.$$

Voor het rechtstreeksche bewijs der eigenschap van n°. 517 voor geheele getallen maken we er van gebruik, dat een negatief

geheel getal in den vorm $(0, e)$ te schrijven is (zie n°. 547). Aangetoond moet dus worden, dat uit $(a, b) > (c, d)$ volgt:

$$(a, b) . (0, e) < (c, d) . (0, e).$$

We laten dit verder aan den lezer over.

---

567. Gebruikelijke schrijfwijze der geheele getallen. Past men de formule (364) van n°. 560 toe op het geval $b = d = 0$, dus op het geval, dat de geheele getallen (a, b) en (c, d) aantallen zijn (nl. a resp. c), dan vindt men:

$$a - c = (a, c). \tag{366}$$

Dit maakt, *dat een aantallenpaar* (a, c) *ook als* $a - c$ *te schrijven is*. De schrijfwijze (a, c) kan dus in het vervolg vermeden worden; ze is slechts een voorloopige geweest, dienende om niet op het verband met de aftrekking vooruit te loopen.

568. Zooals in n°. 547 is gebleken, is een negatief geheel getal (dus een geheel getal, dat geen aantal is) in den vorm $(0, a)$ te brengen, waarin a een natuurlijk getal is. Volgens (366) kan voor dit negatieve getal ook $0 - a$ of kortweg $- a$ geschreven worden, dus:

$$(0, a) = - a. \tag{367}$$

Het tweede lid hiervan is de *gebruikelijke schrijfwijze voor het negatieve getal* $(0, a)$.

Tot (367) komt men ook door in de formule (362) van n°. 558 $b = 0$ te nemen en te bedenken, dat $(a, 0) = a$ is.

569. Is α een van nul verschillend geheel getal, dan is het tegengestelde daarvan, dus $- \alpha$, positief of negatief al naar gelang α negatief of positief is (zie de eigenschap van n°. 512). Een der getallen α en $- \alpha$ is dus een natuurlijk getal; is dit a, dan is òf

$$\alpha = a, \quad - \alpha = - a,$$

òf

$$\alpha = - a, \quad - \alpha = a.$$

Het tegengestelde van een geheel getal α *vormt men dus door voorplaatsing van het teeken — als* α *positief is en door weglating van dit teeken als* α *negatief is;* in laatstgenoemd geval

wordt α ondersteld in den vorm $-a$ geschreven te zijn. Door het positieve geheele getal a als $+a$ te schrijven kan men ook zeggen, *dat het tegengestelde van een geheel getal van nul verschillend gevormd wordt door het teeken te veranderen, d. w. z. + door — te vervangen of omgekeerd.*

570. Is a een natuurlijk getal, dan is, volgens de definitie van n°. 520, zoowel van a (of $+a$) als van $-a$ de absolute waarde gelijk aan a. Hieruit blijkt, *dat de absolute waarde van een geheel getal gevonden wordt door het teeken* (d. w. z. het teeken + of —) *weg te laten.*

Door de formules (321) en (323) van n°. 504 en 506 toe te passen op het geval, dat a en b natuurlijke getallen zijn, vindt men de in n°. 518 verkregen resultaten terug, *dat het product van een positief en een negatief getal negatief en dat van twee negatieve getallen positief is.* Verder ziet men uit die formules, dat het product van $\pm a$ en $\pm b$ gelijk is aan $\pm ab$ en dus door weglating van het teeken in ab overgaat, waardoor men (blijkens het zooeven aangaande de absolute waarde opgemerkte) de formule (332) van n°. 522 terugvindt.

571. Deelbaarheid van geheele getallen. Het van nul verschillende geheele getal α heet *deelbaar door het geheele getal* β als men een zoodanig geheel getal γ bepalen kan, dat

$$\alpha = \beta\gamma \tag{368}$$

is; dit getal γ wordt als $\frac{\alpha}{\beta}$ of $\alpha : \beta$ geschreven. Blijkens de eigenschap van n°. 502 zijn, in geval van deelbaarheid, β en γ beide van nul verschillend.

Uit (368) volgt in verband met de eigenschap van n°. 522:

$$|\alpha| = |\beta| . |\gamma|, \tag{369}$$

zoodat uit de deelbaarheid van α *door* β *volgt, dat* $|\alpha|$ *door* $|\beta|$ *deelbaar is.* Daar $|\gamma|$ door de vergelijking (369) ondubbelzinnig bepaald is (zie n°. 133) en het teeken van γ door de eigenschappen van n°. 515 en 518 wordt aangewezen (γ positief of negatief al naar gelang α en β hetzelfde teeken of tegengesteld teeken hebben), is γ door de vergelijking (368) volkomen

bepaald, *zoodat de deeling, zoo ze mogelijk is, nog steeds ondubbelzinnig is.*

Uit (369) volgt verder in verband met (368):

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}, \qquad (370)$$

of in woorden:

De absolute waarde van een quotiënt is het quotiënt der absolute waarden van deeltal en deeler.

572. Omgekeerd volgt uit de deelbaarheid van $|\alpha|$ door $|\beta|$, dat men een natuurlijk getal n kan bepalen, waarvoor geldt:

$$|\alpha| = |\beta| n.$$

Daaruit volgt

voor α en β beide positief:

$$\alpha = \beta n,$$

voor α en β beide negatief:

$$-\alpha = (-\beta)n,$$
$$\alpha = \beta n,$$

voor α positief en β negatief:

$$\alpha = (-\beta)n = \beta(-n)$$

en voor α negatief en β positief:

$$-\alpha = \beta n,$$
$$\alpha = \beta(-n).$$

In alle gevallen is dus α door β deelbaar. In verband met het in n⁰. 571 gevondene heeft men dus:

Het van nul verschillende geheele getal α is dan en alleen dan door het geheele getal β deelbaar als $|\alpha|$ door $|\beta|$ deelbaar is.

Hieruit volgt verder, *dat de getallen α en $-\alpha$ door dezelfde geheele getallen deelbaar zijn en dat bij deelbaarheid door β ook deelbaarheid door $-\beta$ bestaat.*

We merken nog op, *dat de deelers van een van nul verschillend geheel getal α de op $|\alpha|$ deelbare natuurlijke getallen en de tegengestelden dier getallen zijn.*

573. Het is duidelijk, dat de verschillende eigenschappen van de deeling (zie n⁰. 145—155, 161 en 162) en die betreffende deelbaarheid (zie n⁰. 141, 142 en 156—160) na uitbreiding van het getalbegrip tot geheele getallen blijven gelden. Alleen dient een uitzondering gemaakt te worden voor die eigenschappen, waarin

het begrip „grooter" optreedt anders dan als voorwaarde om een aftrekking mogelijk te maken (welke beperkende voorwaarde nu kan worden weggelaten, tenzij, zooals in n°. 161, het verschil als exponent optreedt). De eigenschappen van n°. 151 en 153 moeten nu nl. aldus gelezen worden:

Is $\alpha > \beta$ *en* $\gamma > 0$, *dan is:*

$$\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}.$$

Zijn β *en* δ *positief, dan geldt*

$$\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\gamma}{\delta}$$

dan en alleen dan als $\alpha\delta > \beta\gamma$ *is* [1]).

We laten het aan den lezer over dit na te gaan.

574. Uitbreiding van een stelsel getallen door het vormen van getallenparen. We denken ons een *stelsel getallen S, waarvoor de grondeigenschappen van n°. 490 gelden.* Blijkens de eigenschap *IIc* van n°. 490 *is in dit stelsel S de aftrekking, zoo ze mogelijk is, ondubbelzinnig.* De *mogelijkheid* der aftrekking, dus de geldigheid der grondeigenschap van n°. 494, blijve echter in het midden gelaten.

Het stelsel *S* behoeft niet dat der aantallen (natuurlijke getallen en nul) te zijn. Evenals in n°. 530 en volg. voor het stelsel der aantallen geschied is, *kan men uit S door het vormen van getallenparen een stelsel getallen* Σ *afleiden, waarvoor* (met behoud van de grondeigenschappen van n°. 490) *ook de grondeigenschap van n°. 494 geldig geworden is.* De beschouwingen van n°. 530—536, 541—546 en 548—559 blijven nl. onveranderd doorgaan als men de aantallen door getallen van het stelsel *S* vervangt.

Bezit *S* reeds de eigenschap van n°. 494, dan blijft dit stelsel door het vormen van getallenparen onveranderd. In *S* is dan nl. de aftrekking steeds mogelijk, zoodat ieder getal van Σ, dus ieder paar getallen van *S* (welk paar volgens n°. 567 niets anders is dan het verschil dier getallen van *S*), dan reeds tot *S* behoort.

---

[1]) De in die eigenschappen voorkomende deelingen worden natuurlijk mogelijk ondersteld.

575. We onderstellen nu verder, *dat voor het stelsel S, behalve de grondeigenschappen van n⁰. 490, ook die van n⁰. 515 geldt,* en bovendien, *dat de aftrekking $a - b$ mogelijk is als $a > b$ is* (de moduluseigenschap der optelling zegt reeds, dat die aftrekking mogelijk is voor $a = b$); aan deze voorwaarden is b.v. door het stelsel der aantallen voldaan.

Een getal α van het stelsel Σ, dat uit S door vorming van getallenparen is afgeleid, is te schrijven als $a - b$, waarin a en b getallen van S zijn. Is nu α positief, dan is $a > b$ (zie de eigenschap van n⁰. 546); volgens de omtrent S gemaakte onderstelling is dus $a - b$ een getal van S. Hieruit blijkt, *dat ieder positief getal van Σ ook reeds tot S behoort, zoodat de uitbreiding van het stelsel getallen uitsluitend in het toevoegen van negatieve getallen bestaat.*

Een product van twee positieve getallen van Σ is dus, daar deze getallen ook tot S behooren en S de grondeigenschap van n⁰. 515 bezit, positief. *De grondeigenschap van n⁰. 515 is derhalve ook voor het stelsel Σ geldig,* zoodat daarvoor alle in § 1 van dit Hoofdst. voorkomende eigenschappen van kracht zijn.

---

§ 4. Andere invoeringswijzen der negatieve getallen.

576. Geheele getallen als paren natuurlijke getallen. Onderstel, *dat de natuurlijke getallen zijn ingevoerd, maar nog niet het getal nul.* Voor het stelsel S dier getallen gelden dan de grondeigenschappen van n⁰. 490 met uitzondering van de moduluseigenschap der optelling (*Id*).

Op de in § 2 aangegeven wijze (dus door het vormen van getallenparen) breiden we het stelsel S uit, daarbij de definities van „gelijk", „grooter", „som" en „product" resp. van n⁰. 531, 541, 548 en 554 overnemend. De zoo verkregen getallen (stelsels van gelijke paren natuurlijke getallen) noemen we weer ***geheele getallen.***

577. Bij deze definitie der geheele getallen dient de in n⁰. 536 gegeven definitie, die maakt, dat de oorspronkelijke getallen, in het stelsel der geheele getallen worden opgenomen, gewijzigd te worden doordat het getal nul in het oorspronkelijke stelsel ontbreekt. De door (343) aangegeven definitie vervangen we daarom door de iets minder eenvoudige definitie

$$(a+1,\ 1) = a. \qquad (371)$$

578. De bewijzen, dat de begrippen „grooter", „som" en „product" van de keus van de representanten der geheele getallen onafhankelijk zijn, blijven dezelfde als in § 2 (zie n⁰. 542, 543, 548, 549 en 554). Hetzelfde geldt voor de bewijzen, dat de bestaande grondeigenschappen geldig gebleven zijn (zie n⁰. 545, 552, 553, 556 en 557).

Alleen ontstaat een verschil bij de bewijzen, *dat voor natuurlijke getallen de nieuwe definities op hetzelfde neerkomen als de oude* (waardoor de volledige aansluiting van het nieuwe stelsel getallen aan dat der natuurlijke getallen gewaarborgd wordt),

daar deze bewijzen nu op de gelijkheid (371) van n⁰. 577 komen te berusten. Het natuurlijke getal a is volgens de nieuwe definitie (zie n⁰. 541—543) grooter dan het natuurlijke getal b als

$$(a+1,\ 1) > (b+1,\ 1),$$
$$(a+1)+1 > (b+1)+1,$$
$$a+2 > b+2,$$
$$a > b,$$

dus als a volgens de oude definitie $> b$ is (vergelijk n⁰. 544).

De som van a en b is volgens de nieuwe definitie:

$$(a+1,\ 1)+(b+1,\ 1) = (a+b+2,\ 2) =$$
$$= (a+b+1,\ 1) = a+b,$$

dus dezelfde als volgens de oude definitie (verg. n⁰. 550).

Voor het product is het bewijs aldus (verg. n⁰. 555):

$$(a+1,1).(b+1,1) = \big((a+1)(b+1)+1.1, (a+1).1+1.(b+1)\big) =$$
$$= (ab+a+b+2,\ a+b+2) = (ab+1,\ 1) = ab.$$

579. De eigenschap van n⁰. 537 blijft voor paren natuurlijke getallen doorgaan. Alleen is er dit verschil, dat de formule (348) nu aan $c < a$ en $< b$ (in plaats van $\leqq a$ en $\leqq b$) gebonden is.

De eigenschap van n⁰. 538 blijft doorgaan als men $a \geqq b$ door $a > b$ en het woord „aantal" door „natuurlijk getal" vervangt. Voor $a > b$ heeft men nl.:

$$(a,\ b) = (a+1,\ b+1) = \big((a+1)-b,\ (b+1)-b\big) =$$
$$= \big((a-b)+1,\ 1\big) = a-b.$$

580. De tweede eigenschap van n⁰. 539 moet zoo gewijzigd worden, *dat* $(a,\ b)$ *dan en alleen dan een natuurlijk getal is als* $a > b$ *is.* Uit $(a,\ b) = c$ volgt nl.:

$$(a,\ b) = (c+1,\ 1),$$
$$a+1 = c+1+b,$$
$$a = c+b.$$

In verband met de eigenschap van n⁰. 70 (waarin het woord „getallen" als „natuurlijke getallen" te lezen is) besluit men hieruit tot $a > b$.

De tweede eigenschap van n⁰. 540 is zoo te wijzigen, *dat een geheel getal, dat geen natuurlijk getal is, als* $(1,\ a)$ *te schrijven is.* We laten dit aan den lezer over na te gaan.

581. Het getal nul als geheel getal. Bij de in n⁰. 576—579 besproken uitbreiding van het stelsel der natuurlijke getallen is volgens de definitie van gelijkheid:

$$(a, a) = (b, b).$$

Alle paren van gelijke natuurlijke getallen zijn dus onderling gelijk en *representeeren derhalve één en hetzelfde geheele getal.* Dit geheele getal wordt *nul* (of 0) genoemd.

582. Men heeft:

$$(a, b) + 0 = (a, b) + (c, c) = (a + c, b + c) = (a, b).$$

Hiermede is voor het stelsel der geheele getallen de *modulus-eigenschap der optelling* (eigenschap *Id* van n⁰. 490) bewezen.

De geldigheid der grondeigenschap van n⁰. 494 voor geheele getallen, ingevoerd als paren natuurlijke getallen, wordt op geheel dezelfde wijze aangetoond als in n⁰. 558. Hiermede zijn dan tevens de daaruit afgeleide eigenschappen bewezen. Dit kan echter ook weer rechtstreeks geschieden. Als voorbeeld geven we het bewijs der eigenschap van n⁰. 502:

$$0 \, . \, (a, b) = (c, c) \, . \, (a, b) = (ca + cb, cb + ca) = 0.$$

583. Positieve en negatieve geheele getallen. Aan $(a, b) > 0$, of

$$(a, b) > (c, c),$$

is dan en alleen dan voldaan als $a + c > c + b$, dus $a > b$ is. Hiermede is de eigenschap van n⁰. 546 aangetoond.

Hieruit volgt (in verband met de tweede eigenschap van n⁰. 539, gewijzigd op de in n⁰. 580 aangegeven manier), *dat de positieve geheele getallen de natuurlijke getallen zijn*, en verder (volgens de gewijzigde eigenschap van n⁰. 540), *dat een negatief geheel getal in den vorm* $(1, a)$ *te schrijven is, waarin* $a > 1$ *is, dus in den vorm* $(1, b + 1)$ (vergelijk n⁰. 547).

Blijkens het voorgaande blijft het in n⁰. 565 van de grondeigenschap van n⁰. 515 gegeven bewijs bij de nieuwe definitie van geheele getallen onveranderd doorgaan.

584. De *omvorming van een negatief geheel getal* α *tot den vorm* $-a$, *waarin* a *een natuurlijk getal is,* geschiedt door op te merken, dat het tegengestelde van α positief (zie de eigenschap van n⁰. 512), dus een natuurlijk getal is (zie n⁰. 583).

Ook kan men α eerst in den vorm $(1, b+1)$ brengen (zie n⁰. 583) en dit verder volgens de formules (362) en (371) van n⁰. 558 en 577 aldus omvormen:

$$(1, b+1) = -(b+1, 1) = -b.$$

585. Algemeenere geldigheid der voorgaande beschouwingen. De beschouwingen van n⁰. 576—584 zijn niet daaraan gebonden, dat het stelsel S, van wiens getallen men paren vormt, juist het stelsel der natuurlijke getallen is (vergelijk n⁰. 574 en 575).

Neemt men om te beginnen voor S een stelsel getallen, waarvoor de grondeigenschappen van n⁰. 490, met uitzondering van *Id*, gelden, en breidt men dit uit door het vormen van getallenparen, dan blijven de beschouwingen van n⁰. 576—578, 581 en 582 van kracht. De genoemde grondeigenschappen zijn dus behouden gebleven, terwijl de optelling een modulus gekregen heeft en dus de grondeigenschap *Id* geldig geworden is; evenzoo de grondeigenschap van n⁰. 494.

586. Neemt men omtrent het stelsel S bovendien aan, *dat de aftrekking $a - b$ dan en alleen dan mogelijk is als $a > b$ is, dan wordt voor het uitgebreide stelsel* Σ (dat der getallenparen) *ook de grondeigenschap van n⁰. 515 geldig.* Immers *dan behoort een getallenpaar* (a, b), d. i. $a - b$, *dan en alleen dan tot S als $a > b$ is.* Daar verder aan $(a, b) > 0 = (c, c)$ dan en alleen dan voldaan is als $a > b$ is (vergelijk n⁰. 583), *behooren de positieve getallen van Σ, en geen andere, ook tot S.* Het product van twee positieve getallen van Σ is dus een getal van S, dus positief.

---

587. Methode van de doubleering der natuurlijke getallen. Nadat eenmaal het getal nul op de in n⁰. 291—319 besproken wijze aan de natuurlijke getallen is toegevoegd, kan men de *negatieve geheele getallen* ook invoeren als *symbolen* (*teekens*), *die men verkrijgt door voor de symbolen der natuurlijke getallen het teeken — te plaatsen.* Zoo voert het natuurlijke getal a tot het negatieve getal $-a$, dat het ***tegengestelde van a*** genoemd wordt. De natuurlijke getallen duidt men nu ook aan als ***positief*** te zijn. Dat de negatieve getallen < 0 en de positieve getallen

> 0 zijn, wordt eerst later vastgesteld (zie de in n⁰. 589 gegeven definitie van grooter).

Bij deze invoeringswijze der negatieve getallen heeft men voorloopig bij — *a* in — slechts een onderdeel van het getalteeken te zien en niet het teeken der aftrekking. Doordat er bij een negatief getalteeken aan — geen ander getalteeken voorafgaat (zooals bij de aftrekking) is verwarring buiten gesloten,

588. Bij definitie *is een negatief getal aan ieder positief getal en aan nul ongelijk, terwijl twee negatieve getallen* $-a$ *en* $-b$ *alleen gelijk zijn als* $a = b$ *is.*

Bij deze invoering der negatieve getallen wordt dus ieder geheel getal door slechts één symbool voorgesteld, zoodat de beschouwingen omtrent gelijkheid (zie n⁰. 531—535) komen te vervallen. Dit geeft, in vergelijking met de vroeger besproken invoeringswijzen, een vereenvoudiging, die echter weer te niet gedaan wordt door de meerdere moeite, die het bewijzen der grondeigenschappen kost.

589. Aanvullingsdefinities voor de begrippen „grooter" „som" en „product". De begrippen „grooter", „som" en „product" moeten nu voor die combinaties van twee getallen gedefiniëerd worden, waarbij er minstens één negatief is. Deze aanvullingsdefinities zijn:

Definitie van grooter:

$$a > -b; \qquad (372)$$

$$0 > -a\ ^{1)}; \qquad (373)$$

$$-a > -b \text{ als } a < b \text{ is}. \qquad (374)$$

Definitie van som:

$$-a + 0 = 0 + (-a) = -a; \qquad (375)$$

$$-a + a = a + (-a) = 0; \qquad (376)$$

$$a + (-b) = -b + a = a - b \text{ als } a > b \text{ is}\ ^{2)}; \qquad (377)$$

$$a + (-b) = -b + a = -(b - a) \text{ als } a < b \text{ is}; \qquad (378)$$

$$-a + (-b) = -(a + b). \qquad (379)$$

---

[1]) Dit maakt, dat een negatief getal, zooals het nu gedefiniëerd is (als $-a$), ook aan de in n⁰. 512 van negatief gegeven definitie (nl. < 0) voldoet.

[2]) Blijkens (376) geldt dit ook als $a = b$ is.

Definitie van product:

$$0 \,.\, (-a) = (-a) \,.\, 0 = 0, \tag{380}$$

$$a \,.\, (-b) = (-b) \,.\, a = -(ab), \tag{381}$$

$$(-a) \,.\, (-b) = ab. \tag{382}$$

Hierin stellen de letters *natuurlijke getallen* voor.

Zooals zonder moeite te zien is, zijn in het bovenstaande alle denkbare gevallen, waarbij een negatief getal betrokken is, opgesomd.

590. Het is duidelijk waarom de begrippen „grooter", „som" en „product" juist zoo gedefiniëerd zijn als dit in n^0. 589 geschied is. De daar bij wijze van definitie gegeven formules liggen nl. in het in § 1 van dit Hoofdst. gevondene opgesloten (zie n^0. 497, 498, 502, 504, 506, 509, 512 en 514).

Bij de definities van n^0. 589 heeft men verschillende gevallen te onderscheiden, een onderscheiding, die in nog sterkere mate bij de bewijzen der grondeigenschappen noodig is (zie n^0. 595—602). De noodzakelijkheid hiervan, die een groot bezwaar van deze invoeringswijze der negatieve getallen is, staat hiermede in verband, dat de definities nu zoo gegeven zijn, dat men met een *aanvulling* van het stelsel der aantallen te doen heeft. Bij de vorige invoeringswijzen daarentegen had men een *uitbreiding* daarvan doordat de gegeven definities toen ook op de reeds ingevoerde getallen betrekking hadden, waardoor met één algemeen geldend bewijs voor iedere grondeigenschap kon worden volstaan.

591. Uitbreiding der formules van n^0. 589. Ten einde het bewijzen der grondeigenschappen gemakkelijker te maken merken we op, *dat men aan sommige der betrekkingen van n^0. 589 algemeenere geldigheid kan geven door de daarin voorkomende letters als willekeurige geheele getallen op te vatten*; we vervangen die letters dan door Grieksche om aan te geven, dat ze niet noodzakelijk een natuurlijk getal voorstellen (zie de noot van blz. 257).

In de eerste plaats maakt het in n^0. 295 gevondene, *dat* (*375*) *algemeener aldus geschreven kan worden:*

$$\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha. \tag{383}$$

Blijkens n⁰. 304 *kan men evenzoo voor* (*380*) *schrijven:*

$$0 \,.\, \alpha = \alpha \,.\, 0 = 0. \qquad (384)$$

592. Het levert gemak op de teekens $-(-a)$ en -0 in te voeren en bij definitie vast te stellen:

$$-(-a) = a, \quad -0 = 0\ ^{1}).$$

Men heeft dan algemeen:

$$-(-\alpha) = \alpha, \qquad (385)$$

daar toch $-\{-(-a)\} = -a$ is.

Door de ingevoerde symbolen bereikt men, *dat* $-\alpha$ *voor ieder geheel getal* α *beteekenis heeft*, en bovendien, *dat voor* (*376*) *algemeener kan worden geschreven:*

$$-\alpha + \alpha = \alpha + (-\alpha) = 0. \qquad (386)$$

593. Blijkens de in n⁰. 589 van product gegeven definitie heeft men in verband met (385):

$$(-a) \,.\, (-b) = ab = -(-ab) = -(-a) \,.\, b\ ^{2}),$$

waaruit men ziet, dat (381) uitgebreid kan worden tot:

$$\alpha \,.\, (-b) = (-b) \,.\, \alpha = -\alpha b. \qquad (387)$$

Hieruit volgt verder in verband met (385):

$$\alpha \,.\, \{-(-b)\} = \alpha b = -(-\alpha b) = -\alpha \,.\, (-b),$$

zoodat (387) blijft gelden als men b door $-b$ vervangt en dus (*381*) *nog verder kan worden uitgebreid tot:*

$$\alpha \,.\, (-\beta) = (-\beta) \,.\, \alpha = -\alpha\beta, \qquad (388)$$

een formule, die blijkbaar ook geldt als α of β nul is [3]).

594. Uit de van som gegeven definitie (zie n⁰. 589) volgt:

$$-\{a + (-b)\} = -(a - b)\ ^{4}) = -a + b\ ^{5}) =$$
$$= -a + \{-(-b)\}\ (a > b),$$
$$-\{a + (-b)\} = -\{-(b - a)\}\ ^{5}) = b - a =$$
$$= -a + b\ ^{4}) = -a + \{-(-b)\}\ (a < b),$$
$$-\{-a + (-b)\} = -\{-(a + b)\}\ ^{6}) = a + b =$$
$$= -(-a) + \{-(-b)\}.$$

---

[1]) De afspraak $-0 = 0$ maakt, dat (378) ook geldt als $a = b$ is.

[2]) Hierin is $-ab$ als $-(ab)$ en $-(-a)b$ als $-\{(-a)b\}$ te lezen.

[3]) Evenzoo kan (382) uitgebreid worden tot:

$$(-\alpha) \,.\, (-\beta) = \alpha\beta.$$

[4]) Volgens (377).

[5]) Volgens (378).

[6]) Volgens (379).

Hieruit blijkt, *dat* (*379*) *uitgebreid kan worden tot:*

$$-(\alpha+\beta)=-\alpha+(-\beta). \tag{389}$$

595. Bewijzen van de grondeigenschappen der rechtstreeksche verbindingen bij de methode der doubleering. Uit de definities van n⁰. 589 leest men onmiddellijk de grondeigenschappen *Ia, b, e, f* van n⁰. 490 af, terwijl de juistheid van *Id* (*moduluseigenschap der optelling*) in (383) staat uitgedrukt.

Ook *Ii* (*moduluseigenschap der vermenigvuldiging*) is gemakkelijk aan te toonen. Volgens (381) is nl.:

$$1\,.\,(-b)=-(1\,.\,b)=-b.$$

596. Zonder moeite bewijst men verder de grondeigenschap *Ig* (*associatieve eigenschap der vermenigvuldiging*). Is nl. een (of meer) der geheele getallen α, β en γ gelijk aan nul, dan is volgens (384) zoowel $(\alpha\beta)\gamma$ als $\alpha(\beta\gamma)$ nul.

Zijn α, β en γ alle drie van nul verschillend, dan is volgens (381) en (382) zoowel $(\alpha\beta)\gamma$ als $\alpha(\beta\gamma)$ gelijk aan

$$|\alpha|\,.\,|\beta|\,.\,|\gamma| \text{ of aan } -|\alpha|\,.\,|\beta|\,.\,|\gamma|,$$

al naar gelang een even aantal (nul of twee) dan wel een oneven aantal (een of drie) der getallen α, β, γ negatief is. Hierin is $|\alpha|$ de absolute waarde van α (zie n⁰. 520 en 570).

597. Meer moeite leveren de grondeigenschappen *Ic* en *h*. Om *Ih* (*distributieve eigenschap*), dus

$$(\alpha+\beta)\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma, \tag{390}$$

aan te toonen beginnen we met op te merken, dat de juistheid daarvan onmiddellijk is in te zien als een der getallen α, β, γ nul is.

Is $a \geqq b$, dan is:

$$\{a+(-b)\}c=(a-b)c\ ^{1})=ac-bc\ ^{2})=$$
$$=ac+(-bc)=ac+(-b)c, \tag{391}$$

zoodat dan voor $\alpha=a$, $\beta=-b$ geldt:

$$(\alpha+\beta)c=\alpha c+\beta c. \tag{392}$$

---

[1]) Volgens (377); zie ook noot 2 van blz. 277.

[2]) Volgens de formule (59) van n⁰. 103.

Is $\alpha = a$, $\beta = -b$ (dus $-\alpha = -a$, $-\beta = b$) en $a < b$, dan is volgens (391):

$$(-a + b)c = (-a)c + bc,$$

dus:

$$\{-\alpha + (-\beta)\}c = (-\alpha)c + (-\beta)c = -\alpha c + (-\beta c)\ ^{1}), \quad (393)$$

een formule, die blijkbaar ook geldt als α en β beide negatief zijn.

Uit (393) volgt verder in verband met (389):

$$(\alpha + \beta)c = [-\{-(\alpha + \beta)\}]c\ ^{2}) =$$
$$= [-\{-\alpha + (-\beta)\}]c = -\{-\alpha + (-\beta)\}c\ ^{1}) =$$
$$= -\{-\alpha c + (-\beta c)\} = -\{-(\alpha c + \beta c)\} = \alpha c + \beta c\ ^{2}).$$

Hieruit blijkt, dat (392) voor willekeurige geheele getallen α en β geldt.

Uit (392) volgt verder:

$$(\alpha + \beta)(-c) = -(\alpha + \beta)c\ ^{1}) = -(\alpha c + \beta c) =$$
$$= -\alpha c + (-\beta c)\ ^{3}) = \alpha(-c) + \beta(-c)\ ^{1}).$$

Hiermede is de formule (390) voor $\gamma = -c$ aangetoond, zoodat deze voor willekeurige geheele getallen α, β, γ geldig is.

598. Zonder van de formules (388) en (389) van n⁰. 593 en 594 (die ons in staat stelden sommige gevallen, die zich bij (390) kunnen voordoen, tot andere terug te brengen) gebruik te maken had men *zeven* verschillende gevallen ten aanzien van het positief of negatief zijn van α, β, $\alpha + \beta$, γ te onderscheiden gehad; het geval α, β en γ alle positief kan nu natuurlijk, als reeds afgedaan zijnde, buiten beschouwing blijven.

Het bewijs der distributieve eigenschap had ook geleverd kunnen worden door al die gevallen rechtstreeks met behulp van de definities van n⁰. 589 te behandelen. Zoo heeft men b.v.:

$$\{-a + (-b)\}c = \{-(a + b)\}c = -(a + b)c =$$
$$= -(ac + bc) = -ac + (-bc) = (-a)c + (-b)c,$$
$$\{a + (-b)\}(-c) = \{-(b - a)\}(-c) = (b - a)c =$$
$$= bc - ac = -ac + bc = a(-c) + (-b)(-c) \quad (a < b).$$

599. We gaan nu over tot het bewijs der grondeigenschap

---

[1]) Volgens (388).
[2]) Volgens (385).
[3]) Volgens (389).

Ic van n⁰. 490 (*associatieve eigenschap der optelling*), dus van de formule

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma). \qquad (394)$$

Is een der getallen α, β, γ nul, dan is de juistheid van (394) onmiddellijk uit de moduluseigenschap der optelling in te zien, zoodat we deze getallen verder van nul verschillend kunnen onderstellen.

Is (394) voor een drietal getallen α, β, γ aangetoond, dan volgt ze voor $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$ aldus, lettend op de formule (389) van n⁰. 594:

$$\{-\alpha + (-\beta)\} + (-\gamma) = -(\alpha + \beta) + (-\gamma) =$$
$$= -\{(\alpha + \beta) + \gamma\} = -\{\alpha + (\beta + \gamma)\} =$$
$$= -\alpha + \{-(\beta + \gamma)\} = -\alpha + \{-\beta + (-\gamma)\}.$$

Hierdoor wordt het geval, dat α, β en γ alle negatief zijn, teruggebracht tot dat, waarbij ze alle positief (dus natuurlijke getallen) zijn, en het geval van twee negatieve en een positief getal tot dat van *twee positieve en een negatief getal.* Alleen dit laatste geval moet dus nog onderzocht worden.

Is α *negatief, terwijl* β *en* γ *positief zijn*, dan luidt (394):

$$(-a + b) + c = -a + (b + c).$$

Voor het bewijs hiervan heeft men drie gevallen te onderscheiden:

$a \leqq b$: $\quad (-a + b) + c = (b - a) + c =$
$\qquad = (b + c) - a$ [1] $= -a + (b + c)$;

$b < a \leqq b + c$: $\quad (-a + b) + c = -(a - b) + c = c - (a - b) =$
$\qquad = (b + c) - a$ [2] $= -a + (b + c)$;

$a > b + c$: $\quad (-a + b) + c = -(a - b) + c = -\{(a - b) - c\} =$
$\qquad = -\{a - (b + c)\}$ [3] $= -a + (b + c)$.

Het geval, *dat* γ *negatief is en* α *en* β *positief zijn*, kan wegens de commutatieve eigenschap der optelling aldus tot het vorige worden teruggebracht:

$$(a + b) + (-c) = -c + (b + a) =$$
$$= (-c + b) + a = a + \{b + (-c)\}.$$

---

[1]) Volgens de formule (29) van n⁰. 77.
[2]) Volgens de formule (32) van n⁰. 80.
[3]) Volgens de formule (31) van n⁰. 79.

Ook het geval, *dat* β *negatief is en* α *en* γ *positief zijn*, kan zoo tot het geval α negatief worden teruggebracht, nl. aldus:

$$\{a + (-b)\} + c = (-b + a) + c =$$
$$= -b + (a + c) = -b + (c + a) =$$
$$= (-b + c) + a = a + (-b + c).$$

Natuurlijk had men ook alle gevallen, die zich kunnen voordoen, afzonderlijk kunnen behandelen (zonder bepaalde groepen van gevallen tot andere terug te brengen). Door het groote aantal dier gevallen zou dan het bewijs een nog gecompliceerder aanzien gekregen hebben.

600. Bewijzen van de grondeigenschappen der volgorde bij de methode der doubleering. Uit de definities van n⁰. 589 volgt onmiddellijk de juistheid der grondeigenschap *IIa* van n⁰. 490.

Om de bewijzen van de geldigheid der grondeigenschappen *IIb* en *c* te vereenvoudigen (op soortgelijke wijze als dit met de grondeigenschappen *Ic* en *h* geschied is) merken we eerst op, *dat* (*374*) *uitgebreid kan worden tot:*

$$-\alpha > -\beta \text{ als } \alpha < \beta \text{ is,} \tag{395}$$

waarin α *en* β *willekeurige geheele getallen voorstellen.*

Volgens (373) is dit nl. juist voor $\alpha = 0$ (dus β positief, $-\alpha = 0$ en $-\beta$ negatief) en ook voor $\beta = 0$ (dus α negatief, $-\beta = 0$ en $-\alpha$ positief). Volgens (372) is (395) juist als α negatief en β positief (dus $-\alpha$ positief en $-\beta$ negatief) is. Is eindelijk $\alpha = -a$ en $\beta = -b$, dan volgt uit $\alpha < \beta$, in verband met (374): $a > b$, dus $-\alpha > -\beta$.

601. We bewijzen nu de geldigheid der grondeigenschap *IIb* (*transitieve eigenschap van het grooter zijn*), dus:

$$\textit{uit } \alpha > \beta > \gamma \textit{ volgt } \alpha > \gamma. \tag{396}$$

Uit $\alpha > \beta > \gamma$ volgt in verband met (395) $-\gamma > -\beta > -\alpha$, terwijl evenzoo uit $\alpha > \gamma$ volgt $-\gamma > -\alpha$. Hieruit blijkt, dat het bewijs van (396) voor drie getallen α, β, γ geleverd is, zoodra dit voor $-\gamma$, $-\beta$, $-\alpha$ geschied is. Hierdoor behoeft (396) nog slechts te worden aangetoond voor *het geval, dat* $\beta \geqq 0$ *is.*

Is $\beta = 0$, dan volgt uit $\alpha > \beta > \gamma$, in verband met de definitie (373), dat α positief en γ negatief is. Volgens (372) is dus $\alpha > \gamma$.

Is β positief, dan volgt uit $\alpha > \beta$, in verband met (372), dat ook α positief is. Is nu $\gamma \geqq 0$, dan is de juistheid van $\alpha > \gamma$ een gevolg van de eigenschap van n^0. 5 (die volgens n^0. 298 na invoering van het getal nul geldig gebleven is). Is echter γ negatief, dan volgt $\alpha > \gamma$ uit (372).

602. We gaan nu over tot het bewijs van de *grondeigenschap IIc* van n^0. 490, die zegt:

$$\textit{uit } \alpha > \beta \textit{ volgt } \alpha + \gamma > \beta + \gamma. \tag{397}$$

Dit is (volgens de moduluseigenschap der optelling) juist voor $\gamma = 0$.

Is de juistheid van (397) voor de getallen α, β, γ aangetoond, dan blijkt de juistheid voor de getallen $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$ aldus. Uit $-\beta > -\alpha$ volgt in verband met (395) en (385):

$$\alpha > \beta,$$
$$\alpha + \gamma > \beta + \gamma,$$
$$-(\beta + \gamma) > -(\alpha + \gamma),$$

dus volgens (389) en (385):

$$-\beta + (-\gamma) > -\alpha + (-\gamma).$$

Bijgevolg behoeft (397) slechts te worden aangetoond voor het geval, *dat γ positief is.* Daar het geval, dat α, β en γ geen van alle negatief zijn, reeds voor de invoering der negatieve getallen is afgehandeld, kan verder β negatief ondersteld worden. Men heeft dan als $\alpha \geqq 0$ is: $\alpha = a$, $\beta = -b$, $\gamma = c$, waarin a een aantal en c een natuurlijk getal is. Hierbij zijn verder twee gevallen te onderscheiden, nl.:

$c \geqq b$; dan is $-b + c = c - b < c + a$;

$c < b$; dan is $-b + c = -(b - c) < c + a$.

Is $\alpha < 0$, dus $\alpha = -a$, $\beta = -b$, $\gamma = c$ en (wegens $\alpha > \beta$) $a < b$, dan heeft men drie gevallen te onderscheiden, nl.:

$c < a$; dan is $a - c < b - c$ (zie n^0. 84), dus $-(a - c) > -(b - c)$, dus $-a + c > -b + c$;

$a \leqq c \leqq b$; dan is $-a + c = c - a > -(b - c) = -b + c$;

$c > b$; dan is $c < c + (b - a)$, dus $c - b < c + (b - a) - b = c - a$, dus $-b + c < -a + c$.

Natuurlijk hadden ook weer alle denkbare gevallen ieder op zich zelf onderzocht kunnen worden.

603. Wijziging van de grondeigenschappen der volgorde door de mogelijkheid van de aftrekking. De geldigheid van de grondeigenschap van n⁰. 494 (*mogelijkheid der aftrekking van nul*) volgt bij de methode der doubleering onmiddellijk uit (386) (zie n⁰. 592). Hiermede zijn dan ook alle daaruit voortvloeiende eigenschappen der aftrekking (b.v. de onbeperkte mogelijkheid der aftrekking en het terug te brengen zijn tot optelling; zie n⁰. 491—493, 497 en 498) bewezen.

Ook is de juistheid der grondeigenschap van n⁰. 515 direct in te zien, daar volgens de definitie van grooter (zie n⁰. 589) *de positieve geheele getallen de natuurlijke getallen zijn* en derhalve het product van twee positieve getallen een natuurlijk getal, dus positief is.

604. De geldigheid der grondeigenschap van n⁰. 494 maakt, *dat men de grondeigenschappen IIb en c van n⁰. 490 ook door de volgende kan vervangen:*

IIb'). De som van twee positieve getallen (getallen > 0) is positief.

IIc'). Men heeft $\alpha > \beta$ of $\alpha < \beta$ al naar gelang $\alpha - \beta$ positief of negatief is.

Dit is zoo op te vatten, dat *IIb* en *c*, in verband met de overige grondeigenschappen, een gevolg zijn van *IIb'* en *c'* (te zamen beschouwd).

Is nl. gegeven $\alpha > \beta > \gamma$, dan is:

$$\alpha = \beta + p, \ \beta = \gamma + q, \tag{398}$$

waarin p en q positief zijn (volgens *IIc'*). Uit (398) volgt verder:

$$\alpha + \beta = \beta + p + \gamma + q,$$

dus wegens de ondubbelzinnigheid der aftrekking [1]):

$$\alpha = \gamma + (p + q).$$

Wegens *IIb'* is $p + q$ positief, dus (wegens *IIc'*) $\alpha > \gamma$. Hier-

---

[1]) Deze moet nu natuurlijk niet (zooals in n⁰. 69 geschied is) uit de grondeigenschap *IIc* worden afgeleid, maar uit de grondeigenschap van n⁰. 494 in verband met de stelling van n⁰. 491.

mede is IIb aangetoond; voor het bewijs is zoowel IIb' als IIc' gebruikt.

Is gegeven $\alpha > \beta$, dan is:

$$\alpha = \beta + p,$$

waarin p positief is (volgens IIc'), dus:

$$\alpha + \gamma = (\beta + \gamma) + p,$$

dus (weer volgens IIc') $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$. Hiermede is IIc aangetoond, terwijl voor het bewijs IIb' niet is behoeven gebruikt te worden.

Omgekeerd is ook IIc' uit IIc (en de overige grondeigenschappen) af te leiden zonder IIb te gebruiken, terwijl IIb' slechts uit IIb en IIc te zamen is af te leiden. We laten dit aan den lezer over.

605. De in n⁰. 604 besproken omvorming van de grondeigenschappen der volgorde levert bij de methode der doubleering het voordeel, dat de nieuwe grondeigenschappen veel gemakkelijker te bewijzen zijn dan de oorspronkelijke.

De grondeigenschap IIb' van n⁰. 604 wordt op geheel dezelfde wijze aangetoond als waarop in n⁰. 603 de grondeigenschap van n⁰. 515 bewezen is.

Is $\alpha > \beta$, dan volgt uit $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$ in ieder der vijf mogelijke gevallen, dat $\alpha - \beta$ een natuurlijk getal, dus positief is. Deze vijf gevallen zijn:

$\alpha = a$, $\beta = b$ $(a > b)$, dus $\alpha - \beta = a - b$;

$\alpha = a$, $\beta = 0$, dus $\alpha - \beta = a$;

$\alpha = a$, $\beta = -b$, dus $-\beta = b$, $\alpha - \beta = a + b$;

$\alpha = 0$, $\beta = -b$, dus $\alpha - \beta = b$;

$\alpha = -a$, $\beta = -b$ $(a < b)$, dus $\alpha - \beta = -a + b = b - a$.

Wegens $\beta - \alpha = -(\alpha - \beta)$ (een formule, die uit (32) volgt door $a = 0$ te stellen) is $\beta - \alpha$ negatief, waarmede de grondeigenschap IIc' is aangetoond.

Deze bewijzen maken de gecompliceerdere bewijzen van n⁰. 600—602 overbodig.

606. Rij der geheele getallen. Uit de rij (1) der natuurlijke getallen (zie n⁰. 1) kan men ook tot de geheele getallen (dus

de invoering van nul en de negatieve getallen) geraken door die rij naar links onbepaald voort te zetten met 0, — 1, — 2, — 3, enz., waardoor men de rij

$$\ldots\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots \qquad (399)$$

verkrijgt.

Een getal α wordt grooter dan een getal β genoemd als het in deze rij rechts van α staat. Dit voert tot de in n⁰. 589 van „grooter" gegeven definitie.

607. De optelling kan nu op soortgelijke wijze als in n⁰. 45 door middel van tellen gedefiniëerd worden. Daartoe onderscheiden we *tellen* en *terugtellen*, waaronder we verstaan het opnoemen van de getallen der rij (399) met een bepaald getal beginnend, van links naar rechts resp. van rechts naar links.

Is α een geheel getal en b een aantal (natuurlijk getal of nul), dan wordt $\alpha + b$ gedefiniëerd als het getal dat bereikt wordt door, met α beginnend, gelijk op te tellen met iemand, die van 0 tot en met b telt. Hieruit volgt onmiddellijk, dat $\alpha + 0 = \alpha$ is (moduluseigenschap); het tellen van 0 tot en met b bestaat nl. voor $b = 0$ alleen in het noemen van het getal 0, zoodat bij het medetellen alleen het getal α wordt opgenoemd.

Is b een natuurlijk getal, dan wordt onder $\alpha + (-b)$ verstaan het getal, dat bereikt wordt door, met α beginnend, terug te tellen gelijk op met iemand, die van 0 tot en met b telt.

Uit deze definities zijn de formules af te leiden, die in n⁰. 589 bij wijze van definitie voor $\alpha + \beta$ gegeven zijn.

608. Is a een natuurlijk getal, dan wordt het product $a\beta$ op dezelfde wijze als in n⁰. 89 als

$$\beta + \beta + \ldots\ldots + \beta \ (a \text{ termen})$$

gedefiniëerd. Hieruit volgt:

$$a(-b) = -ab.$$

Om de commutatieve eigenschap der vermenigvuldiging te doen doorgaan definiëert men:

$$(-a)b = -ab.$$

Om dit ook te doen doorgaan als men b door $-b$ vervangt

(daarbij de notatie — (— a) van n⁰. 592 gebruikend) definiëert men verder:

$$(-a)(-b) = ab.$$

Op deze wijze geraakt men tot de in n⁰. 589 gegeven definitie der vermenigvuldiging.

---

609. Gelijkvormige stelsels getallen. We beschouwen twee *stelsels getallen S en S', waarvoor de grondeigenschappen Ia, e en IIa van n⁰. 490 gelden,* en nemen aan, *dat deze stelsels op zoodanige wijze op elkaar kunnen worden afgebeeld* (zie n⁰. 14), *dat, als a en b twee getallen van S zijn en a' en b' de correspondeerende getallen van S', de getallen $a + b$ en ab resp. met $a' + b'$ en $a'b'$ correspondeeren, terwijl $a' > b'$ is als $a > b$ is.* Dit wil dus zeggen, dat de afbeelding van dien aard is, dat ze de betrekking „som", „product" en „grooter" van het eene stelsel op het andere overdraagt. Een zoodanige afbeelding noemen we een ***gelijkvormige***, terwijl we ook de stelsels getallen S en S', die zulk een afbeelding op elkaar toelaten, ***gelijkvormig*** noemen. Twee gelijkvormige stelsels getallen verschillen slechts in de benaming, of voorstellingswijze, der getallen en zijn overigens als geheel hetzelfde te beschouwen.

Opgemerkt zij nog, *dat twee stelsels getallen, die met een zelfde derde stelsel gelijkvormig zijn, ook onderling gelijkvormig zijn*, zooals onmiddellijk uit de definitie blijkt (vergelijk de eigenschap van n⁰. 216).

610. Zijn a, b, c drie getallen van het stelsel S, die aan

$$a + b = c$$

voldoen, en a', b', c' de correspondeerende getallen van S', dan is

$$a' + b' = c'.$$

Is de aftrekking $c - b$ mogelijk, dan geldt dus hetzelfde voor $c' - b'$, terwijl beide verschillen correspondeerende getallen zijn. Een overeenkomstige opmerking geldt voor quotiënten.

Daar de modulus der optelling het verschil van gelijke getallen is, *zal, als het eene stelsel een optellingsmodulus bezit, hetzelfde*

voor het andere stelsel gelden, terwijl beide moduli correspondeeren. Dit is ook van toepassing op de vermenigvuldigingsmoduli.

Verder is het duidelijk, dat ook de overige grondeigenschappen van het eene stelsel eveneens in het andere stelsel gelden.

611. Gelijkvormigheid der verschillende stelsels geheele getallen. Een geval van gelijkvormigheid van getalstelsels heeft men bij *de verschillende manieren, waarop het stelsel der geheele getallen is ingevoerd*, nl. als een *stelsel aantallenparen* (zie n°. 530—557), als een stelsel *natuurlijke getallenparen* (zie n°. 576—584) en als het *stelsel der natuurlijke getallen, het getal nul en de van het teeken — voorziene natuurlijke getallen* (zie n°. 587—605).

De gelijkvormigheid van beide eerstgenoemde stelsels is onmiddellijk in te zien. Een paar natuurlijke getallen (a, b) is nl. ook een aantallenpaar, terwijl een aantallenpaar (a, b) wegens de definitie van gelijkheid (zie n°. 531) steeds tot een paar natuurlijke getallen is om te vormen (zoo het dit niet reeds is); men heeft nl.:

$$(a, b) = (a + 1, b + 1),$$

terwijl $a + 1$ en $b + 1$ natuurlijke getallen zijn ook als a of b nul is. De gelijkvormigheid van beide stelsels blijkt nu verder uit de overeenstemming der definities van „som", „product" en „grooter".

Dat het stelsel der aantallenparen met het in n°. 587—605 beschouwde stelsel gelijkvormig is, blijkt daaruit, dat een aantallenpaar ook als $(0, a)$ of $-a$ te schrijven is (waarin a een natuurlijk getal is) en omgekeerd en dat de formules, die in n°. 589 bij wijze van definitie gegeven zijn, uit de methode der aantallenparen voortvloeien (zie n°. 590).

612. Deelstelsel van een stelsel getallen. Zij G een groep grondeigenschappen en S een stelsel getallen, dat die grondeigenschappen bezit. Is S' een deel van S, waarvoor die grondeigenschappen eveneens gelden, dan noemen we *S' ten opzichte van de grondeigenschappen G een* ***deelstelsel*** *van S.*

In het bijzonder is S zelf een deelstelsel van S. Is S' van S verschillend, dus een echt deel van S (zie n°. 15), dan spreken we van een ***echt deelstelsel.***

Uitdrukkelijk zij nog opgemerkt, *dat voor twee getallen van S' de begrippen „som", „product" en „grooter" in het stelsel S' dezelfde beteekenis ondersteld worden te hebben als in het stelsel S.*

613. *Het stelsel der geheele getallen is niet met een deelstelsel van zich zelf gelijkvormig, van de identieke afbeelding op zich zelf afgezien.*

Dit drukt dus uit, dat de eenige gelijkvormige afbeelding (zie n⁰. 609) van het stelsel S der geheele getallen op een deelstelsel S' van zich zelf de ***identieke afbeelding*** is, waarbij ieder geheel getal met zich zelf correspondeert en dus S' het stelsel S zelf is.

Voor het bewijs gaan we daarvan uit, dat het getal 1, als modulus der vermenigvuldiging, bij een gelijkvormige afbeelding van S op S' met zich zelf correspondeert (zie n⁰. 610). Hetzelfde geldt dus voor $1 + 1 = 2$, voor $2 + 1 = 3$, enz., dus voor alle natuurlijke getallen. Evenzoo correspondeert het getal 0, als modulus der optelling, met zich zelf, dus ook $0 - a$ of $-a$, zoodat de afbeelding de identieke is.

614. In de eigenschap van n⁰. 613 ligt opgesloten:

Het stelsel S der geheele getallen is niet met een echt deelstelsel van zich zelf gelijkvormig.

Hieruit volgt van zelf, *dat S niet gelijkvormig kan zijn met een getalstelsel S, waarvan S een echt deelstelsel is.* Was nl. S' gelijkvormig op S afgebeeld, dan was daardoor S (als echt deel van S') gelijkvormig op een echt deel van S, dus op een echt deelstelsel van zich zelf, afgebeeld.

We merken nog op, *dat de eigenschap van n⁰. 613, en dus ook die van dit nummer, eveneens doorgaat als men het stelsel der geheele getallen door dat der aantallen of dat der natuurlijke getallen vervangt.* Het bewijs van n⁰. 613 blijft dan nl. doorgaan; slechts heeft men het laatste gedeelte daarvan weg te laten.

Daar het stelsel der aantallen een echt deelstelsel van dat der geheele getallen [1]) en het stelsel der natuurlijk getallen een echt

---

[1]) Ten opzichte van de grondeigenschappen van n⁰. 490.

deelstelsel van dat der aantallen is [1]), *zijn geen twee dier drie getalstelsels gelijkvormig.*

615. Uitbreidingen van het stelsel der aantallen, waarbij de aftrekking onbeperkt mogelijk is. Zij S het stelsel der aantallen, Σ dat der geheele getallen en Σ' een stelsel, waarvoor de grondeigenschappen van n⁰. 490 en 494 gelden en dat S tot deelstelsel heeft [2]) (zie n⁰. 612).

Zijn a en b twee getallen van S, dan is $a - b$ een getal van Σ', daar a en b getallen van Σ' zijn en in Σ' de aftrekking onbeperkt mogelijk is. Evenwel is $a - b$, als getallenpaar (a, b) opgevat, een getal van Σ; dit getallenpaar laten we met het getal $a - b$ van Σ' correspondeeren, waardoor Σ op een deel D van Σ' is afgebeeld. Die afbeelding is een gelijkvormige (zie n⁰. 609), daar men in het stelsel Σ' voor verschillen $a - b$ geheel overeenkomstige regels omtrent grooter, som en product heeft als in het stelsel Σ bij wijze van definitie zijn aangenomen (zie n⁰. 528 en 529). Hieruit volgt, dat Σ met het deel D van Σ' gelijkvormig is, zoodat D ten opzichte van de grondeigenschappen van n⁰. 490 en 494 een deelstelsel van Σ' is.

Bij de afbeelding van Σ op D correspondeert het aantal a, dus het getallenpaar $(a, 0)$, met het verschil $a - 0$, dus met het aantal a. Hieruit volgt, dat de tot S behoorende getallen van Σ bij deze afbeelding met zich zelf correspondeeren, waaruit verder blijkt, *dat S een deelstelsel van D is* [2]).

Men heeft dus:

Een stelsel getallen, waarvoor de grondeigenschappen van n⁰. 490 en 494 gelden en dat het stelsel der aantallen tot deelstelsel [2]) *heeft, bezit een deelstelsel* [3]) *D, dat gelijkvormig is met het stelsel der geheele getallen en het stelsel der aantallen tot deelstelsel* [2]) *heeft; bij de afbeelding der geheele getallen op D correspondeeren de aantallen met zich zelf.*

---

[1]) Ten opzichte van de grondeigenschappen van n⁰. 490 met uitzondering van *Id.*

[2]) Ten opzichte van de grondeigenschappen van n⁰. 490.

[3]) Ten opzichte van de grondeigenschappen van n⁰. 490 en 494.

616. Daar men bij de in n⁰. 615 besproken afbeelding correspondeerende getallen identificeeren kan, dus als een en hetzelfde beschouwen, kan men de eigenschap van n⁰. 615 eenvoudiger aldus formuleeren:

Een stelsel getallen, waarvoor de grondeigenschappen van n⁰. 490 en 494 gelden en dat het stelsel der aantallen als deel heeft (*dus een uitbreiding van het stelsel der aantallen is*), *bevat alle geheele getallen.*

Dit drukt uit, *dat de uitbreiding tot geheele getallen de geringste uitbreiding is, die men het stelsel der aantallen kan doen ondergaan ten einde de aftrekking zonder uitzondering mogelijk te maken, met behoud van de grondeigenschappen van n⁰. 490.* Iedere zoodanige uitbreiding bevat nl. het stelsel der aantallen als deel.

617. De beschouwingen van n⁰. 615 en 616 blijven met voor de hand liggende wijziging doorgaan als men voor S niet het stelsel der aantallen neemt, maar (evenals we dat in n⁰. 574 gedaan hebben) *een of ander stelsel getallen, waarvoor de grondeigenschappen van n⁰. 490 gelden.* Voor Σ heeft men dan het stelsel getallen te nemen, dat uit S door het vormen van getallenparen ontstaat, zoodat voor Σ ook nog de grondeigenschap van n⁰. 494 geldt (zie n⁰. 574).

---

§ 5. Gebruik van de negatieve getallen.

618. Hoeveelheden met twee soorten elementen. De negatieve getallen kunnen worden toegepast als men te doen heeft met *hoeveelheden, die twee soorten elementen bevatten, welke zoodanig zijn, dat twee elementen van verschillende soort elkaar geacht moeten worden te vernietigen.* Hiermede wordt bedoeld, *dat de hoeveelheid als niet wezenlijk veranderd is te beschouwen als men daaraan twee elementen van verschillende soort toevoegt of twee zulke elementen weglaat.*

Een voorbeeld van zulk een geval heeft men als de hoeveelheid bestaat uit guldens bezitting en guldens schuld, of uit meters afgelegd in de eene richting en in de tegengestelde richting. De beoordeeling of in een bepaald geval twee elementen van verschillende soort te zamen als niets te beschouwen zijn, is geen quaestie van rekenkunde, maar moet, voor men tot de toepassing der rekenkunde kan overgaan, bij wijze van afspraak worden vastgesteld. Of zich zulk een geval voordoet hangt van allerlei omstandigheden af. Zoo zullen een meter in de eene richting en een meter in de tegengestelde richting afgelegd elkaar vernietigen als het gaat om de plaats, waar men terecht komt, echter niet bij de beoordeeling van de inspanning, die de verplaatsingen gekost hebben. Evenzoo zal een bezitting en een daaraan gelijk bedrag aan schuld te zamen niet in ieder opzicht gelijk te stellen zijn met geen bezitting en geen schuld.

619. De twee beschouwde soorten van elementen zullen we als ***positieve*** en ***negatieve elementen*** aanduiden. Heeft een hoeveelheid a positieve en b negatieve elementen (waarbij ook a of b nul kan zijn), dan geven we dit door het aantallenpaar (a, b) aan en zeggen *dat de hoeveelheid* (a, b) *elementen bevat.* Daar

een toevoeging van e positieve en e negatieve elementen van geen invloed ondersteld wordt te zijn, wordt geen verschil gemaakt tusschen de aantallenparen (a, b) en $(a + e, b + e)$.

Dit voert verder van zelf tot de in n°. 531 gegeven definitie van gelijkheid van aantallenparen. Is nl. $c \geqq a$, dan kan voor het aantallenpaar (a, b) ook geschreven worden:

$$(a + (c - a), b + (c - a)),$$

of:

$$(c, (b + c) - a).$$

Dit is dan en alleen dan gelijk aan (c, d) als $(b + c) - a = d$, dus $b + c = a + d$ is.

620. Bevat de hoeveelheid geen negatieve en a positieve elementen, dan zegt men kortweg, *dat de hoeveelheid a elementen bevat.* In dat geval wordt dus de samenstelling der hoeveelheid niet door een aantallenpaar, maar door één enkel aantal a aangewezen. Dit voert tot de in n°. 536 gegeven definitie $(a, 0) = a$. Het beschouwde geval staat gelijk met een hoeveelheid, die $a + e$ positieve en e negatieve elementen bevat, zoodat een hoeveelheid (a, b) steeds door één aantal (nl. $a - b$) is aan te wijzen als $a \geqq b$ is.

Bevat de hoeveelheid geen positieve en b negatieve elementen, *dan zegt men ook, dat de hoeveelheid — b elementen bevat*, hetgeen voert tot $(0, b) = -b$ (zie n°. 568). Heeft de hoeveelheid e positieve en $b + e$ negatieve elementen, dan staat dit met $-b$ elementen gelijk.

621. Definitie van grooter en som bij hoeveelheden met positieve en negatieve elementen. Heeft men twee hoeveelheden H en H' met positieve en negatieve elementen, waarvan de samenstelling door de aantallenparen (a, b) resp. (c, d) wordt aangewezen, dan kan men die aantallenparen zoo omvormen, dat de aantallen der negatieve elementen gelijk worden, b.v. tot

$$(a + d, b + d) \text{ en } (c + b, b + d).$$

Men zegt nu, *dat de hoeveelheid H meer elementen bevat dan H'*, hetgeen als

$$(a, b) > (c, d)$$

geschreven wordt, *als H, bij eenzelfde aantal negatieve elementen, meer positieve elementen bevat*, dus als men heeft:

$$a + d > c + b.$$

Dit is in overeenstemming met de in n⁰. 541 van grooter gegeven definitie.

622. Vereenigt men de hoeveelheden H en H' van n⁰. 621, dan ontstaat een hoeveelheid $H + H'$, die $a + c$ positieve en $b + d$ negatieve elementen bevat en dus door het aantallenpaar $(a + c,\ b + d)$ wordt aangewezen. Men schrijft daarom

$$(a,\ b) + (c,\ d) = (a + c,\ b + d),$$

waardoor men de in n⁰. 548 gegeven definitie der optelling verkrijgt.

623. Definitie van product bij hoeveelheden met positieve en negatieve elementen. Meer moeite kost het de definitie van vermenigvuldiging van geheele getallen op natuurlijke wijze uit de beschouwing van hoeveelheden met twee soorten elementen voor den dag te brengen. Die moeilijkheid doet zich nog niet voor bij het product $c\ .\ (a,\ b)$, waaronder (geheel overeenkomstig de definitie van n⁰. 89) de som van c gelijke getallen $(a,\ b)$ te verstaan is. Volgens de definitie der optelling is dus:

$$c\ .\ (a,\ b) = (ca,\ cb),$$

hetgeen niets anders is dan de formule (359) van n⁰. 555.

624. Zij H een hoeveelheid met a elementen. Men kan dan tot het product ac geraken door aan te nemen, *dat met ieder element van H c elementen van een andere soort* (die we aanduiden als *elementen van de tweede soort*) *correspondeeren*; hierbij nemen we verder aan, dat de elementen van de tweede soort, die met verschillende elementen van H correspondeeren, alle verschillend zijn. Het product ac is nu niets anders dan het *aantal elementen van de tweede soort, die met de a elementen van H correspondeeren.*

625. De beschouwing van n⁰. 624 is uit te breiden tot het geval, *dat H positieve en negatieve elementen bevat en ook de elementen van de tweede soort in positieve en negatieve zijn te onderscheiden.* We nemen dus aan, dat H uit $(a,\ b)$ elementen

bestaat, d. w. z. uit a positieve en b negatieve elementen. Verder onderstellen we, dat met ieder positief element van H c positieve en d negatieve elementen van de tweede soort correspondeeren. Neemt men aan, dat ook ten aanzien van die correspondentie een positief en een negatief element van H elkaar vernietigen, dan correspondeeren met ieder negatief element van H c negatieve en d positieve elementen van de tweede soort. Dit kan kortweg zoo worden uitgedrukt, *dat met ieder der* (a, b) *elementen, waaruit* H *bestaat,* (c, d) *elementen van de tweede soort correspondeeren.*

Het product $(a, b) . (c, d)$ kan nu gedefiniëerd worden als het *aantallenpaar behoorende bij de elementen van de tweede soort, die met de gezamenlijke elementen van* H *correspondeeren.* Onder deze elementen van de tweede soort komen $ac + bd$ positieve voor, waarvan er ac met de positieve en bd met de negatieve elementen van H correspondeeren; evenzoo krijgt men $ad + bc$ negatieve elementen van de tweede soort, ad correspondeerende met de positieve en bc met de negatieve elementen van H. Men komt zoo tot

$$(ac + bd, ad + bc)$$

elementen van de tweede soort, geheel in overeenstemming met de in n°. 554 van product gegeven definitie.

Het voorgaande voert verder van zelf tot de formules (381) en (382) van n°. 589. Men heeft daartoe slechts het verkregen resultaat op de aantallenparen $(a, 0)$ en $(0, b)$ of $(0, a)$ en $(0, b)$ toe te passen.

626. Voorbeeld ter toelichting. Wil men het in n°. 625 behandelde toepassen, dan dient men zich natuurlijk er van te overtuigen, dat de daar gemaakte onderstellingen vervuld zijn. Een voorbeeld, waarbij dit het geval is, is het volgende. We denken ons een trein, die per seconde een weg van v meter aflegt, of zooals men ook zegt een snelheid v heeft. In t seconden legt die trein dan s meter af, waarin:

$$s = tv. \qquad (400)$$

Met iedere seconde correspondeeren nu v meters van den afgelegden weg.

Langs dezelfde baan loopen ook treinen in tegengestelde rich-

ting. De daardoor afgelegde meters worden als negatief beschouwd, zoodat zulk een trein per seconde een weg van $-v$ meter aflegt; dienovereenkomstig wordt de snelheid daarvan door $-v$ aangewezen. De formule (400) blijft nu doorgaan als men v en s als negatief in rekening brengt en den vermenigvuldigingsregel $a \,.\, (-b) = -ab$ toepast.

627. We kunnen ook aan t negatieve waarden toekennen door het getal t niet een verstreken tijd, maar een *tijdstip* te laten aanwijzen. Daartoe nemen we ter vergelijking een vast tijdstip (*oorsprong van tijd*) aan, dat overigens willekeurig gekozen kan worden. Het tijdstip t (waarin t een aantal is) wil nu zeggen het *tijdstip t seconden na den oorsprong van tijd*, terwijl evenzoo $-t$ het *tijdstip t seconden vóór den oorsprong van tijd* aanwijst.

Onder s verstaan we nu verder niet het aantal meters afgelegden weg, maar den *afstand* (of liever het aantal meters begrepen op dien afstand) *van den trein tot de plaats, waar deze zich op den oorsprong van tijd bevindt;* hierbij is s positief te nemen in dezelfde richting (gerekend van de plaats op den tijd $t = 0$ tot aan de plaats voor de beschouwde waarde van t) als waarin de snelheid positief genoemd wordt.

Kennen we op deze wijze aan v, s en t teekens toe, dan blijft de formule (400) in alle gevallen doorgaan, ook als v en t beide negatief zijn; in het laatste geval moet men dan den vermenigvuldigingsregel $(-a) \,.\, (-b) = ab$ toepassen.

---

628. Andere toepassingen der negatieve getallen. Ook in gevallen, waarbij er geen sprake is van positieve en negatieve elementen (zie n°. 619), levert de invoering der negatieve getallen voordeel op. Dit voordeel vloeit daaruit voort, *dat de aftrekking onbeperkt mogelijk geworden is* zonder dat de rekenregels verloren gegaan zijn. Hierdoor kan men vaak, door tijdelijke invoering van negatieve getallen, uitkomsten verkrijgen, die uitsluitend op positieve getallen betrekking hebben, zooals in n°. 632 en 636 nog nader zal blijken.

Wil men een aan zekeren eisch voldoend getal bepalen, dat krachtens den aard van het vraagstuk een natuurlijk getal (of een aantal) is, dan kan men gedurende de berekening zonder bezwaar met negatieve getallen werken. De negatieve waarden, die men zoo eventueel voor het gezochte getal vindt, moeten dan eenvoudig als niet ter zake verworpen worden.

629. Als een voorbeeld van een geval, waarbij negatieve getallen een vereenvoudiging geven, nemen we de in n⁰. 407 voorkomende herleiding (252). In het tweede lid daarvan komt de som

$$\sum_{j=2}^{n} (j-1)(j-2)\,\varepsilon_j$$

voor. Deze som kan nu ook als

$$\sum_{j=1}^{n} (j-1)(j-2)\,\varepsilon_j$$

geschreven worden, daar daardoor een term $0 \cdot (-1) \cdot \varepsilon_1$ wordt toegevoegd, die nul is (zie de eigenschap van n⁰. 502). Men kan dan rechtstreeks het tweede lid van (252) tot het vierde herleiden.

630. Een ander voorbeeld levert de in n⁰. 359 gemaakte afspraak

$$C_n^p = 0 \textit{ voor } p > n. \tag{401}$$

Schrijft men:

$$C_n^p = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n+1-p)}{p!} \tag{402}$$

(zie n⁰. 331) en houdt men dit ook voor $p > n$ als definitie van C_n^p vol, dan bevat (voor $p > n$) in het tweede lid het deeltal een factor nul en is dus nul; dit voert tot (401). Hierbij is echter als $p > n + 1$ is van negatieve getallen gebruik gemaakt, daar het deeltal dan $p - (n + 1)$ negatieve factoren bevat.

Daar de formules (183) en (186) van n⁰. 332 en 333 uit (402) kunnen worden afgeleid, is het na het voorgaande duidelijk, dat deze formules voor $p > n$ resp. $p \geqq n$ blijven doorgaan als men de afspraak (401) maakt (zie het aan het eind van n⁰. 359 opgemerkte).

631. Toepassing der negatieve getallen op de merkwaardige quotiënten. Een belangrijke toepassing vinden de negatieve getallen bij de merkwaardige quotiënten (zie n⁰. 163—166,

322 en 323). Daar de formule (113) van n⁰. 164 een gevolg van de grondeigenschappen is, geldt deze ook als a en b willekeurige geheele getallen voorstellen. Schrijft men (113) in den vorm (172) (zie n⁰. 322), dan moet natuurlijk, ook als a of b negatief is, a^0 resp. b^0 als 1 geïnterpreteerd worden. De beschouwing van n⁰. 315 is dan ook onveranderd geldig als a negatief is.

Blijkens het voorgaande blijft (113) juist als men daarin b door $-b$ vervangt. Men vindt zoo in verband met de formules (325) van n⁰. 507:

$$\frac{a^n-(-1)^nb^n}{a+b}=a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\ldots.+(-1)^{n-1}b^{n-1}, \quad (403)$$

of volgens de in n⁰. 322 gebezigde schrijfwijze:

$$\frac{a^n-(-1)^nb^n}{a+b}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a^{n-k}b^{k-1}. \quad (403)$$

632. Is nu n even, in welk geval n door $2n$ kan worden vervangen, dan gaat (403) over in:

$$\frac{a^{2n}-b^{2n}}{a+b}=a^{2n-1}-a^{2n-2}b+a^{2n-3}b^2-\ldots.+ab^{2n-2}-b^{2n-1}=$$
$$=\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}a^{2n-k}b^{k-1}. \quad (404)$$

Is n oneven, in welk geval n door $2n+1$ kan worden vervangen, dan luidt (403):

$$\frac{a^{2n+1}+b^{2n+1}}{a+b}=a^{2n}-a^{2n-1}b+a^{2n-2}b^2-\ldots.-ab^{2n-1}+b^{2n}=$$
$$=\sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^{k-1}\,a^{2n+1-k}\,b^{k-1}. \quad (405)$$

Hiermede zijn de merkwaardige quotiënten (114) en (115) van n⁰. 165 en 166 op veel eenvoudiger wijze verkregen als daar ter plaatse geschied is. De nu gebezigde omvorming van (113) tot (114) en (115) is zoo eenvoudig, dat het nauwelijks zin heeft van *drie* merkwaardige quotiënten te spreken, daar toch (114) en (115) slechts als bijzondere vormen van (113) verschijnen.

De invoering der negatieve getallen maakt verder, dat (114) en (115) meer regelmatig, nl. in den vorm (404) resp. (405) geschreven kunnen worden.

Zijn in de formule (405) a en b positief, dan heeft men, als men deze in den vorm (115) schrijft, een formule, waarin van

geen negatieve getallen sprake is en die in het voorgaande op eenvoudige wijze met behulp van negatieve getallen is afgeleid. Een soortgelijke opmerking kan men aangaande (404) maken als $a \geqq b$ is.

633. Toepassing op het binomium van Newton. Het spreekt van zelf, dat ook het binomium van NEWTON, dus de formule (207) of (208) van n°. 354 resp. 355, blijft doorgaan als in $(a+b)^n$ de getallen a en b beide of een van beide negatief zijn, daar toch de formule van NEWTON een uitsluitend gevolg van de grondeigenschappen is.

Bijgevolg blijft de formule (207) gelden als men daarin b door $-b$ vervangt, waardoor ze overgaat in:

$$(a-b)^n = a^n - C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 - \dots + (-1)^n b^n,$$

of:

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k.$$

634. Door $a = b = 1$ te nemen volgt hieruit in het bijzonder de voor $n \geqq 1$ geldende formule:

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n = 0. \qquad (406)$$

Door de beide leden hiervan bij de overeenkomstige leden der formule (188) van n°. 335 [1]) op te tellen vindt men verder, na beide leden van de komende gelijkheid door 2 gedeeld te hebben:

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + \dots + C_n^p = 2^{n-1}, \qquad (407)$$

waarin $p = n$ of $= n - 1$ is al naar gelang n even of oneven is.

Door de beide leden van (406) van de overeenkomstige leden van (188) af te trekken vindt men evenzoo:

$$C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + C_n^7 + \dots + C_n^q = 2^{n-1}, \qquad (407)^*$$

waarin $q = n - 1$ of $= n$ is al naar gelang n even of oneven is.

Men kan de formules (407) en (407)* resp. ook aldus schrijven:

$$\sum_{k=0}^{2k \leqq n} C_n^{2k} = 2^{n-1},$$

$$\sum_{k=0}^{2k+1 \leqq n} C_n^{2k+1} = 2^{n-1}.$$

---

[1]) Ook deze volgt uit het binomium van NEWTON; zie n°. 358.

De sommeering moet bij de eerste formule worden uitgestrekt over alle geheele waarden van k, die voldoen aan:

$$0 \leqq 2k \leqq n,$$

en bij de tweede over alle geheele waarden van k, die voldoen aan:

$$0 \leqq 2k \leqq n - 1.$$

Evenwel kan men ook termen opnemen, waarvoor $2k$ grooter dan n resp. $n - 1$ is, daar die termen toch nul zijn (zie n⁰. 359 en 630).

635. Door in (407) en (407)* C_n^k door het daaraan gelijke getal C_n^{n-k} (zie de formule (180) van n⁰. 330) te vervangen gaat, als n even is, zoowel (407) als (407)* in zich zelf over. Is echter n oneven, dan gaat daarbij (407) in (407)* over en omgekeerd, *zoodat de formules (407) en (407)* dan, in verband met (180), hetzelfde uitdrukken.*

Verder merken we nog op, dat de formule (180) de juistheid van (406) onmiddellijk doet inzien als n oneven is, daar de termen van het eerste lid dan twee aan twee tegen elkaar wegvallen (de eerste tegen den laatsten, de tweede tegen den voorlaatsten, enz.). De formule (406) heeft dus alleen belang als n even is, in welk geval daarvoor geschreven kan worden (n door $2n$ vervangend):

$$C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 - C_{2n}^3 + \ldots - C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n} = 0. \qquad (408)$$

Door de gelijke termen (eersten en laatsten, enz) samen te nemen gaat dit over in:

$$2C_{2n}^0 - 2C_{2n}^1 + 2C_{2n}^2 - 2C_{2n}^3 + \ldots + (-1)^{n-1}\, 2C_{2n}^{n-1} + (-1)^n\, C_{2n}^n = 0.$$

636. In de formules (407) en (407)* van n⁰. 634 komen geen negatieve getallen voor, terwijl toch die formules met behulp van negatieve getallen zijn afgeleid. Men heeft hier dus weer een voorbeeld van het nut, dat de negatieve getallen afwerpen voor gevallen, die op zich zelf niets met negatieve getallen te maken hebben.

Ook de formule (406) kan zoo geschreven worden, dat er van geen negatieve getallen sprake is, nl. aldus:

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots \text{ [1]}.$$

---

[1]) Beide leden zijn volgens (407) en (407)* gelijk aan 2^{n-1}.

Voor het (uitsluitend van belang zijnde) geval, dat n even is, luidt dit:

$$C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + \ldots + C_{2n}^{2n} = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + C_{2n}^5 + \ldots + C_{2n}^{2n-1}.$$

Dit is een andere schrijfwijze van de formule (408) van n⁰. 635.

637. Andere afleiding en uitbreiding der formule (406). Men kan de formule (406) van n⁰. 634 ook aantoonen door op de daarin voorkomende aantallen combinaties de formule (186) van n⁰. 333 toe te passen. Daardoor kan men tevens een uitbreiding der formule (406) verkrijgen, door nl. van het eerste lid niet alle termen, maar de eerste $k + 1$ termen te nemen. Men vindt zoo:

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + (-1)^k C_n^k =$$
$$= C_{n-1}^0 - (C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1) + (C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2) - (C_{n-1}^2 + C_{n-1}^3) +$$
$$+ \ldots + (-1)^{k-1} (C_{n-1}^{k-2} + C_{n-1}^{k-1}) + (-1)^k (C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k),$$

dus:

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + (-1)^k C_n^k = (-1)^k C_{n-1}^k. \qquad (409)$$

Voor $k = n$ gaat dit in (406) over, daar C_{n-1}^n als nul moet worden geïnterpreteerd (zie n⁰. 359 en 630).

Op geheel soortgelijke wijze vindt men:

$$C_n^k - C_n^{k+1} + C_n^{k+2} - \ldots + (-1)^{n-k} C_n^n =$$
$$= (C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k) - (C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k+1}) + (C_{n-1}^{k+1} + C_{n-1}^{k+2}) -$$
$$- \ldots + (-1)^{n-k-1} (C_{n-1}^{n-2} + C_{n-1}^{n-1}) + (-1)^{n-k} C_{n-1}^{n-1},$$

dus:

$$C_n^k - C_n^{k+1} + C_n^{k+2} - \ldots + (-1)^{n-k} C_n^n = C_{n-1}^{k-1}. \qquad (409)^*$$

Deze formule is ook uit (406) en (409), als men daarin k door $k - 1$ vervangt, af te leiden, hetgeen we aan den lezer overlaten.

Ook is (409)* uit (409) af te leiden door overal C_n^i door C_n^{n-i} te vervangen (zie de formule (180) van n⁰. 330) en vervolgens $n - k$ in plaats van k (dus k in plaats van $n - k$) te schrijven.

638. Rekenkundige reeksen. Voldoen drie getallen a, b en c aan de betrekking

$$a + c = 2b. \qquad (410)$$

dan wordt b het *rekenkundig gemiddelde* of kortweg het *gemiddelde van a en c* genoemd.

Voor (410) kan tengevolge van de onbeperkte mogelijkheid der aftrekking ook geschreven worden:

$$a - b = b - c.$$

Daar nu de beide getallen b tusschen de getallen a en c staan, wordt b ook ***rekenkundig middelevenredig*** *tusschen a en c* genoemd [1]).

Zijn a en c gegeven, dan is aan (410) alleen te voldoen als $a + c$ even is, in welk geval men vindt:

$$b = \frac{a + c}{2}.$$

Daar de som van twee getallen, die beide even of beide oneven zijn, even en de som van een even en een oneven getal oneven is [2]), *bezitten twee getallen dan en alleen dan een rekenkundig gemiddelde als ze beide even of beide oneven zijn.*

639. Wanneer een rij getallen

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots .$$

de eigenschap bezit, *dat ieder der op a_1 volgende getallen het rekenkundig gemiddelde van het voorafgaande en het volgende getal is*, zegt men, *dat die getallen een* ***rekenkundige reeks*** *vormen.* Men heeft dan:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = a_5 - a_4 = \ldots .$$

M. a. w. *een element der rij van het volgende element afgetrokken levert een standvastig verschil.* Dit wordt het ***verschil*** der rekenkundige reeks genoemd.

Stellen we dit verschil (dat zoowel positief als negatief als nul zijn kan) door v voor, dan kan voor de getallenrij geschreven worden:

$$\begin{aligned} &a_1 &&, \\ &a_2 = a_1 + v &&, \\ &a_3 = a_2 + v = a_1 + 2v, \\ &a_4 = a_3 + v = a_1 + 3v, \text{ enz.} \end{aligned}$$

---

[1]) Heeft men algemeener:

$$a - b_1 = b_2 - c,$$

dan wordt dit wel een ***rekenkundige evenredigheid*** genoemd. We hebben hier het geval, dat de beide middelste termen b_1 en b_2 van zulk een evenredigheid gelijk zijn.

[2]) Een negatief getal is natuurlijk even of oneven al naar gelang zijn absolute waarde even of oneven is (zie n°. 571).

Men vindt zoo voor het n^{de} element der rij, ook wel het *algemeene element* genoemd:

$$a_n = a_1 + (n - 1)v\ ^{1)}. \qquad (411)$$

Hiertoe geraakt men ook door optelling der $n - 1$ gelijkheden

$$a_2 - a_1 = v,$$
$$a_3 - a_2 = v,$$
$$a_4 - a_3 = v,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$a_n - a_{n-1} = v.$$

Uit (411) verkrijgt men de opvolgende elementen der rekenkundige reeks door n de rij der natuurlijke getallen te laten doorloopen.

De natuurlijke getallen vormen blijkbaar zelf ook een rekenkundige reeks ($a_1 = 1$, $v = 1$). Andere voorbeelden van rekenkundige reeksen zijn de *rij der even natuurlijke getallen 2, 4, 6, 8, ...* ($a_2 = 2$, $v = 2$) en de *rij der oneven natuurlijke getallen 1, 3, 5, 7, ...* ($a_1 = 1$, $v = 2$).

640. Som van opvolgende elementen eener rekenkundige reeks. We beschouwen nu de *som*

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

van de n eerste elementen eener rekenkundige reeks. Daar men ook schrijven kan:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1,$$

vindt men door optelling der overeenkomstige termen:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_1 + a_n).$$

Nu is volgens (411):

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + (k - 1)v + a_1 + (n - k)v =$$
$$= 2a_1 + (n - 1)v = a_1 + a_n\,,$$

zoodat de som van twee termen, waarvan de een even ver van den eersten term als de ander van den laatsten term verwijderd is, steeds dezelfde is, nl. de som van den eersten en den laatsten term. Hieruit volgt verder:

$$2S_n = n\{2a_1 + (n - 1)v\} = n(a_1 + a_n),$$

$$S_n = na_1 + \frac{n(n - 1)}{2}v = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}. \qquad (412)$$

---

[1]) Dit geldt ook nog voor $n = 1$.

In woorden luidt dit:

De som van eenige opvolgende termen eener rekenkundige reeks is gelijk aan het halve product van het aantal dier termen en de som van eersten en laatsten term.

In het bijzonder vindt men voor de *som der eerste n natuurlijke getallen* en de *som der eerste n oneven natuurlijke getallen* resp.:

$$1 + 2 + 3 + \ldots . + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$1 + 3 + 5 + \ldots . + (2n - 1) = n^2.$$

Opgemerkt zij nog, *dat de formule (412) ook geldig is voor* $n = 1$ *en voor* $n = 0$. Voor $n = 1$ levert (412) nl. naar behooren $S_1 = a_1$, terwijl voor $n = 0$ gevonden wordt $S_0 = 0$, in overeenstemming met de beschouwingen van n⁰. 310 omtrent een som van nul termen.

641. Is het aantal termen der som S_n, dus het getal n, oneven, dan is er een ***middelste term,*** d. w. z. een term, die evenveel voorafgaande als volgende termen heeft. Het rangnummer van dien middelsten term is $\frac{n-1}{2}$. De in n⁰. 640 beschouwde termen a_k en a_{n-k+1} kunnen nu ook beschreven worden als *termen, die even ver van den middelsten term verwijderd zijn.* De som van twee zulke termen is gelijk aan het dubbel van den middelsten term, of anders gezegd die termen hebben den middelsten term tot rekenkundig gemiddelde. Dit voert onmiddellijk tot:

$$S_n = n a_{\frac{n-1}{2}}, \qquad (413)$$

hetgeen ook zonder moeite uit (411) en (412) is af te leiden.

In woorden luidt (413):

De som van een oneven aantal opvolgende termen eener rekenkundige reeks is gelijk aan het product van het aantal termen en den middelsten term.

HOOFDSTUK IV.

TOEPASSING DER NEGATIEVE GETALLEN OP DEELBAARHEIDSPROBLEMEN.

---

§ 1. Onbepaalde vergelijkingen.

642. Lineaire onbepaalde vergelijking. Een vergelijking, waarin *twee onbekenden*, d. w. z. uit die vergelijking te bepalen getallen [1]), x en y voorkomen, wordt een *onbepaalde vergelijking* [2]), ook wel *Diophantische vergelijking* [3]) genoemd.

In het bijzonder beschouwen we de vergelijking

$$ax + by = c, \qquad (414)$$

waarin a, b en c gegeven getallen [1]) zijn, terwijl gevraagd wordt *alle stellen waarden van x en y te bepalen, die aan de vergelijking voldoen.* Zulk een stel waarden wordt een *oplossing der vergelijking* genoemd.

De vergelijking (414) kan ook zoo geschreven worden, dat

---

[1]) Het woord „getal" is hier en in het volgende te nemen in de beteekenis van „geheel getal".

[2]) Ook als in de vergelijking meer dan twee onbekenden voorkomen spreekt men van een onbepaalde vergelijking. Een voorbeeld hiervan hebben we reeds bij het partitieprobleem ontmoet (zie n°. 376 en 377), op welk voorbeeld we nog in n°. 695 terugkomen.

De benaming „onbepaalde vergelijking" komt daar vandaan, dat, na verdere uitbreiding van het getalbegrip dan de tot nu toe besprokene, een der beide onbekenden geheel willekeurig kan worden aangenomen en dus door de vergelijking geheel onbepaald gelaten wordt.

[3]) Naar DIOPHANTUS *van Alexandrië* (omstreeks 250 n. Chr.).

het tweede lid nul wordt, door nl. beide leden met $- c$ te vermeerderen. De vergelijking gaat daardoor over in:

$$ax + by - c = 0. \qquad (414)^*$$

Daar men ook omgekeerd uit (414)* tot (414) kan besluiten (door beide leden van (414)* met c te vermeerderen), is iedere oplossing van (414) ook een oplossing van (414)* en omgekeerd. Men drukt dit uit door te zeggen, *dat beide vergelijkingen gelijkwaardig of aequivalent zijn.*

Het vervangen van (414) door (414)* wordt *op nul herleiden* genoemd. Daarbij verdwijnt en ontstaat geen oplossing, of zooals men ook zegt *er wordt geen oplossing verduisterd en geen oplossing ingevoerd.*

643. Het eerste lid der op nul herleide vergelijking, dus $ax + by - c$ is een *geheele rationale functie van x en y van den eersten graad.* Zulk een geheele rationale functie wordt ook *lineair* genoemd, terwijl evenzoo de onbepaalde vergelijking (414) *lineair* (of *van den eersten graad*) heet.

Het begrip „geheele rationale functie" wordt op dezelfde wijze gedefiniëerd als in n⁰. 378, slechts met dit verschil, dat men in n⁰. 378 één onafhankelijk veranderlijke had, terwijl er nu twee onafhankelijk veranderlijken (x en y) zijn. Bij een willekeurig aantal onafhankelijk veranderlijken x_1, x_2, ..., x_p wordt een geheele rationale functie gedefiniëerd als een som van termen van de gedaante

$$A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_p^{\alpha_p},$$

waarin $A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p}$ een gegeven getal is, dat de *coëfficiënt* van $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_p^{\alpha_p}$ heet. De som der exponenten α_1, α_2, ..., α_p (waarvan ook eenige nul kunnen zijn) wordt de *graad van dien term* genoemd, terwijl de grootste graad van eenigen term (met van nul verschillenden coëfficiënt) der som de *graad der geheele rationale functie* heet.

644. Grootste gemeene deeler van geheele getallen. Onder den *grootsten gemeenen deeler* (G.G.D.) van twee van nul verschillende geheele getallen a en b verstaan we het grootste geheele

getal, dat zoowel op a als op b deelbaar is (zie n⁰. 571). Die G.G.D. is positief (dus een natuurlijk getal), daar de positieve gemeene deelers grooter dan de negatieve zijn.

Blijkens het in n⁰. 572 gevondene zijn de gemeene deelers van a en b dezelfde als die van $|a|$ en $|b|$, waaruit volgt:

De G.G.D. van twee geheele getallen is dezelfde als die van de absolute waarden dier getallen.

Het is duidelijk, *dat deze eigenschap tot meer dan twee getallen is uit te breiden.*

645. Is G de G.G.D. der geheele getallen a en b en

$$a = Ga', \quad b = Gb',$$

dan is:

$$|a| = G \,.\, |a'|, \quad |b| = G \,.\, |b'|.$$

Daar G ook de G.G.D. van $|a|$ en $|b|$ is, zijn $|a'|$ en $|b'|$ onderling ondeelbaar (zie de eigenschap van n⁰. 177). Bijgevolg zijn de gemeene deelers van $|a'|$ en $|b'|$, en dus ook die van a' en b', geen andere dan de getallen 1 en — 1. Drukt men dit uit door te zeggen, *dat a' en b' onderling ondeelbaar zijn* [1]), dan blijft de eigenschap van n⁰. 177 voor van nul verschillende geheele getallen geldig.

646. Eigenschappen betreffende onbepaalde vergelijkingen. We onderstellen, *dat in de onbepaalde vergelijking (414) van n⁰. 642 de coëfficiënten a en b beide van nul verschillen* [2]).

Is G de G.G.D. van a en b, dan is het eerste lid van (414) voor iedere waarde van x en y door G deelbaar. Is c niet door G deelbaar, dan kan dus aan (414) niet worden voldaan, d. w. z. dan heeft die vergelijking geen oplossingen. We vinden dus:

Voor het bestaan van oplossingen der onbepaalde vergelijking (414) is noodig, dat c deelbaar is door den G.G.D. van a en b.

In n⁰. 657 zal blijken, dat die voorwaarde ook *voldoende* is voor het bestaan van oplossingen.

---

[1]) Twee geheele getallen zijn dus dan en alleen dan onderling ondeelbaar als hun absolute waarden dat zijn.

[2]) Is a of b nul, dan valt x resp. y uit de vergelijking weg en heeft men met een vergelijking met één onbekende te doen.

We merken nog op, *dat aan de genoemde voorwaarde steeds voldaan is als a en b onderling ondeelbaar zijn.*

647. Is c door den G.G.D. G van a en b deelbaar, dan stellen we:

$$a = Ga', \; b = Gb', \; c = Gc'. \qquad (415)$$

De getallen a' en b' zijn dan onderling ondeelbaar (zie n°. 645).

Tengevolge van (415) gaat (414) over in:

$$Ga'x + Gb'y = Gc',$$

of:

$$G(a'x + b'y - c') = 0.$$

Daar G niet nul is, is hieraan dan en alleen dan voldaan als

$$a'x + b'y - c' = 0,$$

dus:

$$a'x + b'y = c' \qquad (416)$$

is. Deze vergelijking is met (414) gelijkwaardig (zie n°. 642).

We vinden dus:

Voldoet een lineaire onbepaalde vergelijking aan de in n°. 646 genoemde voorwaarde, dan is deze zoo te herleiden, dat de coëfficiënten der beide onbekenden onderling ondeelbaar zijn.

We hebben ons dus in het volgende slechts bezig te houden met het geval, *dat de getallen a en b onderling ondeelbaar zijn.*

648. *Is door* $x = x_1$, $y = y_1$ *(waarin* x_1 *en* y_1 *bekende getallen zijn) aan de onbepaalde vergelijking (414) voldaan, dan is daaraan eveneens voldaan door*

$$x = x_1 + bt, \; y = y_1 - at \text{ [1]}, \qquad (417)$$

waarin men voor t ieder geheel getal nemen kan.

Dit blijkt onmiddellijk bij substitutie in (414), d. w. z. bij vervanging van x en y resp. door $x_1 + bt$ en $y_1 - at$; het eerste lid is dan nl. tot c te herleiden.

De eigenschap geldt ook nog als a en b onderling deelbaar zijn.

We merken verder op, *dat x en b onderling ondeelbaar zijn als dit met b en c het geval is*; immers een gemeene deeler

---

[1]) Men kan hiervoor natuurlijk even goed schrijven:

$$x = x_1 - bt, \; y = y_1 + at.$$

daar dit uit (417) ontstaat door t te vervangen door $-t$.

van x en b is volgens (414) ook een deeler van c. *Evenzoo zijn y en a onderling ondeelbaar als dit met a en c het geval is.*

649. *Is $x = x_1$, $y = y_1$ een oplossing der vergelijking (414) en zijn a en b onderling ondeelbaar, dan stelt (417) iedere oplossing dier vergelijking voor, d. w. z. iedere oplossing is te verkrijgen door in (417) aan t een behoorlijk gekozen waarde toe te kennen* [1].

Uit het ondersteldе volgt nl.:

$$ax_1 + by_1 = c,$$

waardoor voor (414) geschreven kan worden:

$$ax + by = ax_1 + by_1,$$

of (beide leden met $- by - ax_1$ vermeerderend):

$$a(x - x_1) = b(y_1 - y). \qquad (418)$$

Hiervan is het eerste lid deelbaar door a, dus ook het tweede lid. Daar nu b onderling ondeelbaar is met a, is $y_1 - y$ deelbaar door a. Men heeft dus:

$$y_1 - y = at,$$

terwijl dan verder uit (418) volgt:

$$x - x_1 = bt.$$

Dit voert tot (417).

650. Algemeene en bijzondere oplossingen. Uit de eigenschappen van n⁰. 648 en 649 blijkt, *dat, als a en b onderling ondeelbaar zijn, (417) steeds een oplossing der vergelijking (414) is en omgekeerd iedere oplossing van (414) in (417) ligt opgesloten.* Daarom wordt (417) de ***algemeene oplossing der onbepaalde vergelijking*** genoemd. Een oplossing, die uit (417) ontstaat door aan t een bepaalde waarde toe te kennen, heet een ***bijzondere*** of ***particuliere oplossing*** [2].

---

[1]) Dit geldt ook nog als a of b nul is. Is b.v. $a = 0$, dan volgt uit de onderlinge ondeelbaarheid van a en b, dat $b = \pm 1$ is, daar 0 door ieder getal deelbaar is (zie n⁰. 309). De vergelijking (414) luidt dan $\pm y = c$, zoodat x iedere waarde kan aannemen. Verder gaat (417) dan over in $x = x_1 + t$, $y = y_1$, hetgeen eveneens uitdrukt, dat x willekeurig is en y een bepaalde waarde moet hebben.

[2]) Met het woord „bijzonder'' is niet bedoeld, dat die oplossing iets bijzonders heeft, daar *iedere oplossing*, op zich zelf beschouwd, een bijzondere oplossing is.

De oplossing $x = x_1$, $y = y_1$, waarvan we zijn uitgegaan, is zulk een particuliere oplossing. In het voorgaande is dus ondersteld, *dat de vergelijking minstens één particuliere oplossing bezit.* Dat die onderstelling altijd juist is als a en b onderling zijn, zal in n⁰. 656 blijken.

We merken nog op, *dat de oplossing* $x = x_1$, $y = y_1$ *geen andere rol speelt dan de overige particuliere oplossingen*, zooals wel daaruit blijkt, dat men in de beschouwingen van n⁰. 648 en 649 van iedere particuliere oplossing kan uitgaan. Trouwens is t_1 een bepaalde maar willekeurig gekozen waarde van t, dan kan, als men $t - t_1 = t'$ stelt, voor (417) geschreven worden:

$$x = (x_1 + bt_1) + bt', \quad y = (y_1 - at_1) - at',$$

waarin men aan t' een willekeurige waarde kan toekennen. De rol der oorspronkelijke particuliere oplossing is nu door de particuliere oplossing $x = x_1 + bt_1$, $y = y_1 - at_1$ overgenomen.

651. *De eigenschap van n⁰. 649 geldt niet meer als a en b onderling deelbaar zijn.* Is dan $x = x_1$, $y = y_1$ een particuliere oplossing van (414), dan is volgens de eigenschap van n⁰. 646 aan de daar genoemde voorwaarde voldaan, dus (414) tot den vorm (416) te herleiden (met a' en b' onderling ondeelbaar). *De algemeene oplossing* van (416), dus ook die *van (414), is derhalve:*

$$x = x_1 + b't', \quad y = y_1 - a't'. \tag{419}$$

De oplossing (417) is volgens (415):

$$x = x_1 + b'Gt, \quad y = y_1 - a'Gt$$

en ligt dus in (419) opgesloten als het geval $t' = Gt$.

Hieruit blijkt, *dat (417) die en alleen die oplossingen van (414) oplevert, die uit (419) ontstaan door aan t' een door G deelbare waarde toe te kennen.*

652. Het bestaan van oplossingen eener onbepaalde vergelijking. We beschouwen de onbepaalde vergelijking (414) *met a en b onderling ondeelbaar* (zie n⁰. 647).

Zonder beperking kunnen verder a en b positief ondersteld worden, daar als b.v. a negatief is voor (414) geschreven kan worden:

$$(-a)(-x) + by = c,$$

waarin $-a$ positief is. Door $-x$ als nieuwe onbekende op

te vatten bereikt men, dat de coëfficiënt dier onbekende positief is.

Zijn a en b beide negatief, dan is het echter eenvoudiger niet twee nieuwe onbekenden ($-x$ en $-y$) in te voeren, maar (414) te herleiden tot:

$$(-a)x + (-b)y = -c,$$

waarin $-a$ en $-b$ positief zijn. We laten het aan den lezer over zich van die herleiding rekenschap te geven.

Ook kan men zonder beperking $a \geqq b$ *onderstellen*, daar x en y geheel dezelfde rol spelen.

653. Is $b = 1$, dan luidt (414):

$$ax + y = c. \tag{420}$$

Hieraan is voldaan door

$$x = 0,\ y = c,$$

zoodat de algemeene oplossing volgens het in n⁰. 650 gevondene is:

$$x = t,\ y = c - at. \tag{421}$$

Dit is ook rechtstreeks onmiddellijk uit (420) af te lezen, daar men x willekeurig kan aannemen en vervolgens uit (420) voor y vindt:

$$y = c - ax,$$

hetgeen op hetzelfde neerkomt als (421).

654. We beschouwen nu het geval $b > 1$. Wegens de onderlinge ondeelbaarheid van a en b is dan $a = b$ uitgesloten, dus (wegens het in n⁰. 652 onderstelde) $a > b$.

Zij q het partiëele quotiënt der deeling van a door b. Dan is:

$$a = qb + r, \tag{422}$$

waarin $0 < r < b$. Tengevolge van (422) gaat (414) over in:

$$(qb + r)x + by = c,$$

$$b(qx + y) + rx = c.$$

Door

$$qx + y = z \tag{423}$$

te stellen wordt dit:

$$bz + rx = c. \tag{424}$$

Dit is een vergelijking van denzelfden vorm als de oorspronkelijke, terwijl ook nu de coëfficiënten der beide onbekenden onderling ondeelbaar zijn. Men heeft echter bereikt, *dat de coëfficiënten*

kleiner geworden zijn, daar de grootste coëfficiënt door de rest der deeling door den kleinsten vervangen is.

655. Heeft men de vergelijking (424) opgelost en is

$$x = x_1 + bt,\ z = z_1 - rt \tag{425}$$

(t willekeurig) de algemeene oplossing, dan heeft men nog de vergelijking (423) op te lossen met y en t als onbekenden. Ten gevolge van (425) gaat (423) over in:

$$y + (qb + r)t = z_1 - qx_1,$$

of volgens (422):

$$y + at = z_1 - qx_1.$$

Deze onbepaalde vergelijking verkeert in het in n^0. 653 beschouwde geval (t willekeurig aan te nemen). De algemeene oplossing van (414) is dus direct neer te schrijven, nl.:

$$x = x_1 + bt,\ y = z_1 - qx_1 - at.$$

Naar behooren is die oplossing van den vorm (417) (met $y_1 = z_1 - qx_1$).

656. Blijkens het voorgaande is de vergelijking (414) oplosbaar als dit met (424) het geval is. Dit laatste doet zich zeker voor als $r = 1$ is.

Is $r > 1$, dan kan men (424) op dezelfde wijze verder herleiden tot een onbepaalde vergelijking, waarvan de coëfficiënten der onbekenden onderling ondeelbaar zijn en de grootste coëfficiënt r is. Zoo kan men doorgaan, steeds de coëfficiënten der onbekenden verkleinend, waarbij men eindelijk zal komen op een vergelijking, waarvan een dier coëfficiënten 1 is en die dus oplossingen toelaat. De oorspronkelijke vergelijking (414) bezit dus eveneens oplossingen.

Hiermede is aangetoond:

Zijn bij de onbepaalde vergelijking (*414*) *de coëfficiënten a en b onderling ondeelbaar, dan bezit die vergelijking oplossingen.*

Een stelling als deze, waarin het *bestaan* van iets (in ons geval van oplossingen der onbepaalde vergelijking) geconstateerd wordt, noemt men een ***existentiestelling*** en het bewijs daarvan een ***existentiebewijs***.

657. Uit de eigenschap van n^0. 656 blijkt, in verband met het

in n⁰. 647 gevondene, *dat de vergelijking (414) steeds oplossingen bezit als c deelbaar is door den G.G.D. van a en b.*

Dit kan men met de eigenschap van n⁰. 646 aldus samenvatten: *De vergelijking (414) bezit dan en alleen dan oplossingen als c door den G.G.D. van a en b deelbaar is* [1]).

De in n⁰. 646 genoemde voorwaarde is dus zoowel *noodig* als *voldoende.*

658. Algorithmus ter oplossing van een onbepaalde vergelijking. Het bewijs van n⁰. 654—656 levert tevens een eenvoudigen algorithmus om een onbepaalde vergelijking, die aan de in n⁰. 646 en 657 genoemde voorwaarde voldoet, op te lossen.

Eerst wordt de vergelijking herleid tot een met onderling ondeelbare en positieve coëfficiënten (zie n⁰. 647 en 652). De algorithmus bestaat dan verder in het telkens invoeren van een nieuwe onbekende (in de plaats van de onbekende met den kleinsten coëfficiënt), waardoor de grootste coëfficiënt verkleind wordt (tot een waarde kleiner dan de kleinste coëfficiënt), hetgeen voort te zetten is tot een coëfficiënt 1 ontstaat.

659. De coëfficiënten der onbepaalde vergelijkingen, die men zoo achtereenvolgens krijgt, zijn b en r_1, daarna r_1 en r_2, vervolgens r_2 en r_3, enz., waarin r_1, r_2, r_3, enz. de resten zijn, die bij de bepaling van den G.G.D. van a en b optreden (zie de vergelijkingen van n⁰. 174). Het aantal omvormingen, die men de onbepaalde vergelijking (414) heeft te doen ondergaan, is dus gelijk aan het aantal deelingen noodig om den G.G.D. van a en b te bepalen, d. w. z. om de onderlinge ondeelbaarheid van a en b vast te stellen.

660. Voorbeeld ter toelichting. Als voorbeeld nemen we de vergelijking:

$$1417x - 3003y = 663.$$

---

[1]) Dit geldt ook nog als a of b nul is. Is b.v. $a = 0$, dan heeft de vergelijking (414), die in $by = c$ is overgegaan, dan en alleen dan oplossingen als c door b deelbaar is. Daar b de G.G.D. van 0 en b is, is dit met de eigenschap in overeenstemming.

We bepalen eerst den G.G.D. van 1417 en 3003:

```
1417 /3003\ 2
    / 2834 \
    ---------
      169 /1417\ 8
     (13)/ 1352 \
          ---------
            65 /169\ 2
           (5)/ 130 \
               -------
                39 /65\ 1
               (3)/ 39 \
                   ------
                    26 /39\ 1
                   (2)/ 26 \
                       ------
                        13 /26\ 2
                       (1)/ 26 \  1).
                           ----
                             0
```

Deze blijkt 13 te zijn. Daar 663 door 13 deelbaar is, is de vergelijking oplosbaar. Door deeling door 13 gaat deze over in:

$$109x - 231y = 51. \qquad (426)$$

Door

$$y = -y'$$

te stellen wordt de vergelijking:

$$109x + 231y' = 51. \qquad (427)$$

661. De verdere berekening is nu aldus:

$$\begin{array}{rll} 109(x + 2y') + 13y' &= 51\ ^{2)}, & \\ 109z + 13y' &= 51, & z = x + 2y', \\ 13(y' + 8z) + 5z &= 51\ ^{3)}, & \\ 13w + 5z &= 51, & w = y' + 8z, \\ 5(z + 2w) + 3w &= 51, & \\ 5v + 3w &= 51, & v = z + 2w, \\ 3(w + v) + 2v &= 51, & \\ 3u + 2v &= 51, & u = w + v, \\ 2(v + u) + u &= 51, & \\ 2t + u &= 51, & t = v + u. \end{array}$$

---

[1]) De tusschen haakjes geplaatste getallen zijn uit de daar boven staande afgeleid door deeling door 13. Nader hierover in n⁰. 663.

[2]) De hierin voorkomende getallen 2 en 13 zijn het quotiënt en de rest der deeling van 231 door 109.

[3]) De hierin voorkomende getallen 8 en 5 zijn quotiënt en rest bij deeling van 109 door 13.

Hieruit vindt men verder:

$$\begin{aligned}
u &= 51 - 2t,\\
v &= t - \quad u = -51 + 3t,\\
w &= u - \quad v = 2 \,.\, 51 - 5t,\\
z &= v - 2w = -5 \,.\, 51 + 13t,\\
y' &= w - 8z = 42 \,.\, 51 - 109t,\\
x &= z - 2y' = -89 \,.\, 51 + 231t,\\
y &= - \quad y' = -42 \,.\, 51 + 109t
\end{aligned}$$ [1]).

De algemeene oplossing der vergelijking (426) is dus:

$$x = -4539 + 231t,\ y = -2142 + 109t.$$

Door $t = t' + 20$ te stellen [2]) kan dit nog vereenvoudigd worden tot:

$$x = 81 + 231t',\ y = 38 + 109t'. \qquad (428)$$

662. Naar behooren is de oplossing (428) der vergelijking (426) van den vorm (417). De omstandigheid, dat de coëfficiënten van t, die in de oplossing voorkomen, reeds van te voren bekend zijn, kan nu ook worden gebruikt om een deel der berekening weg te laten. Men kan nl. volstaan met een bijzondere oplossing van (426) te bepalen door van een bijzondere oplossing der vergelijking $2t + u = 51$ uit te gaan.

Aangewezen is daarvoor te nemen $t = 0$, $u = 51$, waarna de verdere berekening wordt:

$$\begin{aligned}
v &= t - u = -51,\\
w &= u - v = 2 \,.\, 51,
\end{aligned}$$

---

[1]) Voor $t = 0$ geeft dit de bijzondere oplossing $x = -89 \,.\, 51$, $y = -42 \,.\, 51$. Algemeener vindt men op de aangegeven wijze een bijzondere oplossing van (414) van de gedaante:

$$x = Ac,\ y = Bc,$$

waarin A en B slechts van a en b afhangen. Door $c = 1$ te nemen blijkt, dat $x = A$, $y = B$ een bijzondere oplossing der vergelijking $ax + by = 1$ is. Dat dan $x = Ac$, $y = Bc$ aan (414) voldoet, blijkt trouwens ook onmiddellijk bij substitutie in (414) in verband met $aA + bB = 1$.

[2]) Daar bij iedere waarde van t' een waarde van t behoort *en omgekeerd*, wordt door de substitutie $t = t' + 20$ geen stel waarden van x en y ingevoerd en geen stel waarden verduisterd. Dit laatste zou b.v. wel het geval zijn als we $t = 2t'$ stelden, waardoor de oplossingen behoorende bij oneven waarden van t verduisterd zouden worden.

$$z = v - 2w = -5 \,.\, 51,$$
$$y' = w - 8z = 42 \,.\, 51, \qquad y = -y' = -42 \,.\, 51,$$
$$x = z - 2y' = -89 \,.\, 51.$$

Uit deze bijzondere oplossing van (416) is dan verder onmiddellijk de algemeene oplossing af te leiden.

663. Bij de opvolgende herleidingen der vergelijking (427) (zie n⁰. 661) kan met voordeel van het in n⁰. 660 voorkomende schema ter berekening van den G.G.D. van 1417 en 3003 gebruik gemaakt worden. Dit schema levert nl. zoowel de quotiënten als de resten, die bij de bepaling van den G.G.D. van 109 en 231 (de in (427) voorkomende coëfficiënten der onbekenden) optreden. De quotiënten zijn nl. dezelfde als bij 1417 en 3003 terwijl de resten door 13 gedeeld zijn (zie n⁰. 180); de nieuwe resten (die voor 109 en 231) zijn in het schema tusschen haakjes onder de oorspronkelijke resten geplaatst.

Welke rol nu verder de quotiënten en resten, optredende bij de bepaling van den G.G.D. van 109 en 231, spelen bij de achtereenvolgende herleidingen van (427), wordt door de noten 2 en 3 van blz. 315 genoegzaam duidelijk gemaakt.

664. Aan te brengen vereenvoudigingen. In sommige gevallen zijn in den in n⁰. 658 en 659 besproken algorithmus nog vereenvoudigingen aan te brengen.

In de eerste plaats *kan de omvorming tot positieve coëfficiënten der onbekenden achterwege blijven.* Deze is slechts ten behoeve van het bewijs van n⁰. 654—656 uitgevoerd om daarbij geen onderscheiding van verschillende gevallen noodig te hebben. Voor den algorithmus is die omvorming echter zonder beteekenis, hetgeen genoegzaam uit het voorbeeld van n⁰. 660 en 661 blijkt. Men kan nl. de vergelijking (426), zonder die eerst tot (427) om te vormen, ook aldus herleiden:

$$109(x - 2y) - 13y = 51,$$
$$109z - 13y = 51, \qquad z = x - 2y,$$
$$-13(y - 8z) + 5z = 51,$$
$$-13w + 5z = 51, \qquad w = y - 8z,$$
$$5(z - 2w) - 3w = 51,$$
$$5v - 3w = 51, \qquad v = z - 2w,$$

enz.

665. Verder kan het voordeel opleveren *sommige der bij de herleiding optredende partiëele quotiënten* (in het voorbeeld $\left[\frac{231}{109}\right]$, $\left[\frac{109}{13}\right]$, $\left[\frac{13}{5}\right]$, enz.) *door een 1 grooter getal te vervangen, als nl. daardoor de rest der deeling* (die daarbij van teeken is omgekeerd) *in absolute waarde kleiner wordt.* Dit wil dus zeggen, dat men de vergelijking (422) van n⁰. 654 door

$$a = q'b - r' \quad (0 < r' < b)$$

kan vervangen, waarin $q' = q + 1$, $r' = b - r$ is; dit is voordeelig als $r' < r$ is, daar dit dan een snellere verkleining der coëfficiënten teweeg brengt, hetgeen een verkleining van het aantal omvormingen ten gevolge heeft (vergelijk n⁰. 985—989).

Past men deze vereenvoudiging op de vergelijking (426) van n⁰. 660 toe, dan wordt de berekening:

$$\begin{aligned}
109(x - 2y) - 13y &= 51, & & \\
109z - 13y &= 51, & z &= x - 2y, \\
-13(y - 8z) + 5z &= 51, & & \\
-13w + 5z &= 51, & w &= y - 8z, \\
5(z - 3w) + 2w &= 51, & & \\
5v + 2w &= 51, & v &= z - 3w, \\
2(w + 2v) + v &= 51, & & \\
2u + v &= 51, & u &= w + 2v.
\end{aligned}$$

Een bijzondere oplossing vindt men nu aldus uit $u = 0$, $v = 51$:

$$\begin{aligned}
w &= u - 2v = -\ 2 \,.\, 51, \\
z &= v + 3w = -\ 5 \,.\, 51, \\
y &= w + 8z = -\ 42 \,.\, 51, \\
x &= z + 2y = -\ 89 \,.\, 51.
\end{aligned}$$

Een aanzienlijker vereenvoudiging krijgt men zoo bij de vergelijking

$$54x + 145y = 31,$$

hetgeen we aan den lezer overlaten na te gaan.

666. Andere vereenvoudigingen. In de vergelijking (414) van n⁰. 642 (waarin a en b onderling ondeelbaar ondersteld worden) kan men een vereenvoudiging aanbrengen *als a en c onderling deelbaar zijn.* Is nl. G de G.G.D. van a en c, dan is $c - ax$, dus by, door G deelbaar. Daar b en G onderling ondeelbaar

zijn (wegens de onderlinge ondeelbaarheid van a en b), is dus y door G deelbaar, zoodat men

$$y = Gy'$$

stellen kan. Is nu:

$$a = Ga' \quad c = Gc',$$

dan gaat (414) over in:

$$G(a'x + by' - c') = 0,$$
$$a'x + by' = c'.$$

Door deze eenvoudige omvorming is de coëfficiënt van x verkleind.

Een geheel soortgelijke vereenvoudiging is natuurlijk aan te brengen *als b en c onderling deelbaar zijn.*

667. De in n⁰. 666 besproken omvorming kan op de vergelijking (426) van n⁰. 660 worden toegepast, daar 231 en 51 beide door 3 deelbaar zijn. Door $x = 3x'$ te stellen gaat de vergelijking over in:

$$109x' - 77y = 17.$$

De verdere berekening is dan aldus:

$$\begin{aligned} -77(y - x') + 32x' &= 17, & & \\ -77z + 32x' &= 17, & z &= y - x', \\ 32(x' - 2z) - 13z &= 17, & & \\ 32w - 13z &= 17, & w &= x' - 2z, \\ -13(z - 2w) + 6w &= 17, & & \\ -13v + 6w &= 17, & v &= z - 2w, \\ 6(w - 2v) - v &= 17, & & \\ 6u - v &= 17, & u &= w - 2v. \end{aligned}$$

Door $u = 0$, $v = -17$ te nemen vindt men dan:

$$\begin{aligned} w &= u + 2v = -2 \,.\, 17, & & \\ z &= v + 2w = -5 \,.\, 17, & & \\ x' &= w + 2z = -12 \,.\, 17, & x &= 3x' = -36 \,.\, 17, \\ y &= z + x' = -17^2. & & \end{aligned}$$

De algemeene oplossing van (426) is dus:

$$x = -612 + 231t, \quad y = -289 + 109t,$$

hetgeen tot (428) is om te vormen.

668. Een nog grootere vereenvoudiging kan men aanbrengen *als c zoowel met a als met b onderling deelbaar is.* Verder

kan het geval zich ook voordoen, *dat de besproken vereenvoudiging bij een der bij de herleiding optredende vergelijkingen is aan te brengen.*

Als voorbeeld nemen we de vergelijking:

$$119x + 405y = -280. \tag{429}$$

Daar x door 5 en y door 7 deelbaar is, stellen we:

$$x = 5x', \; y = 7y',$$

waardoor (429) overgaat in:

$$17x' + 81y' = -8.$$

De berekening is dan verder aldus:

$$\begin{aligned} 17(x' + 5y') - 4y' &= -8, & & \\ 17z - 4y' &= -8, & z &= x' + 5y', \\ 17z' - y' &= -2, & z &= 4z'. \end{aligned}$$

Een bijzondere oplossing is $z' = 0, y' = 2$, waaruit verder volgt: $z = 0$, $x' = -10$, $x = -50$, $y = 14$.

De algemeene oplossing van (429) is dus:

$$x = -50 + 405t, \; y = 14 - 119t.$$

Zonder de aangebrachte vereenvoudigingen zou de behandeling van (429) veel bewerkelijker geweest zijn.

669. Het kan soms voordeel hebben *van den in n⁰. 665 gegeven regel af te wijken als men daardoor de in n⁰. 666 besproken vereenvoudiging kan aanbrengen.* Als voorbeeld nemen we de vergelijking:

$$31x + 44y = 9. \tag{430}$$

De behandeling volgens den regel van n⁰. 665 is aldus:

$$\begin{aligned} 31(x + y) + 13y &= 9, & & \\ 31z + 13y &= 9, & z &= x + y, \\ 13(y + 2z) + 5z &= 9, & & \\ 13w + 5z &= 9, & w &= y + 2z, \\ 5(z + 3w) - 2w &= 9, & & \\ 5v - 2w &= 9, & v &= z + 3w, \\ -2(w - 2v) + v &= 9, & & \\ -2u + v &= 9, & u &= w - 2v. \end{aligned}$$

Een bijzondere oplossing krijgt men door $u = 0$, $v = 9$ te nemen, waarna men vindt:

$$w = u + 2v = 2 . 9,$$
$$z = v - 3w = -5 . 9,$$
$$y = w - 2z = 12 . 9,$$
$$x = z - y = -17 . 9.$$

De algemeene oplossing van (430) is dus:

$$x = -153 + 44t,\ y = 108 - 31t,$$

hetgeen door $t = t' + 3$ te stellen [1]) overgaat in:

$$x = -21 + 44t',\ y = 15 - 31t'. \qquad (431)$$

Een eenvoudiger berekening krijgt men echter aldus:

$$31(x + 2y) - 18y = 9,$$
$$31z - 18y = 9, \qquad z = x + 2y,$$
$$31z' - 2y = 1, \qquad z = 9z',$$
$$-2(y - 15z') + z' = 1,$$
$$-2w + z' = 1, \qquad w = y - 15z'.$$

Een bijzondere oplossing is $w = 0$, $z' = 1$, waaruit volgt:

$$y = w + 15z' = 15,$$
$$z = 9z' = 9,$$
$$x = z - 2y = -21,$$

hetgeen onmiddellijk tot (431) voert.

670. Positieve oplossingen eener onbepaalde vergelijking. We kunnen ook vragen naar *die oplossingen der onbepaalde vergelijking* (*414*), *waarbij zoowel* x *als* y *positief is;* deze zullen we kortweg als ***positieve oplossingen*** aanduiden. We onderstellen daarbij a en b onderling ondeelbaar.

De positieve oplossingen worden uit de algemeene oplossing (417) (zie n⁰. 648) gevonden door t zoo te bepalen, dat

$$x_1 + bt > 0,\ y_1 - at > 0,$$

dus:

$$bt > -x_1,\ at < y_1 \qquad (432)$$

is. Het is echter niet zeker, dat aan beide ongelijkheden gelijktijdig kan worden voldaan.

671. De vergelijking (414) kan steeds zoo worden geschreven,

---

[1]) Zie noot 2 van blz. 316.

dat c positief of nul is[1]). Zijn a en b dan beide negatief, dan bezit (414) geen positieve oplossingen.

Onderstel nu, *dat a positief en b negatief is.* Is $b = -b'$, dan kan voor de eerste der ongelijkheden (432) geschreven worden $b't < x_1$. Is t_1 de grootste waarde van t, waarvoor $b't < x_1$ is, en t_2 de grootste waarde van t, waarvoor $at < y_1$ is, dan kan voor (432) geschreven worden:

$$t \leqq t_1, \; t \leqq t_2. \tag{433}$$

Is t_3 het kleinste der getallen t_1 en t_2, dan is aan (433) dan en alleen dan voldaan als $t \leqq t_3$ is. *De vergelijking* (*414*) *bezit dus oneindig veel positieve oplossingen.*

Tot dezelfde conclusie komt men *als a negatief en b positief is.*

672. *Zijn a en b beide positief*, dan volgt uit (432):

$$t \geqq t_1, \; t \leqq t_2, \tag{434}$$

waarin t_1 de kleinste waarde van t is, waarvoor $bt > -x_1$, en t_2 de grootste waarde van t, waarvoor $at < y_1$ is.

Is $t_1 > t_2$, dan kan aan (434) niet worden voldaan. De vergelijking (414) heeft dan geen positieve oplossingen. Dit geval doet zich b.v. voor bij de vergelijking

$$7x + 11y = 37.$$

De algemeene oplossing hiervan is:

$$x = -1 + 11t, \; y = 4 - 7t;$$

x is positief als $t \geqq 1$ en y positief als $t \leqq 0$ is, waaraan echter niet gelijktijdig kan worden voldaan.

Is $t_1 \leqq t_2$, dan wordt aan (434) door $t_2 - t_1 + 1$ waarden van t voldaan, nl. t_1, $t_1 + 1$, $t_1 + 2$, ..., t_2. De vergelijking (414) heeft dan dus $t_2 - t_1 + 1$ positieve oplossingen.

Het blijkt dus, *dat* (*414*), *voor a en b beide positief*, *hoogstens een eindig aantal positieve oplossingen heeft.* Dit is van de gemaakte onderstelling $c \geqq 0$ onafhankelijk, daar de vergelijking (414) geen positieve oplossingen bezit als a en b positief zijn en c negatief is.

Onverschillig welk teeken c heeft kan men zeggen, *dat* (*414*)

---

[1]) Voor (414) kan nl. ook geschreven worden:

$$(-a)x + (-b)y = -c.$$

hoogstens een eindig aantal positieve oplossingen bezit als a en b hetzelfde teeken hebben.

673. De voorgaande beschouwingen gaan met voor de hand liggende wijzigingen door als men naar oplossingen vraagt, waarbij x en y beide aantallen (dus $\geqq 0$) zijn, of algemeener als men vraagt naar oplossingen, waarvoor

$$x > P, y > Q$$

is, waarin P en Q gegeven getallen zijn. Dit geval is trouwens onmiddellijk terug te brengen tot dat, waarbij naar positieve oplossingen gevraagd wordt, door

$$x - P = \xi, \; y - Q = \eta$$

te stellen.

---

674. Twee onbepaalde vergelijkingen met drie onbekenden. We beschouwen nu het geval, dat men twee lineaire onbepaalde vergelijkingen

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \qquad (435)$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \qquad (436)$$

heeft, waaruit de onbekenden x, y en z moeten worden opgelost.

We nemen aan, *dat ieder der onbekenden in minstens één der twee vergelijkingen een van nul verschillenden coëfficiënt heeft*, daar anders een onbekende uit de vergelijkingen geheel wegvalt. De getallen c_1 en c_2 zijn dus niet beide nul, zoodat b.v. $c_1 \neq 0$ is.

De op nul herleide vergelijkingen (435) en (436) schrijven we resp.:

$$L_1 = 0, \; L_2 = 0, \qquad (437)$$

waarin L_1 een afkorting is voor $a_1x + b_1y + c_1z - d_1$ en L_2 voor $a_2x + b_2y + c_2z - d_2$. Uit (437) volgt:

$$c_2L_1 - c_1L_2 = 0.$$

Omgekeerd besluit men uit deze vergelijking en $L_1 = 0$ tot $c_1L_2 = 0$, dus (wegens $c_1 \neq 0$) tot $L_2 = 0$. Hieruit blijkt, dat aan (437) dan en alleen dan is voldaan als voldaan is aan:

$$L_1 = 0, \; c_2L_1 - c_1L_2 = 0. \qquad (438)$$

De twee vergelijkingen (437) hebben dus dezelfde oplossingen

als de twee vergelijkingen (438). Twee zulke stellen vergelijkingen heeten ***gelijkwaardig*** (vergelijk n⁰. 642).

675. De tweede vergelijking (438) luidt:

$$(a_1c_2 - a_2c_1)x + (b_1c_2 - b_2c_1)y = d_1c_2 - d_2c_1. \qquad (439)$$

Hieruit is de onbekende z verdwenen. Men zegt, *dat (439) uit (435) en (436) is afgeleid door z te* ***elimineeren*** (verwijderen).

Is $c_2 = 0$, dan kan voor (439) geschreven worden:

$$c_1(a_2x + b_2y - d_2) = 0,$$

dus wegens $c_1 \neq 0$:

$$a_2x + b_2y = d_2,$$

hetgeen niets anders is dan de vergelijking (436). Het elimineeren van z is dan overbodig, daar (436) dan reeds een vergelijking is, waarin z niet voorkomt; of liever het elimineeren van z uit (435) en (436) bestaat dan eenvoudig in het weglaten van (435).

676. De vergelijking (439) is van den vorm (414) (zie n⁰. 642). Voldoet (439) aan de voorwaarde voor oplosbaarheid (zie de eigenschap van n⁰. 657), dan is de algemeene oplossing van (439):

$$x = x_1 + ft, \; y = y_1 - et; \qquad (440)$$

hierin zijn e en f de getallen, die resp. uit $a_1c_2 - a_2c_1$ en $b_1c_2 - b_2c_1$ ontstaan door deze getallen door hun G.G.D. te deelen (zie n⁰. 651).

Substitueert men in (435) voor x en y de daarvoor door (440) aangegeven waarden, dan vindt men:

$$(a_1f - b_1e)t + c_1z = d_1 - a_1x_1 - b_1y_1. \qquad (441)$$

Dit is weer een vergelijking van den vorm (414), die in geval van oplosbaarheid een algemeene oplossing heeft van den vorm:

$$t = t_1 + hp, \; z = z_1 - gp, \qquad (442)$$

waarin g en h resp. uit de getallen $a_1f - b_1e$ en c_1 ontstaan door deze door hun G.G.D. te deelen, terwijl p een willekeurig geheel getal is.

Uit (440) en (442) vindt men als *algemeene oplossing der vergelijkingen (435) en (436):*

$$\left.\begin{array}{l} x = x_1 + ft_1 + fhp, \\ y = y_1 - et_1 - ehp, \\ z = z_1 \qquad\quad\; - gp \end{array}\right\} \qquad (443)$$

(*p willekeurig*); hierin is:

$$x = x_1 + ft_1,\ y = y_1 - et_1,\ z = z_1$$

een bijzondere oplossing van (435) en (436).

677. Vraagt men naar de positieve oplossingen van (435) en (436), dan moet men nog p zoo bepalen, dat x, y en z alle positief zijn. Dit is òf niet mogelijk, òf op een eindig aantal manieren mogelijk, òf op oneindig veel manieren mogelijk. Dit laatste geval doet zich dan en alleen dan voor als in de oplossing (443) de drie coëfficiënten van p, dus de getallen fh, $-eh$ en $-g$, alle hetzelfde teeken hebben (dus alle positief of alle negatief zijn), waarbij we van de bijzondere gevallen, dat een dier coëfficiënten nul is (zie n⁰. 678—680) afzien. We laten dit aan den lezer over na te gaan.

678. Bijzondere gevallen bij twee onbepaalde vergelijkingen met drie onbekenden. Een eerste bijzonder geval is, *dat in de vergelijking (439) een der coëfficiënten van de onbekenden nul is*, b.v.:

$$a_1c_2 - a_2c_1 = 0. \tag{444}$$

Is C de G.G.D. van c_1 en c_2 en

$$c_1 = Ck_1,\ c_2 = Ck_2, \tag{445}$$

dan volgt uit (444):

$$C(a_1k_2 - a_2k_1) = 0,$$
$$a_1k_2 = a_2k_1,$$

waaruit in verband met de onderlinge ondeelbaarheid van k_1 en k_3 volgt:

$$a_1 = Ak_1,\ a_2 = Ak_2. \tag{446}$$

Verder is:

$$b_1c_2 - b_2c_1 = C(b_1k_2 - b_2k_1),$$
$$d_1c_2 - d_2c_1 = C(d_1k_2 - d_2k_1).$$

De vergelijking (439) is oplosbaar als $b_1k_2 - b_2k_1$ deelbaar is op $d_1k_2 - d_2k_1$ (vergelijk de noot van blz. 314). Men vindt dan een bepaalde waarde y_1 voor y, terwijl x geheel willekeurig kan worden aangenomen; dit is in overeenstemming met (440), waarin $e = 0$ en $f = \pm 1$ is (vergelijk noot 1 van blz. 310).

De vergelijking (435) gaat nu over in:

$$a_1x + c_1z = d_1 - b_1y_1.$$

In geval deze vergelijking oplosbaar is luidt de *algemeene oplossing van (435) en (436):*

$$x = x_1 + hp,$$
$$y = y_1 \quad ,$$
$$z = z_1 - gp,$$

waarin g en h uit a_1 en c_1 ontstaan door deze getallen door hun G.G.D. te deelen.

De getallen g en h zijn beide van nul verschillend, daar a_1 en c_1 van nul verschillen. Van c_1 is dit nl. ondersteld, waaruit dan verder volgt $a_1 \neq 0$; uit $a_1 = 0$ en $c_1 \neq 0$ zou nl. in verband met (444) volgen $a_2 = 0$, in strijd met de in n°. 674 gemaakte onderstelling, dat a_1 en a_2 niet beide nul zijn.

679. Vervolgens beschouwen we het geval, *dat in de vergelijking (439) de coëfficiënten van x en y beide nul zijn,* dus voldaan is aan:

$$a_1c_2 - a_2c_1 = 0, \; b_1c_2 - b_2c_1 = 0. \tag{447}$$

Is weer C de G.G.D. van c_1 en c_2, dan heeft men, behalve (445) en (446), ook:

$$b_1 = Bk_1, \; b_2 = Bk_2. \tag{448}$$

Is

$$d_1c_2 - d_2c_1 \neq 0, \tag{449}$$

dan bezit (439) geen oplossingen. Aan de oplosbaarheidsvoorwaarde van n°. 657 is dan ook niet voldaan, mits men die voorwaarde zoo leest, *dat c deelbaar moet zijn door iederen gemeenen deeler van a en b.* Zijn nu a en b beide nul, dan is ieder getal een gemeene deeler van a en b (zie n°. 309), zoodat, als $c \neq 0$ is, er onder die gemeene deelers ook zijn, die geen deeler van c zijn.

Is behalve aan (447) ook voldaan aan:

$$d_1c_2 - d_2c_1 = 0, \tag{450}$$

dan is aan (439) voor ieder stel waarden van x en y voldaan. De vergelijkingen (435) en (436) zijn dan met de enkele vergelijking (435) gelijkwaardig, hetgeen men uitdrukt door te zeggen, *dat de vergelijking (436) van (435)* ***afhankelijk is.*** Iedere oplossing van (435) is ook een oplossing van (436). Hoe de oplossingen van (435) bepaald worden, zal in n°. 686—691 worden besproken.

680. Wanneer in (439) de coëfficiënten der onbekenden beide van nul verschillen kan zich nog het geval voordoen, *dat in de vergelijking* (*441*) *de coëfficiënt van t nul is*, dus voldaan is aan:

$$a_1f - b_1e = 0.$$

Blijkens de beteekenis der getallen e en f (zie n°. 676) is dit dan en alleen dan het geval als

$$a_1(b_1c_2 - b_2c_1) - b_1(a_1c_2 - a_2c_1) = 0,$$
$$c_1(a_1b_2 - a_2b_1) = 0,$$

dus (wegens $c_1 \neq 0$) als

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \qquad (451)$$

is. In geval (441) oplosbaar is (dus $d_1 - a_1x_1 - b_1y_1$ deelbaar door c_1) vindt men voor z een bepaalde waarde z_1, terwijl t geheel willekeurig is. De algemeene oplossing van (435) en (436) luidt dan:

$$x = x_1 + ft,$$
$$y = y_1 - et,$$
$$z = z_1.$$

Dit geval verschilt van het in n°. 678 beschouwde slechts daarin, dat de rollen der onbekenden y en z verwisseld zijn. Door y te elimineeren in plaats van z gaat het nu beschouwde geval, het voldaan zijn aan (451), geheel in dat van n°. 678 over.

681. Voorbeelden ter toelichting. Als voorbeeld nemen we de vergelijkingen:

$$7x + 8y - 9z = -11, \qquad (452)$$
$$13x - 23y - 6z = 16. \qquad (453)$$

Men elimineert z door (452) met -2 en (453) met 3 te vermenigvuldigen en op te tellen. Het resultaat dier eliminatie is:

$$25x - 85y = 70,$$
$$5x - 17y = 14.$$

De algemeene oplossing hiervan is:

$$x = -4 + 17t,\ y = -2 + 5t. \qquad (454)$$

Dit in (452) gesubstitueerd geeft:

$$159t - 9z = 33,$$
$$53t - 3z = 11, \qquad (455)$$

terwijl natuurlijk substitutie in (453) tot hetzelfde resultaat voert. Uit (455) vindt men verder:

$$t = 1 + 3p,\ z = 14 + 53p.$$

Dit in (454) substitueerend vindt men voor de algemeene oplossing der vergelijkingen (452) en (453):

$$x = 13 + 51p,$$
$$y = 3 + 15p,$$
$$z = 14 + 53p.$$

De positieve oplossingen verkrijgt men door $p \geqq 0$ te nemen.

682. Als tweede voorbeeld nemen we de vergelijkingen:

$$9x - 12y + 7z = -29, \quad (456)$$
$$13x - 6y + 5z = 18. \quad (457)$$

Eliminatie van y (door de tweede vergelijking met 2 te vermenigvuldigen en de eerste daarvan af te trekken) geeft:

$$17x + 3z = 65.$$

De algemeene oplossing hiervan is:

$$x = 4 - 3t, \; z = -1 + 17t,$$

hetgeen in (457) gesubstitueerd geeft:

$$46t - 6y = -29.$$

Daar de coëfficiënten van t en y door 2 deelbaar zijn, maar het tweede lid niet, heeft deze vergelijking geen oplossingen, zoodat ook (456) en (457) geen oplossingen bezitten.

Heeft men de vergelijkingen:

$$3x - 5y + 2z = 4,$$
$$11x + 7y - 6z = 9,$$

dan volgt hieruit door eliminatie van z:

$$20x - 8y = 21;$$

hieruit ziet men reeds direct, dat de vergelijkingen niet oplosbaar zijn.

683. Is gegeven:

$$8x - 10y + 11z = 17, \quad (458)$$
$$12x - 15y + 7z = -22, \quad (459)$$

dan vindt men door eliminatie van x (waarbij tevens y wegvalt, zoodat men in het in n^0. 678 beschouwde geval verkeert):

$$19z = 95,$$
$$z = 5.$$

Substitutie in (458) geeft:

$$8x - 10y = -38,$$
$$4x - 5y = -19,$$

waarvan de algemeene oplossing is:

$$x = -1 + 5t,\ y = 3 + 4t.$$

In combinatie met $z = 5$ is dit de algemeene oplossing van (458) en (459).

Vervangt men het tweede lid van (459) door 20, dan vindt men door eliminatie van x (of y):

$$19z = 91.$$

Daar 91 niet door 19 deelbaar is, kan hieraan niet worden voldaan, zoodat de vergelijkingen dan niet oplosbaar zijn.

684. Drie onbepaalde vergelijkingen met vier onbekenden. Heeft men drie onbepaalde vergelijkingen.

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1w = e_1,$$
$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2w = e_2,$$
$$a_3x + b_3y + c_3z + d_3w = e_3$$

met vier onbekenden x, y, z, w, dan is dit tot het geval van drie vergelijkingen met twee onbekenden terug te brengen door een der onbekenden, b.v. w, te elimineeren, waardoor men krijgt:

$$(a_1d_3 - a_3d_1)x + (b_1d_3 - b_3d_1)y + (c_1d_3 - c_3d_1)z = e_1d_3 - e_3d_1,$$
$$(a_2d_3 - a_3d_2)x + (b_2d_3 - b_3d_2)v + (c_2d_3 - c_3d_2)z = e_2d_3 - e_3d_2.$$

Heeft men deze vergelijkingen opgelost, dan moeten de voor x, y en z gevonden uitdrukkingen in een der gegeven vergelijkingen gesubstitueerd worden, hetgeen een onbepaalde vergelijking geeft met twee onbekenden (w en de grootheid t, waarin x, y en z zijn uitgedrukt).

Op geheel soortgelijke wijze handelt men met vier lineaire vergelijkingen met vijf onbekenden, enz. Van een discussie van het algemeene geval en de bijzonderheden, die zich daarbij kunnen voordoen, zien we hier af en volstaan met een voorbeeld.

685. Laten gegeven zijn de vergelijkingen:

$$\left.\begin{aligned} x - 2y + 6z - w &= 4, \\ 2x + 5y - z + 3w &= 3, \\ 4x - 3y + 3z + 2w &= 1. \end{aligned}\right\} \qquad (460)$$

Door eliminatie van w vindt men (uit de eerste en tweede en uit de eerste en derde vergelijking):

$$\left.\begin{aligned} 5x - y + 17z &= 15, \\ 6x - 7y + 15z &= 9. \end{aligned}\right\} \qquad (461)$$

Uit de laatste vergelijking blijkt, dat y door 3 deelbaar is Door $y = 3y'$ te stellen gaan de vergelijkingen (461) over in:

$$5x - 3y' + 17z = 15,$$
$$2x - 7y' + 5z = 3. \qquad (462)$$

Door eliminatie van x volgt hieruit:

$$29y' + 9z = 15. \qquad (463)$$

Bijgevolg is y' door 3 deelbaar. Stelt men $y' = 3y''$, dan gaat (463) over in:

$$29y'' + 3z = 5.$$

De algemeene oplossing hiervan is:

$$y'' = 1 - 3t, \quad z = -8 + 29t.$$

Dit in (462) substitueerend vindt men, lettend op $y' = 3y''$:

$$2x + 208t = 64,$$
$$x = 32 - 104t.$$

De eerste der vergelijkingen (460) levert dan verder als algemeene oplossing dier vergelijkingen:

$$x = 32 - 104t,$$
$$y = 9 - 27t,$$
$$z = -8 + 29t,$$
$$w = -38 + 124t.$$

Positieve oplossingen zijn niet aanwezig.

---

686. Onbepaalde vergelijking met drie of meer onbekenden. We beschouwen de lineaire onbepaalde vergelijking:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b \qquad (464)$$

met n onbekenden $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Hebben de coëfficiënten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ een gemeenen deeler, die geen deeler van b is, dan kan aan (464) niet worden voldaan. Is de G.G.D. van $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ook deelbaar op b, dan is (464) gelijkwaardig met

$$a_1'x_1 + a_2'x_2 + \ldots + a_n'x_n = b',$$

waarbij $a_1', a_2', \ldots, a_n', b'$ resp. uit $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ ontstaan door deze getallen door genoemden G.G.D. te deelen. De getallen $a_1', a_2', \ldots, a_n'$ hebben geen andere gemeene deelers dan 1 en -1, m. a. w. 1 is hun G.G.D.

Blijkens het voorgaande kan dus verder worden aangenomen,

dat in de vergelijking (464) de coëfficiënten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *het getal 1 tot G.G.D. hebben.*

687. Zijn twee der getallen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ onderling ondeelbaar, b.v. a_1 en a_2, dan kan men in (464) aan $x_3, x_4, \ldots, x_n$ willekeurige waarden toekennen, waarna men verder x_1 en x_2 kan oplossen, en wel uit de onbepaalde vergelijking

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b - a_3x_3 - a_4x_4 - \ldots - a_nx_n \qquad (465)$$

met twee onbekenden (zie de eigenschap van n⁰. 656).

Is $x_1 = A_1$, $x_2 = A_2$ een bijzondere oplossing der vergelijking

$$a_1x_1 + a_2x_2 = 1,$$

dan is:

$$x_1 = A_1(b - a_3x_3 - a_4x_4 - \ldots - a_nx_n),$$
$$x_2 = A_2(b - a_3x_3 - a_4x_4 - \ldots - a_nx_n)$$

een bijzondere oplossing van (465) (zie noot 1 van blz. 316). De algemeene oplossing van (465) is dus:

$$x_1 = A_1(b - a_3x_3 - a_4x_4 - \ldots - a_nx_n) + a_2t,$$
$$x_2 = A_2(b - a_3x_3 - a_4x_4 - \ldots - a_nx_n) - a_1t.$$

Dit is ook de algemeene oplossing van (464) als men $x_3, x_4, \ldots, x_n, t$ als willekeurig aan te nemen getallen beschouwt.

688. We beschouwen nu het geval, *dat geen twee der coëfficiënten* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *onderling ondeelbaar zijn.* Zij G de G.G.D. van a_1 en a_2. Dan is $a_1x_1 + a_2x_2$ door G deelbaar, zoodat we

$$a_1x_1 + a_2x_2 = Gy \qquad (466)$$

kunnen stellen, waardoor (464) overgaat in:

$$Gy + a_3x_3 + a_4x_4 + \ldots + a_nx_n = b. \qquad (467)$$

Dit is een onbepaalde vergelijking van dezelfde soort als (464), maar met $n - 1$ onbekenden, terwijl de coëfficiënten der onbekenden (dus $G, a_3, a_4, \ldots, a_n$) als G.G.D. 1 hebben (daar een gemeene deeler van $G, a_3, a_4, \ldots, a_n$ ook een gemeene deeler van $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ is).

Heeft nu (467) oplossingen, dan kan men verder x_1 en x_2 uit (466) bepalen; daar het (bekende) tweede lid van (466) door den G.G.D. G van a_1 en a_2 deelbaar is, voldoet (466) aan de voorwaarde voor oplosbaarheid (zie n⁰. 657). De vergelijking (464) heeft dus oplossingen.

Door volledige inductie blijkt zoo:

Hebben de coëfficiënten der onbekenden 1 tot G.G.D., dan is de onbepaalde vergelijking (464) oplosbaar.

689. In verband met het in n⁰. 686 opgemerkte volgt verder uit de eigenschap van n⁰. 688:

De vergelijking (464) is dan en alleen dan oplosbaar als de G.G.D. der coëfficiënten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *een deeler van het tweede lid b is.*

De eigenschap van n⁰. 657 ligt hierin als het bijzondere geval $n = 2$ opgesloten. Ook voor $n = 1$ is de eigenschap juist; ze is dan echter triviaal, daar ze dan niets anders uitdrukt dan de definitie van deelbaarheid.

690. Algorithmus ter oplossing van een onbepaalde vergelijking met drie of meer onbekenden. Het in n⁰. 686—688 behandelde wijst tevens den weg aan, langs welken de oplossingen der (oplosbaar ondersteld) vergelijking (464) verkregen kunnen worden. Die weg bestaat nl. daarin, dat, als de coëfficiënten der onbekenden twee aan twee onderling deelbaar zijn, de vergelijking teruggebracht wordt tot een onbepaalde vergelijking met een onbekende minder. Heeft ook deze geen twee onderling ondeelbare coëfficiënten, dan wordt dezelfde herleiding herhaald, waardoor het aantal onbekenden opnieuw vermindert. Dit wordt voortgezet totdat een vergelijking met twee onderling ondeelbare coëfficiënten ontstaat [1]), iets dat stellig bereikt is als het aantal onbekenden tot 2 is afgenomen (daar de G.G.D. van de coëfficiënten van alle onbekenden steeds 1 blijft).

691. Is het getal G van n⁰. 688 een priemgetal, dan is G met minstens één der coëfficiënten $a_3, a_4, \ldots, a_n$ onderling ondeelbaar, zoodat de vergelijking (467) dan in het in n⁰. 687 besproken geval verkeert en dus onmiddellijk als een vergelijking met twee onbekenden is op te lossen.

De herleiding van (464) tot een vergelijking met een onbekende minder bestaat in het vervangen van twee onbekenden door één

---

[1]) Voor dat geval is nl. de vergelijking op de in n⁰. 687 aangegeven wijze op te lossen.

enkele onbekende (in n^0. 688 werden x_1 en x_2 door y vervangen). Blijkens het zooeven opgemerkte is het nu aangewezen die twee onbekenden zoo mogelijk zoo te kiezen, dat de G.G.D. hunner coëfficiënten een priemgetal is. Is dit niet mogelijk, dan is het voordeelig dat paar onbekenden te kiezen, waarvoor de G.G.D. der bijbehoorende coëfficiënten zoo weinig mogelijk deelers bevat.

692. Voorbeeld ter toelichting. Ter toelichting diene het volgende voorbeeld:

$$240x + 140y - 105z + 252w + 630v = 88. \tag{468}$$

Hieruit ziet men direct, dat z door 2 deelbaar is. We stellen daarom $z = 2z'$, waardoor (468) overgaat in:

$$120x + 70y - 105z' + 126w + 315v = 44. \tag{469}$$

Hierin zijn geen twee van de coëfficiënten der onbekenden onderling ondeelbaar of hebben een priemgetal als G.G.D. Van de coëfficiënten 120 en 126 is 6 de G.G.D. We stellen dus:

$$120x + 126w = 6u,$$
$$20x + 21w = u, \tag{470}$$

waardoor (469) overgaat in:

$$6u + 70y - 105z' + 315v = 44. \tag{471}$$

De coëfficiënten 6 en 70 hebben het priemgetal 2 als G.G.D. We stellen dus:

$$6u + 70y = 2t,$$
$$3u + 35y = t, \tag{472}$$

waardoor (471) overgaat in:

$$2t - 105z' + 315v = 44.$$

Daar 2 en 105 onderling ondeelbaar zijn, schrijven we hiervoor:

$$2t - 105z' = 44 - 315v, \tag{473}$$

waarin v willekeurig kan worden aangenomen. Daar $t = 53$, $z' = 1$ een oplossing der vergelijking $2t - 105z' = 1$ is, vindt men voor de algemeene oplossing van (473):

$$t = 53(44 - 315v) + 105p,$$
$$z' = 44 - 315v + 2p.$$

Door

$$p = p' - 22 + 159v$$

te stellen gaat dit over in:

$$t = 22 + 105p',$$
$$z' = 3v + 2p',$$

waardoor (472) wordt:

$$3u + 35y = 22 + 105p'. \tag{474}$$

Daar $u = 12$, $y = -1$ een oplossing is van $3u + 35y = 1$, is de algemeene oplossing van (474):

$$u = 12(22 + 105p') - 35q,$$
$$y = -22 - 105p' + 3q,$$

of $q = q' + 7 + 36p'$ stellend:

$$u = 19 - 35q',$$
$$y = -1 + 3p' + 3q'.$$

Hierdoor gaat (470) over in:

$$20x + 21w = 19 - 35q',$$

waarvan de algemeene oplossing is:

$$x = -19 + 35q' + 21r,$$
$$w = 19 - 35q' - 20r.$$

Dit kan door $r = r' + 1 - 2q'$ te stellen vereenvoudigd worden tot:

$$x = 2 - 7q' + 21r',$$
$$w = -1 + 5q' - 20r'.$$

Voor de algemeene oplossing van (468) vinden we dus (lettend op $z = 2z'$):

$$\begin{aligned} x &= 2 - 7q' + 21r', \\ y &= -1 + 3p' + 3q', \\ z &= 6v + 4p', \\ w &= -1 + 5q' - 20r'. \end{aligned}$$

Door $q' = q'' + 4r'$ te stellen kan dit nog herleid worden tot:

$$\begin{aligned} x &= 2 - 7q'' - 7r', \\ y &= -1 + 3p' + 3q'' + 12r', \\ z &= 6v + 4p', \\ w &= -1 + 5q'', \end{aligned}$$

hetgeen, door $r' = r'' - q''$ te stellen, te vereenvoudigen is tot:

$$\left.\begin{aligned} x &= 2 - 7r''; \\ y &= -1 + 3p' - 9q'' + 12r'', \\ z &= 6v + 4p', \\ w &= -1 + 5q''. \end{aligned}\right\} \tag{475}$$

Hierin kunnen v, p', q'' en r'' willekeurig worden aangenomen [1]).

Dat men inderdaad aan v, p', q'' en r'' willekeurige waarden toekennen en zoo ook iedere oplossing van (468) verkrijgen kan, blijkt uit de nadere beschouwing der gelijkheden, die het verband aangeven tusschen p', q'' en r'' en de willekeurig aan te nemen getallen v, p, q en r.

In de eerste plaats heeft men: $p = p' - 22 + 159v$, volgens hetwelk bij ieder stel waarden van p' en v een stel waarden van p en v behoort. Men kan dus p' en v willekeurig aannemen. Omgekeerd behoort bij ieder stel waarden van p en v een stel waarden van p' en v, zoodat men door p door $p' - 22 + 159v$ te vervangen geen enkele oplossing buiten beschouwing laat.

Hetzelfde geldt voor de betrekking $q = q' + 7 + 36p'$, volgens welke bij ieder stel waarden van q' en p' een stel waarden van q en p' behoort en omgekeerd. Evenzoo voor de overige der betrekkingen:

$$\left.\begin{aligned} p &= p' - 22 + 159v, \\ q &= q' + 7 + 36p' \quad , \\ r &= r' + 1 - 2q' \quad , \\ q' &= q'' + 4r' \quad , \\ r' &= r'' - q'' \quad . \end{aligned}\right\} \qquad (476)$$

Het voorgaande komt hierop neer, dat de gelijkheden (476) ons in staat stellen p, q en r te berekenen uit p', q'' en r'' en omgekeerd (in beide gevallen v gegeven zijnde). We laten het aan den lezer over de gelijkheden op te stellen, die p, q en r uitdrukken in v, p', q'' en r'', en de gelijkheden, die p', q'' en r'' in v, p, q en r uitdrukken.

693. Men kan de vergelijking (469) van n°. 692 eenvoudiger oplossen *door eerst een particuliere oplossing*

$$x = x_1,\ y = y_1,\ z' = z_1',\ w = w_1,\ v = v_1$$

daarvan te bepalen, waarna voor (469) geschreven kan worden:

$$120(x - x_1) + 70(y - y_1) - 105(z' - z_1') + 126(w - w_1) + 315(v - v_1) = 0.$$

---

[1]) Dat v willekeurig kan worden aangenomen, is ook onmiddellijk daaruit te voorzien, dat in (468) de G.G.D. der coëfficiënten van x, y, z en w gelijk aan 1 is, dus deelbaar op den bekenden term 88.

Men heeft dus verder nog *de algemeene oplossing te bepalen van de zoogenaamde* ***gereduceerde vergelijking***

$$120x + 70y - 105z' + 126w + 315v = 0, \qquad (477)$$

die uit (*469*) *ontstaat door den bekenden term door 0 te vervangen.* Uit die algemeene oplossing wordt dan de algemeene oplossing van (469) gevonden door daarbij de particuliere oplossing van (469) op te tellen.

Om een particuliere oplossing van (469) te vinden merken we op, dat de bekende term 44 deelbaar is door den G.G.D. 2 der coëfficiënten van x, y en w, zoodat de vergelijking oplosbaar blijft als $z' = 0$ en $v = 0$ gesteld wordt. Ze gaat daarbij over in:

$$60x + 35y + 63w = 22. \qquad (478)$$

Om deze vergelijking op te lossen stellen we

$$35y + 63w = 14u,$$

$$5y + 9w = 2u,$$

waardoor (478) overgaat in:

$$30x + 7u = 11.$$

Hiervan is $x = 2$, $u = -7$ een particuliere oplossing. Dit voert tot:

$$5y + 9w = -14,$$

waarvan $y = -1$, $w = -1$ een particuliere oplossing is. Men vindt zoo de volgende particuliere oplossing van (469):

$$x = 2,\ y = -1,\ z' = 0,\ w = -1,\ v = 0.$$

Om nu de algemeene oplossing der gereduceerde vergelijking (477) te bepalen, merken we op, dat daarbij x door 7, y door 3 en w door 5 deelbaar is. We stellen daarom:

$$x = 7p,\ y = 3q,\ w = 5r,$$

waardoor (477) (na deeling door 3 . 5 . 7) overgaat in:

$$8p + 2q - z' + 6r + 3v = 0.$$

Hieruit volgt als algemeene oplossing van (477):

$$x = 7p,\ y = 3q,\ z' = 8p + 2q + 6r + 3v,\ w = 5r,$$

waarin p, q, r en v willekeurig kunnen worden aangenomen.

Als algemeene oplossing van (468) vindt men dus (bedenkend, dat $z = 2z'$ is):

$$\begin{aligned} x &= 2 + 7p, \\ y &= -1 + 3q, \\ z &= 16p + 4q + 12r + 6v, \\ w &= -1 + 5r. \end{aligned}$$

De overeenstemming met den vorm (475) der algemeene oplossing blijkt gemakkelijk.

694. Positieve oplossingen eener onbepaalde vergelijking met drie of meer onbekenden. Wil men de positieve oplossingen der vergelijking (468) van n⁰. 692 hebben, dan moet in de oplossing (475) v positief worden aangenomen, terwijl p', q'' en r'' zoo bepaald moeten worden, dat x, y, z en w positief zijn. Men vindt dan in de eerste plaats:

$$r'' \leqq 0,\ q'' \geqq 1. \tag{479}$$

Verder volgt uit de tweede der vergelijkingen (475):

$$\begin{aligned} 3p' &> 9q'' - 12r'' + 1, \\ 3p' &\geqq 9q'' - 12r'' + 3, \\ p' &\geqq 3q'' - \ 4r'' + 1. \end{aligned} \tag{480}$$

Wegens (479) vindt men zoo positieve waarden voor p', terwijl, daar v positief is, z van zelf positief uitvalt.

Stelt men:

$$q'' = 1 + i,\ r'' = -j, \tag{481}$$

dan zijn i en j gebonden aan de voorwaarde $\geqq 0$ (dus aantallen) te zijn. Tengevolge van (481) gaat (480) over in:

$$p' \geqq 4 + 3i + 4j.$$

Stelt men:

$$p' = 4 + 3i + 4j + k, \tag{482}$$

dan is dus $k \geqq 0$.

Voor de oplossing (475) kan nu geschreven worden:

$$\begin{aligned} x &= 2 + 7j, \\ y &= 2 + 3k, \\ z &= 16 + 12i + 16j + 4k + 6v, \\ w &= 4 + 5i \end{aligned}$$

(hetgeen men nog iets eenvoudiger uit den in n⁰. 693 gevonden vorm der algemeene oplossing afleidt). Hierin kan men aan i, j en k alle waarden toekennen, die $\geqq 0$ zijn, en aan v alle positieve waarden.

695. Zijn in de vergelijking (464) $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ natuurlijke getallen en vraagt men naar *de oplossingen, waarvoor* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *alle* $\geqq 0$ *zijn*, dan heeft men het in n⁰. 377 vermelde partitieprobleem.

Zij b.v. de vergelijking

$$6x + 10y + 15z + 20w = 1003 \qquad (483)$$

gegeven. De algemeene oplossing hiervan is:

$$\left.\begin{aligned} x &= 3 + 5p \quad , \\ y &= 97 - 3p - 3q - 2w, \\ z &= 1 \quad + 2q \quad , \end{aligned}\right\} \qquad (484)$$

waarin p, q en w willekeurige geheele getallen zijn.

Voor x en z vindt men waarden $\geqq 0$ als p en q beide $\geqq 0$ zijn. Uit de tweede der vergelijkingen (484) blijkt verder:

$$3p + 3q \leqq 97,$$
$$3p + 3q \leqq 96,$$
$$p + q \leqq 32.$$

Heeft men nu p en q zoo aangenomen, dat hieraan voldaan is, dan kan men aan w nog

$$\left[\frac{97 - 3p - 3q}{2}\right] + 1 = \left[\frac{99 - 3p - 3q}{2}\right] \text{ [1]}$$

waarden toekennen, die $\geqq 0$ zijn en waarvoor $y \geqq 0$ is. Daar men voor een bepaalde waarde m van $p + q$ de getallen p en q op $m + 1$ manieren kiezen kan (daar p een der getallen 0, 1, 2, 3, ..., m is), vindt men voor het *aantal oplossingen der vergelijking* (483), *die van de beschouwde soort zijn:*

$$1 \,.\left[\frac{99}{2}\right] + 2 \,.\left[\frac{96}{2}\right] + 3 \,.\left[\frac{93}{2}\right] + \ldots\ldots + 32 \,.\left[\frac{6}{2}\right] + 33 \,.\left[\frac{3}{2}\right] =$$

$$= 1 \,.\, 49 + 2 \,.\, 48 + 3 \,.\, 46 + 4 \,.\, 45 + 5 \,.\, 43 + \ldots\ldots + 31 \,.\, 4 + 32 \,.\, 3 + 33 \,.\, 1 =$$

$$= \frac{1 \,.\, 98 + 2 \,.\, 96 + 3 \,.\, 92 + 4 \,.\, 90 + \ldots\ldots + 32 \,.\, 6 + 33 \,.\, 2}{2} =$$

$$= \frac{3(1 \,.\, 33 + 2 \,.\, 32 + 3 \,.\, 31 + \ldots\ldots + 33 \,.\, 1) - (1 + 3 + 5 + \ldots\ldots + 33)}{2} =$$

$$= \frac{99(1+2+3+\ldots\ldots+33) - 3(2.1+3.2+\ldots\ldots+33.32) - (1+3+5+\ldots\ldots+33)}{2} =$$

$$= \frac{99 \,.\, 33 \,.\, 17 - 32 \,.\, 33 \,.\, 34 - 17^2}{2} = \frac{35 \,.\, 33 \,.\, 17 - 17^2}{2} =$$

$$= \frac{(1155 - 17) \,.\, 17}{2} = 17 \,.\, 569 = 9673.$$

---

[1]) Voor de beteekenis van $\left[\frac{a}{b}\right]$ zie n⁰. 455.

Hierbij is de volgende herleiding toegepast:

$$3(1 \,.\, 2 + 2 \,.\, 3 + 3 \,.\, 4 + \ldots\ldots + 32 \,.\, 33) =$$

$$= 1 \,.\, 2 \,.\, 3 + (2 \,.\, 3 \,.\, 4 - 1 \,.\, 2 \,.\, 3) + (3 \,.\, 4 \,.\, 5 - 2 \,.\, 3 \,.\, 4) + \ldots\ldots +$$

$$+ (31 \,.\, 32 \,.\, 33 - 30 \,.\, 31 \,.\, 32) + (32 \,.\, 33 \,.\, 34 - 31 \,.\, 32 \,.\, 33) = 32 \,.\, 33 \,.\, 34,$$

terwijl de sommen $1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + 33$ en $1 + 3 + 5 + \ldots\ldots + 33$ op de in n⁰. 640 aangegeven wijze berekend zijn.

---

§ 2. Kenmerken van deelbaarheid.

696. Deelbaarheid door een deeler van een term der schaal. Zij n een *natuurlijk getal, dat geen andere priemfactoren bevat dan die, welke ook in het grondtal* g *van het talstelsel voorkomen.* Het getal n is dan op een macht van g deelbaar. Zij t de *exponent van de laagste macht van* g, *die door* n *deelbaar is.*

Het getal t is gemakkelijk uit de exponenten af te leiden, waarmede de verschillende priemgetallen in n en in g voorkomen. Zijn die exponenten voor het priemgetal p resp. α en β, dan is g^l door p^α deelbaar als

$$\beta l \geqq \alpha$$

is. De kleinste waarde k van l, waarvoor dit geldt, is gelijk aan

$$\frac{\alpha}{\beta} \qquad \text{als } \alpha \text{ door } \beta \text{ deelbaar is,}$$

$$\left[\frac{\alpha}{\beta}\right] + 1 \qquad \text{als } \alpha \text{ niet door } \beta \text{ deelbaar is [1].}$$

Het getal t is nu het *grootste der getallen* k, *die bij de verschillende priemfactoren van* n *behooren.*

697. Bevat een natuurlijk getal a meer dan t cijfers, dan is:

$$a = qg^t + c_{t-1}c_{t-2} \ldots . c_1 c_0 \text{ [2]}. \tag{485}$$

---

[1]) In beide gevallen kan men hiervoor schrijven $\left[\frac{\alpha - 1}{\beta}\right] + 1$.

[2]) Hierin is q het getal, dat uit a ontstaat door de laatste t cijfers te schrappen.

Eenige der eerste cijfers van het getal $c_{t-1}c_{t-2} \ldots . c_1 c_0$ kunnen nul zijn. Ook op deze wijze geraakt men dus van zelf tot getallen, die met eenige nullen beginnen (zie n°. 418).

Is nu g^t deelbaar door n, dan volgt uit (485), dat a dan en alleen dan door n deelbaar is als het getal

$$c_{t-1}c_{t-2}\ldots c_1c_0$$

door n deelbaar is. Hieruit volgt:

Is n een deeler van g^t, dan is het in het g-tallig stelsel geschreven getal a dan en alleen dan door n deelbaar als het getal gevormd door de laatste t cijfers van a door n deelbaar is.

Voor de juistheid dier eigenschap is het niet noodig, dat t de kleinste exponent is, waarvoor g door n deelbaar is. *Bij de toepassing nemen we echter t zoo klein mogelijk*, daar het kenmerk dan de grootste vereenvoudiging geeft.

Blijkens de voorgaande beschouwingen geldt algemeener, *dat het getal a bij deeling door n dezelfde rest geeft als het getal gevormd door de laatste t cijfers van a.*

698. Toepassing op het tientallig stelsel. In het tientallig stelsel gaat de eigenschap van n⁰. 697 in de volgende over:

Een getal a, geschreven in het tientallig stelsel, is dan en alleen dan door $2^r . 5^s$ deelbaar als het getal gevormd door de laatste t cijfers van a door $2^r . 5^s$ deelbaar is; hierin is t het grootste der getallen r en s.

Bij een zelfde getal t behooren $2t+1$ kenmerken van deelbaarheid, nl. door de getallen

$$2^t,\ 2^t . 5,\ 2^t . 5^2,\ 2^t . 5^3,\ \ldots,\ 2^t . 5^{t-1},\ 2^t . 5^t,$$
$$5^t,\ 2 . 5^t,\ 2^2 . 5^t,\ 2^3 . 5^t,\ \ldots,\ 2^{t-1} . 5^t.$$

699. Is b.v. $r \geqq s$, dan kan voor $2^r . 5^s$ geschreven worden:

$$2^{r-s} . 10^s.$$

Daar men het al of niet deelbaar zijn door 10^s onmiddellijk daaraan herkent of de laatste s cijfers uitsluitend of niet uitsluitend uit nullen bestaan, heeft men (in geval van deelbaarheid door 10^s) nog slechts te onderzoeken of het getal, dat door weglating der laatste s cijfers (nullen) ontstaat, door 2^{r-s} deelbaar is.

Daar voor $r \leqq s$ hetzelfde geldt met verwisseling van 2 en 5, is in het bijzonder de deelbaarheid door 2^t of 5^t van belang. Daarvoor luidt de eigenschap van n⁰. 698:

In het tientallig stelsel is een getal a dan en alleen dan door

2^t of 5^t deelbaar als dit het geval is met het getal gevormd door de laatste t cijfers van a.

Algemeener geldt weer, *dat het getal a bij deeling door 2^t of 5^t dezelfde rest geeft als het getal gevormd door de laatste t cijfers van a.*

700. Deelbaarheid door een getal niet deelbaar op een term der schaal. We beschouwen nu de deelbaarheid door een getal n, dat nog andere priemfactoren bevat dan die, welke in het grondtal g voorkomen. Voor het getal n kan dan geschreven worden:

$$n = n_1 n_2,$$

waarin n_1 de priemfactoren van n bevat (en wel met denzelfden exponent), *die niet in het grondtal g voorkomen, en n_2 de priemfactoren van n, die wel in g voorkomen.* De getallen n_1 en n_2 zijn dan onderling ondeelbaar, evenals g en n_1, terwijl n_2 een deeler van een macht van g is.

701. Wegens de onderlinge ondeelbaarheid van n_1 en n_2 *is een getal a dan en alleen dan door $n_1 n_2$ deelbaar als het zoowel door n_1 als door n_2 deelbaar is* (zie de eigenschap van n°. 186). Daar men voor de deelbaarheid door n_2 het kenmerk van n°. 697 heeft, behoeft nog slechts naar een kenmerk van deelbaarheid door n_1 gezocht te worden, dus naar *kenmerken van deelbaarheid door getallen, die onderling ondeelbaar zijn met het grondtal.*

702. Samengestelde kenmerken van deelbaarheid. Heeft men *kenmerken van deelbaarheid door de getallen n_1, n_2, ..., n_k, die twee aan twee onderling ondeelbaar zijn*, dan heeft men daardoor ook een kenmerk van deelbaarheid door het product $n_1 n_2 \ldots n_k$. *Een getal is nl. dan en alleen dan door $n_1 n_2 \ldots n_k$ deelbaar is als aan de kenmerken van deelbaarheid door n_1, n_2, ..., n_k alle voldaan is* (zie de eigenschap van n°. 187). Dit kenmerk van deelbaarheid, dat niets anders is dan een combinatie van andere kenmerken, wordt wel een ***samengesteld kenmerk van deelbaarheid*** genoemd.

703. Is

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots . p_k^{\alpha_k},$$

waarin p_1, p_2, ..., p_k verschillende priemgetallen zijn, dan zijn de getallen

$$p_1^{\alpha_1},\ p_2^{\alpha_2},\ \dots .,\ p_k^{\alpha_k}$$

twee aan twee onderling ondeelbaar. In verband met het in n⁰. 702 opgemerkte blijkt hieruit, dat men slechts behoefte heeft aan *kenmerken van deelbaarheid door machten van priemgetallen;* hieronder zijn ook de priemgetallen zelf begrepen (als eerste machten van priemgetallen).

---

704. Deelbaarheid door een deeler van $g - 1$. Een zeer eenvoudig kenmerk van deelbaarheid verkrijgt men *als de beschouwde deeler n een deeler van g — 1 is* (waarin weer g het grondtal voorstelt). Men heeft dan:

$$g = 1 + vn,$$

$$g^k = (1 + vn)^k = 1 + kvn + \dots . + v^k n^k.$$

De laatste gelijkheid is te schrijven als:

$$g^k = 1 + v_k n,$$

waarbij $v_1 = v$ is. Volgens de gelijkheid (258) van n⁰. 412 geldt dan voor het getal $a = c_m c_{m-1} \dots . c_2 c_1 c_0$:

$$a = (c_m v_m + c_{m-1} v_{m-1} + \dots . + c_2 v_2 + c_1 v_1) n + \\ + c_m + c_{m-1} + \dots . + c_2 + c_1 + c_0. \qquad (486)$$

Hieruit leest men af:

Een getal in het g-tallig stelsel is dan en alleen dan door een deeler n van g — 1 deelbaar als de som zijner cijfers door n deelbaar is.

Voor het *tientallig stelsel* zegt deze eigenschap, *dat een getal door 3 of door 9 deelbaar is dan en alleen dan als de som zijner cijfers door 3 resp. 9 deelbaar is* [1]).

---

[1]) De kenmerken van deelbaarheid door 2 en door 5 uit het laatste cijfer (bijzonder geval der eigenschap van n⁰. 699, nl. $t = 1$) en die

705. Is bij toepassing van het kenmerk van n°. 704 de som der cijfers een groot getal, dan kan men op die som hetzelfde kenmerk opnieuw toepassen.

Eenvoudiger is het echter bij de vorming van de som der cijfers, hetgeen op eenige optellingen van telkens twee getallen neerkomt, steeds de som met een veelvoud van n te verminderen zoodra die grooter dan n geworden is [1]). Hierbij kan men ook van negatieve getallen gebruik maken als daardoor de absolute waarde der som nog verder verkleind wordt. Het spreekt van zelf, *dat de door n deelbare cijfers van het te onderzoeken getal geheel buiten beschouwing gelaten kunnen worden.*

706. Zooals gemakkelijk is na te gaan, wordt ieder der sommen (van twee getallen), die voor de toepassing van het kenmerk van n°. 704 berekend moeten worden, met een veelvoud van n verminderd als men zulk een som door de som harer cijfers vervangt (zie ook n°. 710). Hierdoor blijven de getallen, die moeten worden opgeteld, uit één cijfer bestaan, terwijl de som van twee zulke getallen hoogstens twee cijfers bevat (waarvan het eerste 1 is).

Is $n = g - 1$, dan worden daardoor die sommen zoo veel mogelijk verkleind (afgezien van verkleining door middel van negatieve getallen) als men nog zulk een som door nul vervangt als ze de waarde $g - 1$ aanneemt.

707. Als voorbeeld nemen we de deelbaarheid van het (dekadische) getal 739602585 door 9.

---

door 3 en door 9 uit de som der cijfers (ook wel *gewicht* genoemd) komen voor in het in 1202 verschenen werk „Liber Abaci" van LEONARDO VAN PISA (geb. 1175), zich ook noemende FILIUS BONACCII (samengetrokken tot FIBONACCI). Genoemd werk heeft voor goed ons tegenwoordig cijfersysteem in het Christelijke Europa ingevoerd.

We merken verder nog op, dat STIFEL in zijn „Arithmetica Integra" (zie de noot van blz. 159) kenmerken van deelbaarheid voor alle deelers tot en met 10 geeft.

[1]) Ook kan men telkens de verkregen som, zoodra die uit twee cijfers komt te bestaan, door de som dier cijfers vervangen (zie n°. 706).

```
739602585
 3
——
10, 1
    6
   ——
    7
    2
   ——
    9, 0
       5
      ——
       5
       8
      ——
      13, 4
          5
         ——
          9
```

De achter de sommen 10, 9 en 13 geplaatste getallen 1, 0, 4 zijn daaruit door vermindering met 9 (dus bij 10 en 13 door vorming van de som der cijfers) ontstaan. De berekening kan natuurlijk gemakkelijk uit het hoofd worden uitgevoerd.

Ook kan men met voordeel cijfergroepen, die een door 9 deelbare som opleveren, zooals de cijfergroep 585 uit bovenstaand voorbeeld, weglaten.

708. Proeven op vermenigvuldigingen en deelingen. Kan men van groote getallen gemakkelijk de rest der deeling door een getal n bepalen, dan heeft men daarin een contrôlemiddel op de vermenigvuldiging van groote getallen. Heeft men nl.:

$$a = r + vn,$$
$$b = s + wn,$$

dan is:

$$ab = rs + (rw + sv + vwn)n,$$

zoodat men heeft:

De rest der deeling van het product ab door n is dezelfde als die van het product der resten van a en b bij deeling door n.

De contrôle op de vermenigvuldiging ab, die de *n-proef* genoemd wordt, bestaat nu daarin, dat van de getallen a en b en van het te controleeren product de resten der deeling door n bepaald worden, waarna van het product der resten van a en b de rest gevormd wordt en geconstateerd, dat die met de rest van het gevonden product overeenstemt.

709. Ook bij een (opgaande of niet opgaande) deeling kan

men een soortgelijke proef toepassen. Heeft men nl. als resultaat der deeling van a door b gevonden:

$$a = qb + r,$$

dan bestaat de contrôle daarin, dat de rest der deeling van a door n rechtstreeks te bepalen is en ook door middel van de resten van b en de berekende getallen q en r (door het product der resten van b en q met de rest van r te vermeerderen en de rest van de som dier resten te vormen).

710. De (g — 1)-proef, in het bijzonder de negenproef. Een zeer bruikbaar contrôlemiddel van de in n⁰. 708 en 709 besproken soort krijgt men door $n = g - 1$ te nemen, in welk geval men van de ***(g — 1)-proef*** spreken kan. Uit de gelijkheid (486) van n⁰. 704 volgt nl.:

De rest der deeling van een in het g-tallig stelsel geschreven getal a door g — 1 is dezelfde als de rest der deeling van de som der cijfers van a door g — 1.

Natuurlijk geldt hetzelfde ook voor iederen deeler van $g - 1$.

711. Heeft men nu, onder toepassing van de laatste eigenschap, op de beide in n⁰. 708 genoemde manieren de rest der deeling van ab door $g - 1$ bepaald en blijkt het gevonden product tegen deze contrôle bestand, dan is dit een sterke aanwijziging, dat bij het vermenigvuldigen geen fout gemaakt is. Immers ieder cijfer van het gevonden product heeft invloed op de rest daarvan bij deeling door $g - 1$, zoodat het alleen nog mogelijk zou zijn, dat er een fout gemaakt is, die juist een (g — 1)-voud bedraagt, of twee fouten, die elkaars invloed op de rest juist opheffen. Dezelfde opmerking geldt natuurlijk voor de contrôle op een deeling (zie n⁰. 709).

Blijkens de aan het eind van n⁰. 710 gemaakte opmerking kan men in het voorgaande $g - 1$ door een echten deeler van $g - 1$ vervangen. Het is echter duidelijk, *dat de contrôle het scherpst is als de resten der deeling door g — 1, en niet die bij deeling door een echten deeler van g — 1, beschouwd worden.*

712. Voor het tientallig stelsel wordt de in n⁰. 711 besproken contrôle de ***negenproef.*** Een soortgelijke contrôle kan natuurlijk

ook bij *optelling* van meerdere getallen worden toegepast, maar dan is de contrôle niet veel korter dan de optelling zelf. Het is dan meer afdoende de optelling nog eens in omgekeerde volgorde uit te voeren.

Een bijzonder geval van de negenproef bij de vermenigvuldiging ab heeft men als a of b door 9 deelbaar is, terwijl een ander bijzonder geval is, dat a en b beide door 3 deelbaar zijn. In beide gevallen is dan ab door 9 deelbaar.

713. Als voorbeeld van het laatstgenoemde bijzondere geval nemen we de in n⁰. 451—453 besproken vermenigvuldiging

$$7269 \times 431508 = 3136631652,$$

waarbij beide factoren door 3 deelbaar zijn en dus de proef daarin bestaat, dat het product door 9 deelbaar is.

Een voorbeeld van het algemeene geval der negenproef is

$$6512 \times 84373 = 549436976;$$

de resten der deeling van beide factoren door 9 zijn 5 en 7, zoodat voor het product de rest dezelfde is als voor 5 . 7, dus 8; inderdaad levert het gevonden product een rest 8.

Een voorbeeld in het zeventallig stelsel (waarbij men van de zesproef kan spreken) levert de in n⁰. 454 genoemde vermenigvuldiging

$$6031 \times 42352 = 353114542,$$

waarbij de rest der deeling door 6 voor ieder der factoren 4 is, dus voor het product dezelfde als voor 4^2, dus eveneens 4.

714. Het heeft weinig zin bij de vermenigvuldiging ab de proef toe te passen, die daarin bestaat, dat voor het getal n van n⁰. 708 een macht van 2 of van 5 genomen wordt (tientallig stelsel). Wel is de rest der deeling van een getal door 2^t of 5^t gemakkelijk te bepalen (zie de opmerking aan het eind van n⁰. 699), maar de uitgeoefende contrôle heeft dan alleen op de laatste t cijfers van het product en niet op de overige cijfers betrekking; een fout in een dier overige cijfers is dus nog in geenen deele onwaarschijnlijk gemaakt.

715. Deelbaarheid door een deeler van $g^t - 1$. Is n een deeler van $g^t - 1$, dus $g^t - 1$ een n-voud, dan is:

$$g^t = 1 + v_1 n.$$

Hieruit volgt op dezelfde wijze als in n⁰. 704:

$$g^{kt} = 1 + v_k n. \qquad (487)$$

Nu kan voor een getal a geschreven worden:

$$a = l_u g^{ut} + l_{u-1} g^{(u-1)t} + \ldots + l_2 g^{2t} + l_1 g^t + l_0. \qquad (488)$$

Hierin zijn

$$l_0,\ l_1,\ l_2,\ \ldots,\ l_{u-1},\ l_u \qquad (489)$$

de getallen, die uit a ontstaan door de cijfers van a, rechts beginnend, in groepen van t cijfers te verdeelen; l_0 is dus het getal gevormd door de laatste t cijfers van a, l_1 het getal gevormd door de t daaraan voorafgaande cijfers (dus het getal $c_{2t-1}\, c_{2t-2} \ldots . c_{t+1}\, c_t$), enz.

Uit (487) en (488) volgt:

$$a = (l_u v_u + l_{u-1}\, v_{u-1} + \ldots . + l_2 v_2 + l_1 v_1)n +$$
$$+ l_u + l_{u-1} + \ldots . + l_2 + l_1 + l_0.$$

Hieruit volgt:

Een getal a in het g-tallig stelsel is dan en alleen dan door een deeler n van g^t — 1 deelbaar als de som der getallen (489), die ontstaan door de cijfers van a in groepen van t cijfers te verdeelen (rechts beginnend), door n deelbaar is [1].

Tevens blijkt, *dat de som der genoemde getallen dezelfde rest bij deeling door n oplevert als het getal a.* Hieruit kan men natuurlijk een soortgelijke vermenigvuldigingsproef afleiden als de in n⁰. 710—713 besprokene.

716. *Voor ieder getal n, dat onderling ondeelbaar is met het grondtal g, is een kenmerk van deelbaarheid van de in n⁰. 715 besproken soort aan te geven.* Immers volgens de stelling van Euler (zie n⁰. 390), of nog beter volgens de eigenschap van n⁰. 389, is er stellig een getal t, waarvoor g^t — 1 door n deelbaar is.

Natuurlijk neemt men het getal t zoo klein als maar met deze deelbaarheid is overeen te brengen, daar het kenmerk daardoor het eenvoudigst wordt.

Overeenkomstig het in n⁰. 703 opgemerkte kan men zich beperken tot het geval, dat n een macht van een priemgetal is.

---

[1]) Voor $t = 1$ is dit de eigenschap van n⁰. 704.

717. Als voorbeeld van een kenmerk van deelbaarheid in een ander talstelsel dan het tientallige noemen we:

In het zeventallig stelsel is een getal a dan en alleen dan door $2^4 = 22$ *deelbaar als de som der getallen, die men krijgt door de cijfers van a in paren te verdeelen (rechts beginnend), door* 2^4 *deelbaar is.*

Immers $7^2 - 1$ is door 2^4 deelbaar.

Op de volgende wijze blijkt dus, dat (steeds in het zeventallig stelsel)

$$
\begin{array}{r}
24\,32\,31\,01 \text{ door } 2^4 = 22 \text{ deelbaar is.} \\
31 \\
32 \\
\underline{24} \\
121 = 4 \,.\, 22
\end{array}
$$

718. Toepassing op het tientallig stelsel. Om in het tientallig stelsel te onderzoeken voor welke priemgetallen (of machten van priemgetallen) een bepaalde waarde van t een deelbaarheidskenmerk van de in n⁰. 715 beschouwde soort levert, hebben we $10^t - 1$ in priemfactoren te ontbinden. Hierbij heeft men natuurlijk alleen op die deelers te letten, die niet reeds voor een kleinere waarde van t op $10^t - 1$ deelbaar zijn.

Nu heeft men de volgende ontbindingen in priemfactoren:

$$
\begin{aligned}
10 - 1 &= 3^2, \\
10^2 - 1 &= (10 - 1)(10 + 1) = 3^2 \,.\, 11, \\
10^3 - 1 &= (10 - 1)(10^2 + 10 + 1) = 3^2 \,.\, 111 = 3^3 \,.\, 37, \\
10^4 - 1 &= (10^2 - 1)(10^2 + 1) = 3^2 \,.\, 11 \,.\, 101, \\
10^5 - 1 &= (10 - 1)(10^4 + 10^3 + 10^2 + 10 + 1) = 3^2 \,.\, 11111 = 3^2 \,.\, 41 \,.\, 271, \\
10^6 - 1 &= (10^3 - 1)(10^3 + 1) = 3^3 \,.\, 37 \,.\, 1001 = 3^3 \,.\, 7 \,.\, 11 \,.\, 13 \,.\, 37, \\
10^7 - 1 &= 3^2 \,.\, 1111111 = 3^2 \,.\, 239 \,.\, 4649, \\
10^8 - 1 &= (10^4 - 1)(10^4 + 1) = 3^2 \,.\, 11 \,.\, 101 \,.\, 10001 = 3^2 \,.\, 11 \,.\, 73 \,.\, 101 \,.\, 137, \\
10^9 - 1 &= (10^3 - 1)(10^6 + 10^3 + 1) = 3^3 \,.\, 37 \,.\, 1001001 = 3^4 \,.\, 37 \,.\, 333667, \\
10^{10} - 1 &= (10^5 - 1)(10^5 + 1) = 3^2 \,.\, 41 \,.\, 271 \,.\, 100001 = 3^2 \,.\, 11 \,.\, 41 \,.\, 271 \,.\, 9091.
\end{aligned}
$$

Bij deze ontbindingen kan men er met groot voordeel van gebruik maken, *dat iedere priemfactor van* $10^t - 1$*, die voor* $t' < t$ *niet deelbaar is op* $10^{t'} - 1$*, van den vorm* $tv + 1$ *is* (zie de opmerking aan het eind van n⁰. 735).

Blijkens het voorgaande levert

$t =$ 1 kenmerken van deelbaarheid door 3 en door 9,
$t =$ 2 een kenmerk van deelbaarheid door 11,
$t =$ 3 kenmerken van deelbaarheid door 27 en door 37,
$t =$ 4 een kenmerk van deelbaarheid door 101,
$t =$ 5 kenmerken van deelbaarheid door 41 en door 271,
$t =$ 6 kenmerken van deelbaarheid door 7 en door 13,
$t =$ 7 kenmerken van deelbaarheid door 239 en 4649,
$t =$ 8 kenmerken van deelbaarheid door 73 en 137,
$t =$ 9 kenmerken van deelbaarheid door 81 en 333667,
$t =$ 10 een kenmerk van deelbaarheid door 9091.

Voor een kenmerk van deelbaarheid door

17, 19, 23, 29, 31, 43, 47, 49, 53, 59, 61, 67, 71, 79

heeft men resp.

$t =$ 16, 18, 22, 28, 15, 21, 46, 42, 13, 58, 60, 33, 35, 13

te nemen [1]). Evenwel heeft het gevonden kenmerk alleen voor kleine waarden van t eenige practische bruikbaarheid.

719. We laten hier (eveneens in het tientallig stelsel) enkele voorbeelden volgen:

$$\begin{array}{r} 7\ 02\ 79 \text{ deelbaar door } 11. \\ 2 \\ \underline{7} \\ 88 = 8\ .\ 11 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1\ 841\ 786 \text{ deelbaar door } 37. \\ 841 \\ \underline{1} \\ 1\ 628 \\ \underline{1} \\ 629 = 17\ .\ 37 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 549\ 06178\ 55874 \text{ deelbaar door } 271. \\ 6178 \\ \underline{549} \\ 62601 = 231\ .\ 271 \end{array}$$

---

[1]) Zie verder de tafel van n°. 747.

Bij het tweede voorbeeld is op de som der in de eigenschap van n⁰. 715 genoemde getallen hetzelfde deelbaarheidskenmerk nog eens toegepast.

---

720. Deelbaarheid door een deeler van $g^t + 1$. Is n een deeler van $g^t + 1$, dan is:

$$g^t = v_1 n - 1,$$
$$g^{2t} = (v_1^2 n - 2v_1)n + 1 = v_2 n + 1.$$

Hieruit volgt verder (zie n⁰. 704):

$$g^{2kt} = v_{2k} n + 1,$$
$$g^{(2k+1)t} = v_{2k+1} n - 1,$$

hetgeen men samen kan vatten tot

$$g^{kt} = v_k n + (-1)^k.$$

Schrijft men een getal a in den vorm (488), waarin $l_0, l_1, \ldots,$ l_u de in n⁰. 715 aangegeven beteekenis hebben, dan is dus:

$$a = (l_1 v_1 + l_2 v_2 + \ldots + l_{u-1} v_{u-1} + l_u v_u)n + \\ + l_0 - l_1 + l_2 - l_3 + \ldots + (-1)^u l_u. \qquad (490)$$

Hieruit leest men af:

Een getal a in het g-tallig stelsel is dan en alleen dan door een deeler n van $g^t + 1$ deelbaar als de som der getallen l_0, $-l_1$, l_2, $-l_3, \ldots,$ $(-1)^u l_u$ (of, wat op hetzelfde neerkomt, het verschil van de som der getallen l_0, l_2, l_4, enz. en die der getallen l_1, l_3, l_5, enz.) door n deelbaar is. Hierin zijn l_0, l_1, l_2, l_3, enz, de getallen, die ontstaan door de cijfers van a in groepen van t cijfers te verdeelen, rechts beginnend.

Men neemt het getal t (bij gegeven n) natuurlijk weer zoo klein mogelijk.

721. In het tientallig stelsel levert de eigenschap van n⁰. 720
voor $t = 1$ een kenmerk van deelbaarheid door 11,
voor $t = 2$ een kenmerk van deelbaarheid door 101,
voor $t = 3$ kenmerken van deelbaarheid door 7 en door 13,
voor $t = 4$ kenmerken van deelbaarheid door 73 en door 137,
voor $t = 5$ een kenmerk van deelbaarheid door 9091,

voor $t = 6$ een kenmerk van deelbaarheid door 9901,
voor $t = 7$ een kenmerk van deelbaarheid door 909091.

Dit blijkt uit de volgende ontbindingen in priemfactoren:

$$10^3 + 1 = 7 \,.\, 11 \,.\, 13,$$
$$10^4 + 1 = 73 \,.\, 137,$$
$$10^5 + 1 = 11 \,.\, 9091,$$
$$10^6 + 1 = (10^2 + 1)(10^4 - 10^2 + 1) = 101 \,.\, 9901,$$
$$10^7 + 1 = 11 \,.\, 909091.$$

Hier volgen een paar voorbeelden:

468 999 790 987 deelbaar door 7 en door 13.

```
 790        999
----       ----
1258       1986
           1258
           ----
            728 = 8 . 7 . 13
```

7 31 35 43 56 02 79 deelbaar door 101.

```
43         56
 2         35
--          7
76        ---
          177
           76
          ---
          101
```

Bij het laatste voorbeeld is het nog iets eenvoudiger de som der getallen

$$79, \; -2, \; 56, \; -43, \; 35, \; -31, \; 7$$

te bepalen, iets dat gemakkelijk uit het hoofd te doen is.

722. Voor $t = 1$ levert de eigenschap van n⁰. 720 het volgende eenvoudige kenmerk van deelbaarheid:

Een getal $a = c_m c_{m-1} \ldots . c_1 c_0$ *in het g-tallig is dan en alleen dan door een deeler n van* $g + 1$ *deelbaar als de som der cijfers zoo men deze om het andere van teeken omkeert (dus het verschil van de som der cijfers* c_0, c_2, c_4, *enz. en die der cijfers* c_1, c_3, c_5, *enz.) door n deelbaar is.*

Dit kenmerk, dat in het tientallig stelsel slechts het *kenmerk van deelbaarheid door 11* levert, is zonder moeite uit het hoofd toe te passen.

723. Vergelijking der kenmerken van n⁰. 715 en 720. Daar

een deeler van $g + 1$ ook een deeler van $(g + 1)(g - 1) = g^2 - 1$ is, kan in het in n⁰. 722 beschouwde geval ook het kenmerk van n⁰. 715 voor $t = 2$ worden toegepast, hetgeen echter minder eenvoudig is.

Ook in andere gevallen kan het kenmerk van n⁰. 715 met voordeel door dat van n⁰. 720 worden vervangen. Daarvoor is blijkbaar noodig, *dat het getal t van n⁰. 715 even is.* Voor $t = 2t'$ is dan

$$g^t - 1 = (g^{t'} - 1)(g^{t'} + 1), \tag{491}$$

zoodat de deelbaarheid van $g^t - 1$ door n in het deelbaar zijn van $g^{t'} + 1$ door n bestaan kan.

Uit de omstandigheid, dat t even moet zijn, blijkt *dat het kenmerk van n⁰. 720 niet voor iederen deeler van toepassing is.* Zoo kan b.v. dit kenmerk in het tientallig stelsel niet worden toegepast op $n = 27, 31, 37, 41, 43, 53, 67, 71, 79, 81$ (zie n⁰. 718). Echter kan dit, behalve voor de reeds in n⁰. 721 genoemde deelers, wel voor

$$n = 17,\ 19,\ 23,\ 29,\ 47,\ 49,\ 59,\ 61,\ 89,\ 97,$$

waarbij men resp. heeft:

$$t' = \ 8,\ \ 9,\ 11,\ 14,\ 23,\ 21,\ 29,\ 30,\ 22,\ 48$$

(zie n⁰. 724 en de tafel van n⁰. 747).

724. Overeenkomstig het in n⁰. 703 opgemerkte kunnen we ons beperken tot *deelbaarheid door een getal n, dat een macht van een priemgetal p is. Is $p > 2$ en het eerste lid van (491) door n deelbaar,* dan is òf de eerste factor òf de tweede factor van het tweede lid door n deelbaar; immers uit

$$(g^{t'} + 1) - (g^{t'} - 1) = 2 \tag{492}$$

blijkt, dat de priemfactor p slechts in een der beide factoren kan voorkomen.

Het geval, dat $g^{t'} - 1$ door n deelbaar is, kan buiten beschouwing blijven, daar ondersteld wordt, dat $t = 2t'$ de kleinste exponent is, waarvoor $g^t - 1$ door n deelbaar is (zie n⁰. 716). Over blijft dus slechts het geval, *dat $g^{t'} + 1$ door n deelbaar is,* hetgeen beteekent, dat het kenmerk van n⁰. 720 van toepassing is. Dit geeft de vereenvoudiging, *dat de getallen l_0, l_1, l_2, enz., die door het in groepen splitsen der cijfers van a ontstaan, minder*

cijfers bevatten (t' in plaats van $2t'$ cijfers). Dit weegt ruimschoots op tegen de omstandigheid, dat men nu niet zonder meer de som der getallen l_0, l_1, l_2, enz. te vormen heeft, maar deze getallen eerst om het andere van teeken moet veranderen.

725. Blijkens het voorgaande *heeft het bij de quaestie van deelbaarheid door een getal n, dat een macht van een priemgetal p is, alleen dan zin het kenmerk van n⁰. 715 voor een even waarde van t toe te passen als $p = 2$ is.* Uit de deelbaarheid van $g^t - 1$ door n ziet men verder, *dat daarvoor het grondtal g oneven moet zijn.*

In dat geval bevatten, blijkens (492), beide factoren van het tweede lid van (491) den priemfactor 2, zoodat men nu niet kan besluiten, dat $g^{t'} + 1$ door n deelbaar is. Is n de hoogste macht van 2, die op $g^t - 1$ deelbaar is, dan kan men zelfs besluiten, dat $g^{t'} + 1$ niet door n deelbaar is [1]).

Zoo is b.v. $7^2 - 1$ door 2^4 deelbaar, terwijl dit noch met $7 - 1$, noch met $7 + 1$ het geval is. Het in n⁰. 717 genoemde kenmerk van deelbaarheid door 2^4 in het zeventallig stelsel laat zich dus niet met behulp van de eigenschap van n⁰. 720 vereenvoudigen.

726. Bij kenmerken van deelbaarheid door andere getallen dan machten van priemgetallen kan het ook bij even grondtal g voorkomen, dat een kenmerk van deelbaarheid van de in n⁰. 715 beschouwde soort niet door toepassing van de eigenschap van n⁰. 720 te vereenvoudigen is.

Zoo is het getal $10^6 - 1$ door 21 deelbaar (tientallig stelsel), zooals onmiddellijk daaruit blijkt, dat het volgens de stelling van Fermat (zie n⁰. 385) zoowel door 3 als door 7 deelbaar is; tevens

---

[1]) Is 2^α de hoogste macht van 2, die op $g^{2t'} - 1$ deelbaar is, dan is $g^{t'} - 1$ door $2^{\alpha-1}$ en $g^{t'} + 1$ door 2 (en geen hoogere macht van 2) deelbaar of omgekeerd. Is dus n een macht van 2, maar niet de hoogste macht van 2, die op $g^{2t'} - 1$ deelbaar is, dan is $g^{t'} - 1$ of $g^{t'} + 1$ door n deelbaar; is dan bovendien $t = 2t'$ de kleinste waarde van t, waarvoor $g^t - 1$ door n deelbaar is, dan is $g^{t'} + 1$ door n deelbaar.

is 6 de kleinste waarde van t, waarvoor $10^t - 1$ door 21 deelbaar is. Evenwel is $10^3 + 1$ niet door 21 deelbaar (wel door 7, maar niet door 3). Wel is nu natuurlijk het uit de eigenschap van n⁰. 715 voor $t = 6$ voortvloeiende kenmerk te vereenvoudigen door de kenmerken van deelbaarheid door 3 en door 7 afzonderlijk toe te passen (zie n⁰. 702).

727. Elfproef. Uit de gelijkheid (490) van n⁰. 720 leest men tevens af:

De rest der deeling van een in het g-tallig stelsel geschreven getal a door een deeler n van $g^t + 1$ *verschilt een n-voud van de som der getallen* $l_0, -l_1, l_2, -l_3, \ldots$, *waarin* l_0, l_1, l_2, l_3, *enz. de getallen zijn, die ontstaan door de cijfers van a in groepen van t cijfers te verdeelen, rechts beginnend.*

Voor $t = 1$ luidt dit in het bijzonder:

De rest der deeling van het getal $a = c_m c_{m-1} \ldots c_1 c_0$ *bij deeling door een deeler n van* $g + 1$ *verschilt een n-voud van*

$$c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + \ldots + (-1)^m c_m. \qquad (493)$$

Het getal (493) kan ook worden aangeduid als de *som der cijfers van even rang* (zie n⁰. 415) *verminderd met de som der cijfers van oneven rang.*

728. De eigenschappen van n⁰. 727 kunnen weer gebezigd worden ter controleering van groote vermenigvuldigingen en deelingen (zie n⁰. 708 en 709). Om de contrôle niet te gecompliceerd te maken neemt men voor het getal n een deeler van $g + 1$, waarbij dan de contrôle het scherpst wordt als men $n = g + 1$ neemt.

Daar $g + 1$, onverschillig wat g is (mits natuurlijk > 1), in het g-tallig stelsel als 11 wordt geschreven, kan men van de *11-proef* spreken (*elfproef* in het tientallig stelsel).

Bij het toepassen van de 11-proef levert het voordeel op ook met negatieve resten te werken als de rest daardoor in absolute waarde kleiner wordt (vergelijk n⁰. 665). Zoo neemt men (in het tientallig stelsel) voor de rest der deeling van 4376 door 11 niet 9, maar liever -2. Een soortgelijke opmerking geldt natuurlijk ook voor de negenproef (zie n⁰. 710—712), maar hier

in sterkere mate doordat de berekening van het getal (493) allicht van zelf tot negatieve getallen voert.

729. Als voorbeeld in het tientallig stelsel nemen we de vermenigvuldiging

$$58942 \,.\, 78343231 = 4617706721602.$$

Voor 58942 verschilt de rest der deeling door 11 een 11-voud van

$$2 - 4 + 9 - 8 + 5 = 4$$

en voor 78343231 een 11-voud van

$$1 - 3 + 2 - 3 + 4 - 3 + 8 - 7 = -1.$$

De rest der deeling van het product door 11 verschilt dus een 11-voud van $4 \,.\, (-1) = -4$. De contrôle is nu:

$$2 + 6 - 1 + 2 - 7 + 6 + 7 - 7 + 1 - 6 + 4 = 7,$$

hetgeen inderdaad een 11-voud van -4 verschilt.

Is de uitkomst bovendien tegen de negenproef bestand, dan is de juistheid der berekening buitengewoon waarschijnlijk, mits natuurlijk over het algemeen accuraat gerekend wordt.

---

730. Periode van resten. Zij *n een met g onderling ondeelbaar getal dat* > 1 *is.* We beschouwen nu de *resten van* g, g^2, g^3, *enz. bij deeling door n.* Deze resten noemen we resp. r_1, r_2, r_3, enz., zoodat dus:

$$g^k = q_k n + r_k \; (r_k < n). \tag{494}$$

Geen dier resten is nul, dus $0 < r_k < n$. Immers n is onderling ondeelbaar met g^k, dus (wegens $n > 1$) niet deelbaar op g^k.

Men kan de gelijkheid (494) ook volhouden voor $k = 0$, in welk geval $q_0 = 0$ en $r_0 = 1$ is.

731. Is g' een getal, dat een n-voud van g verschilt, dan verschilt ook g'^k een n-voud van g^k, daar $g'^k - g^k$ door $g' - g$ deelbaar is. Hieruit volgt, *dat* g'^k *en* g^k *bij deeling door n dezelfde rest opleveren.*

De opvolgende machten van twee getallen leveren dus bij deeling door n dezelfde resten als die getallen een n-voud verschillen. Ook

is dit *het eenige geval, waarbij dezelfde resten optreden*, daar uit de gelijkheid der eerste resten (die van g en g' bij deeling door n) reeds volgt, dat g en g' een n-voud verschillen.

Wel is het natuurlijk mogelijk, dat sommige resten gelijk zijn zonder dat g en g' een veelvoud van n verschillen. Zoo zijn b.v. de tweede resten gelijk als $g'^2 - g^2$ een n-voud is, waaruit echter nog volstrekt niet volgt, dat $g' - g$ een n-voud is.

732. Uit

$$g^{k+1} = q_{k+1}\, n + r_{k+1}$$

volgt in verband met (494):

$$g(q_k\, n + r_k) = q_{k+1}\, n + r_{k+1},$$

$$g r_k = (q_{k+1} - g q_k) n + r_{k+1}.$$

Hieruit ziet men, *dat g^{k+1} dezelfde rest bij deeling door n oplevert als $g r_k$.* Dit geeft een vereenvoudiging in het berekenen der opvolgende resten; iedere gevonden rest wordt met g vermenigvuldigd en door n gedeeld.

Wanneer (zooals bij de toepassing in n⁰. 736 en 737) g het grondtal van het talstelsel is, geschiedt de vermenigvuldiging met g eenvoudig door achterplaatsing van het cijfer 0.

733. Volgens de stelling van EULER (zie n⁰. 390), of de eigenschap van n⁰. 389, zal men bij het berekenen der resten r_1, r_2, r_3, enz. eindelijk een rest 1 verkrijgen. Zij dit voor het eerst met r_t het geval; *t is dan het kleinste getal, waarvoor $g^t - 1$ door n deelbaar is.*

Uit (494) volgt dan:

$$g^{t+k} = g^t \,.\, g^k = (q_t n + 1)\,(q_k n + r_k) =$$

$$= (q_t q_k n + q_t r_k + q_k) n + r_k,$$

waaruit men afleest:

$$r_{t+k} = r_k\ ^{1)}.$$

Men heeft dus:

$$r_{t+1} = r_1,\ r_{t+2} = r_2,\ r_{t+3} = r_3,\ \ldots,$$

---

[1]) Wegens $r_0 = 1$ (zie n⁰. 730) geldt dit ook voor $k = 0$.

Opgemerkt zij nog, dat $r_{t+k} = r_k$ ook is af te lezen uit:

$$g^{t+k} - g^k = g^k(g^t - 1);$$

daar $g^t - 1$ door n deelbaar is, geldt dus hetzelfde voor $g^{t+k} - g^k$.

zoodat de resten

$$r_1, r_2, r_3, \ldots, r_{t-1}, r_t = 1 \qquad (495)$$

periodiek (d. w. z. in dezelfde volgorde) een onbepaald aantal malen terugkeeren; ook zegt men, *dat de resten* ***repeteeren.*** De rij resten (495) wordt de ***periode van resten*** of de ***restenperiode*** genoemd.

Het repeteeren der resten blijkt ook uit het in n⁰. 732 opgemerkte, volgens hetwelk iedere rest uit de voorafgaande rest kan worden afgeleid; keert dus een zekere rest terug, dan keeren ook de daarop volgende resten in dezelfde volgorde terug.

734. Nadere beschouwing der restenperiode. *De resten (495), die in een periode voorkomen, zijn alle verschillend.* Had men nl.:

$$r_k = r_l \quad (k < l < t),$$

dan was volgens (494):

$$g^l - g^k = (q_l - q_k)n,$$
$$g^k(g^{l-k} - 1) = (q_l - q_k)n.$$

Daar g en n onderling ondeelbaar ondersteld zijn, zou hieruit volgen, dat

$$g^{l-k} - 1$$

door n deelbaar, dus $r_{l-k} = 1$ is. Dit is echter, wegens $l - k < t$, in strijd daarmede, dat r_t de eerste rest 1 is (van de rest r_0 natuurlijk afgezien).

735. Is, als in het voorgaande, t het aantal resten van een periode, dan zijn

$$r_t, r_{2t}, r_{3t}, \ldots.$$

de eenige resten, die 1 zijn. Daar nu volgens de eerste eigenschap van n⁰. 389

$$r_v = 1$$

is (waarin v de daar aangegeven beteekenis heeft), is v een veelvoud van t, dus t een deeler van v. We vinden dus:

Het aantal in een periode voorkomende resten bij deeling door

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$$

is een deeler van K, waarin K het K.G.V. is van de getallen

$$p_1^{\alpha_1 - 1}(p_1 - 1), \; p_2^{\alpha_2 - 1}(p_2 - 1), \; \ldots, \; p_k^{\alpha_k - 1}(p_k - 1); \qquad (233)$$

hierin zijn $p_1, p_2, \ldots, p_k$ de verschillende priemfactoren van n [1].

Is n een priemgetal, dan is dus het aantal resten eener periode een deeler van $n - 1$; m. a. w. is t het kleinste getal, waarvoor $g^t - 1$ door n deelbaar is, dan is t een deeler van $n - 1$, dus n van den vorm $tv + 1$.

736. Kenmerk van deelbaarheid met de periode van resten. Is g het grondtal van het talstelsel, dan kan men uit de periode der resten, die bij deeling van g, g^2, g^3, enz. door het met g onderling ondeelbare getal n optreden, een kenmerk van deelbaarheid door n afleiden.

Voor het getal

$$a = c_m c_{m-1} \ldots c_2 c_1 c_0 \tag{496}$$

kan nl. volgens (494) geschreven worden:

$$a = (q_1 c_1 + q_2 c_2 + q_3 c_3 + \ldots + q_m c_m)n + \\ + c_0 + r_1 c_1 + r_2 c_2 + r_3 c_3 + \ldots + r_m c_m.$$

Hieruit blijkt, *dat de rest der deeling van a door n dezelfde is als de rest der deeling van*

$$c_0 + r_1 c_1 + r_2 c_2 + r_3 c_3 + \ldots + r_m c_m \tag{497}$$

door n.

737. Uit het in n⁰. 736 gevondene volgt in het bijzonder:

Een getal a in het g-tallig stelsel is dan en alleen dan door n deelbaar als het getal (497), dat verkregen wordt door de cijfers $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_m$ van a (dus rechts beginnend) resp. met de getallen

$$1, r_1, r_2, \ldots, r_m \tag{498}$$

te vermenigvuldigen, door n deelbaar is. Hierin is r_j de rest der deeling van g^j door n, terwijl g en n onderling ondeelbaar ondersteld zijn [2].

Dit kenmerk van deelbaarheid is natuurlijk alleen dan eenigszins bruikbaar *als het aantal t der in een periode voorkomende resten klein is*, daar dan van de resten (498) slechts enkele bere-

---

[1]) Is n een 8-voud, dan kan met voordeel de tweede eigenschap van n⁰. 389 worden toegepast.

[2]) Dit kenmerk van deelbaarheid, uitgesproken voor het tientallig stelsel, treft men aan bij Pascal.

kend behoeven te worden, terwijl de overige daaruit dan door herhaling volgen.

738. Als voorbeeld nemen we in het tientallig stelsel de kenmerken van deelbaarheid door 7 en door 13. Het aantal resten eener periode is een deeler van 6 resp. 12 (zie n⁰. 735). In beide gevallen blijkt dit aantal 6 te zijn.

Voor $n = 7$ is de periode van resten:

$$3,\ 2,\ 6,\ 4,\ 5,\ 1$$

en voor $n = 13$:

$$10,\ 9,\ 12,\ 3,\ 4,\ 1,$$

zooals uit de volgende deelingen blijkt:

7 / 10	13 / 10
7	0
*3*0	*10*0
28	91
*2*0	*9*0
14	78
*6*0	*12*0
56	117
*4*0	*3*0
35	26
*5*0	*4*0
49	39
1	*1*

De toepassing der hieruit voortvloeiende kenmerken op het eerste voorbeeld van n⁰. 721 laten we aan den lezer over. De berekening kan uit het hoofd worden uitgevoerd en is te vereenvoudigen door telkens resp. veelvouden van 7 en 13 weg te laten. Bij de quaestie van deelbaarheid door 7 kan men dus de cijfers 7, 8 en 9 resp. door 0, 1 en 2 vervangen.

739. Vereenvoudiging van het kenmerk met de periode van resten. Men kan het uit de periode der resten voortvloeiende deelbaarheidskenmerk vereenvoudigen *door ook negatieve resten toe te laten. Zulk een negatieve rest wordt dan ingevoerd als deze in absolute waarde kleiner is dan de oorspronkelijke* (*positieve*)

rest. Dit komt hierop neer, dat de gelijkheid (494) van n⁰. 730 vervangen wordt door:

$$g^k = (q_k + 1)n - r_k',$$

hetgeen voordeel oplevert als $r_k' = n - r_k < r_k$, dus $2r_k > n$ is (vergelijk n⁰. 665).

740. Als voorbeeld nemen we in het tientallig stelsel het kenmerk van deelbaarheid door 27. Daarvoor is de restenperiode

$$10,\ 19,\ 1,$$

welke resten men met voordeel door

$$10,\ -8,\ 1.$$

vervangt. Het door (496) voorgestelde getal a (zie n⁰. 736) is dus door 27 deelbaar als dit het geval is met

$$c_0 + 10c_1 - 8c_2 + c_3 + 10c_4 - 8c_5 + c_6 + \ldots,$$

dus met

$$c_1c_0 - 8c_2 + c_4c_3 - 8c_5 + c_7c_6 - \ldots.$$

Men verdeelt dus de cijfers van a, rechts beginnend, in groepen, die om de andere 2 cijfers en 1 cijfer bevatten, vermenigvuldigt de zoo verkregen getallen om het andere met 1 en -8 en telt op. Het getal a is door 27 deelbaar als de zoo verkregen som dit is.

Zoo is 18658724112 door 27 deelbaar, daar

$$12 - 8 \cdot 1 + 24 - 8 \cdot 7 + 58 - 8 \cdot 6 + 18 = 0$$

door 27 deelbaar is.

Een soortgelijk kenmerk van deelbaarheid door 37 krijgt men door de resten 10, 26, 1 te vervangen door

$$10,\ -11,\ 1.$$

De toepassing hiervan op het tweede voorbeeld van n⁰. 719 laten we aan den lezer over.

741. *Komt men bij het berekenen der resten op een rest — 1, dan keeren de voorafgaande resten met tegengesteld teeken terug,* zooals zonder moeite volgt uit de in n⁰. 732 besproken wijze, waarop iedere rest uit de voorgaande berekend wordt.

Men kan het bewijs ook aldus inkleeden. Is $r_{t'} = -1$, dan is:

$$g^{t'} = qn - 1.$$

Hieruit volgt in verband met (494) (zie n⁰. 730):

$$g^{t'+k} = (qn - 1)(q_k n + r_k) =$$
$$= (qq_k n + qr_k - q_k)n - r_k,$$

zoodat als rest der deeling van $g^{t'+k}$ door n het getal $- r_k$ genomen kan worden.

Krijgt men dus een rest — 1, dan kunnen de volgende resten onmiddellijk worden neergeschreven. *Het aantal resten der periode is dan even. Is omgekeerd dit laatste het geval en bovendien n een macht van een oneven priemgetal* (*priemgetal* > 2), *dan komt er steeds een rest — 1.* Is nl. $t = 2t'$, dan volgt uit de omstandigheid, dat t de kleinste exponent is, waarvoor $g^t - 1$ door n deelbaar is, *dat* $g^{t'} + 1$ *door n deelbaar is* (zie n⁰. 724), dus *dat als rest der deeling van* $g^{t'}$ *door n het getal — 1 genomen kan worden.*

742. Het voorgaande vindt men bevestigd aan de voorbeelden $g = 10$, $n = 7$ of $= 13$, waarbij $t = 6$, dus even is (zie n⁰. 738). Naar behooren kan men voor de rest r_3 schrijven — 1. Door de resten absoluut zoo klein mogelijk te nemen wordt de restenperiode voor $n = 7$:

$$3,\ 2,\ -1,\ -3,\ -2,\ 1$$

en voor $n = 13$:

$$-3,\ -4,\ -1,\ 3,\ 4,\ 1.$$

Dat het getal 468999790987 uit het eerste voorbeeld van n⁰. 721 door 7 en door 13 deelbaar is, blijkt nu aldus:

$$3 . 1 + 2 . 2 + (-3) . 2 + 1 . 2 + 3 . 2 + 2 . 2 +$$
$$+ (-1) . 1 + (-3) . (-1) + (-2) . 4 = 7,$$

$$1 . 7 + (-3) . (-5) + (-4)^2 + 3 . (-4) + 4 . 7 + 1 . (-4) +$$
$$+ (-3) . (-4) + (-4)^2 + (-1) . (-5) + 3 . 6 + 4^2 = 117 = 9 . 13.$$

Voor $n = 7$ zijn de cijfers 6, 7, 8, 9 resp. door — 1, 0, 1, 2 en voor $n = 13$ de cijfers 8 en 9 resp. door — 5 en — 4 vervangen. Het levert weer voordeel op bij de optelling veelvouden van 7 resp. 13 weg te laten.

743. Tafel van restenperioden. We laten hier voor het tientallig stelsel een tafel van de perioden der resten volgen bij deeling door de met 10 onderling ondeelbare getallen beneden 100,

die een priemgetal of een macht daarvan zijn, met weglating van 3, 9 en 11 [1]).

De eerste kolom geeft den deeler n, de tweede kolom het aantal t der in de periode voorkomende resten, de derde kolom die resten zelf, tot hun absoluut kleinste waarden herleid. Voor het geval t even, dus $t = 2t'$ is, zijn slechts de eerste t' resten opgenomen, daar de volgende t' resten daaruit door teekenomkeering worden afgeleid (zie n⁰. 741).

Tafel van de perioden der resten voor deelers beneden 100.

n	t	resten.							
7	6	3	2	— 1					
13	6	— 3	— 4	— 1					
17	16	— 7	— 2	— 3	4	6	— 8	5	— 1
19	18	— 9	5	— 7	6	3	— 8	— 4	— 2
		— 1							
23	22	10	8	11	— 5	— 4	6	— 9	2
		— 3	— 7	— 1					
27	3	10	— 8	1					
29	28	10	13	14	— 5	8	— 7	— 12	— 4
		— 11	6	2	— 9	— 3	— 1		
31	15	10	7	8	— 13	— 6	2	— 11	14
		— 15	5	— 12	4	9	— 3	1	
37	3	10	— 11	1					
41	5	10	18	16	— 4	1			
43	21	10	14	11	— 19	— 18	— 8	6	17
		— 2	— 20	15	21	— 5	— 7	16	— 12
		9	4	— 3	13	1			
47	46	10	6	13	— 11	— 16	— 19	— 2	— 20
		— 12	21	22	— 15	— 9	4	— 7	— 23
		5	3	— 17	18	— 8	14	— 1	
49	42	10	2	20	4	— 9	8	— 18	16
		13	— 17	— 23	15	3	— 19	6	11
		12	22	24	— 5	— 1			
53	13	10	— 6	— 7	— 17	— 11	— 4	13	24
		— 25	15	— 9	16	1			

[1]) Voor $n = 3$, 9 of 11 verwijzen we naar n⁰. 750.

n	*t*	resten.							
59	58	10	— 18	— 3	29	— 5	9	— 28	15
		— 27	25	14	22	— 16	17	— 7	— 11
		8	21	— 26	— 24	— 4	19	13	12
		2	20	23	— 6	— 1			
61	60	10	— 22	24	— 4	21	27	26	16
		— 23	14	18	— 3	— 30	5	— 11	12
		— 2	— 20	— 17	13	8	19	7	9
		29	— 15	— 28	25	6	— 1		
67	33	10	33	— 5	17	— 31	25	— 18	21
		9	23	29	22	19	— 11	24	— 28
		— 12	14	6	— 7	— 3	— 30	— 32	15
		16	26	— 8	— 13	4	— 27	— 2	— 20
		1							
71	35	10	29	6	— 11	32	— 35	5	— 21
		3	30	16	18	— 33	25	— 34	15
		8	9	19	— 23	— 17	— 28	4	— 31
		— 26	24	27	— 14	2	20	— 13	12
		— 22	— 7	1					
73	8	10	27	— 22	— 1				
79	13	10	21	— 27	— 33	— 14	18	22	— 17
		— 12	38	— 15	8	1			
81	9	10	19	28	37	— 35	— 26	— 17	— 8
		1							
83	41	10	17	4	40	— 15	16	— 6	23
		— 19	— 24	9	7	— 13	36	28	31
		— 22	29	41	— 5	33	— 2	— 20	— 34
		— 8	3	30	— 32	12	37	38	— 35
		— 18	— 14	26	11	27	21	— 39	25
		1							
89	44	10	11	21	32	— 36	— 4	— 40	— 44
		5	— 39	— 34	16	— 18	— 2	— 20	— 22
		— 42	25	— 17	8	— 9	— 1		
97	96	10	3	30	9	— 7	27	— 21	— 16
		34	— 48	5	— 47	15	— 44	45	— 35
		38	— 8	17	— 24	— 46	25	— 41	— 22
		— 26	31	19	— 4	— 40	— 12	— 23	— 36
		28	— 11	— 13	— 33	— 39	— 2	— 20	— 6
		37	— 18	14	43	42	32	29	— 1

744. Uit een bij een bepaald getal n behoorende rest leidt men de volgende rest af door vermenigvuldiging met 10 en deeling door n. Voor $n = 7$, 13, 17 of 19 kan men ook met de eerste rest r_1, dus resp. met 3, — 3, — 7, — 9 vermenigvuldigen, hetgeen een kleiner product en daardoor een iets eenvoudiger deeling door n oplevert,

Als een scherpe contrôle op de berekening kan dienen, *dat men voor t een deeler van* $(p - 1)p^{\alpha - 1}$ *moet vinden als* $n = p^{\alpha}$ *is, waarin p priem is* (zie de eigenschap van n⁰. 735). In alle opzichten afdoende is die contrôle echter nog niet. Maakt men b.v. voor $n = 53$ bij een der resten een fout in het teeken (met de juiste absolute waarde), dan krijgen ook alle volgende resten het verkeerde teeken en vindt men voor r_{13} de waarde — 1 in plaats van 1; dit zou voeren tot $t = 26$ in plaats van $t = 13$, terwijl 26 nog even goed een deeler van $53 - 1 = 52$ is.

745. Een andere contrôle, waarvan herhaalde toepassing gewenscht is, bestaat daarin, *dat* r_{k+l} *ook gevonden kan worden als de rest der deeling van het product* $r_k \,.\, r_l$ *door* n. Uit de gelijkheid (494) van n⁰. 730 volgt nl.:

$$g^{k+l} = g^k \,.\, g^l = (q_k n + r_k)(q_l n + r_l) =$$
$$= (q_k q_l n + q_k r_l + r_k q_l)n + r_k \,.\, r_l.$$

Deze contrôle zal men natuurlijk liefst dan toepassen als men een kleine rest (van één cijfer) verkregen heeft.

Zoo vindt men b.v. voor $n = 61$, dat $r_4 = -4$ is. Daaruit besluit men onmiddellijk tot $r_8 = (-4)^2 = 16$, $r_{12} = (-4) \,.\, 16 + 61 = -3$, $r_{24} = (-3)^2 = 9$, $r_{28} = (-4) \,.\, 9 + 61 = 25$. Is $r_4 = -4$ juist, dan is daarmede de juistheid van r_{28} met zekerheid gecontroleerd; in de voorafgaande resten kunnen dus nog slechts elkaar opheffende fouten voorkomen, hetgeen natuurlijk zeer onwaarschijnlijk is.

Deze contrôle heeft boven de in n⁰. 744 besprokene verder nog het voordeel, dat ze een fout tijdig doet ontdekken en niet eerst als de berekening der resten reeds geheel voltooid is, terwijl ze bij een gemaakte fout ook aanwijst waar de fout schuilt.

746. De in n⁰. 745 genoemde contrôle kan natuurlijk ook in

verschillende gevallen dienen om de berekening der resten te vereenvoudigen, vooral als men reeds spoedig op een zeer kleine rest komt.

Zoo vindt men b.v. $r_2 = 2$ voor $n = 49$, waaruit men onmiddellijk afleidt:

$r_4 = 2^2 = 4$, $r_6 = 2 . 4 = 8$, $r_8 = 2 . 8 = 16$, $r_{10} = 2 . 16 - 49 = - 17$, $r_{12} = 2 . (- 17) + 49 = 15$, $r_{14} = 2 . 15 - 49 = - 19$, enz.; $r_3 = 2 . 10 = 20$, $r_5 = 2 . 20 - 49 = - 9$, $r_7 = 2 . (- 9) = - 18$, $r_9 = 2 . (- 18) + 49 = 13$, $r_{11} = 2 . 13 - 49 = - 23$, enz.

Voor $n = 97$ vindt men evenzoo uit $r_2 = 3$:

$r_4 = 3^2 = 9$, $r_6 = 3 . 9 = 27$, $r_8 = 3 . 27 - 97 = - 16$, enz.; $r_3 = 3 . 10 = 30$, $r_5 = 3 . 30 - 97 = - 7$, $r_7 = 3 . (- 7) = - 21$, enz.

Een soortgelijke berekening kan men voor $n = 59$ op $r_3 = - 3$ of voor $n = 83$ op $r_3 = 4$ baseeren. Als voorbeeld nemen we nog $n = 47$, waarvoor $r_7 = - 2$ is; de resten r_8, r_9, r_{10}, enz. worden dus resp. uit r_1, r_2, r_3, enz. gevonden door vermenigvuldiging met $- 2$ en deeling door 47, aldus:

$r_8 = - 2 . 10 = - 20$, $r_9 = - 2 . 6 = - 12$, $r_{10} = - 2 . 13 + 47 = 21$, $r_{11} = - 2 . (- 11) = 22$, enz.

We merken nog op, dat de in n°. 741 besproken vereenvoudiging (ten gevolge van een rest — 1) op hetzelfde denkbeeld berust.

747. Tafel der aantallen resten. De tafel van n°. 743 wijst, bij gegeven getal n, het kleinste getal t aan, waarvoor $10^t - 1$ door n deelbaar is, dus waarvoor het kenmerk van n°. 715 kan worden toegepast. Alleen als t even is, is ook het kenmerk van n°. 720 van toepassing ($10^{t'} + 1$ door n deelbaar als $t = 2t'$ is).

We laten hier voor de met 10 onderling ondeelbare getallen n beneden 300 (met weglating natuurlijk van 1) de waarden van t, dus de aantallen resten der periode, volgen (steeds voor het tientallig stelsel). In de tafel zijn ook de deelbare getallen n opgenomen; de getallen n, die een priemgetal of een macht daarvan zijn, zijn vet gedrukt.

Tafel der aantallen resten voor deelers beneden 300.

n	*t*	*n*	*t*	*n*	*t*	*n*	*t*	*n*	*t*	*n*	*t*
		51	16	**101**	**4**	**151**	**75**	201	33	**251**	**50**
3	**1**	**53**	**13**	**103**	**34**	153	16	203	84	253	22
7	**6**	57	18	**107**	**53**	**157**	**78**	207	22	**257**	**256**
9	**1**	**59**	**58**	**109**	**108**	159	13	209	18	259	6
11	**2**	**61**	**60**	111	3	161	66	**211**	**30**	261	28
13	**6**	63	6	**113**	**112**	**163**	**81**	213	35	**263**	**262**
17	**16**	**67**	**33**	117	6	**167**	**166**	217	30	267	44
19	**18**	69	22	119	48	**169**	**78**	219	8	**269**	**268**
21	6	**71**	**35**	**121**	**22**	171	18	221	48	**271**	**5**
23	**22**	**73**	**8**	123	5	**173**	**43**	**223**	**222**	273	6
27	**3**	77	6	**127**	**42**	177	58	**227**	**113**	**277**	**69**
29	**28**	**79**	**13**	129	21	**179**	**178**	**229**	**228**	279	15
31	**15**	**81**	**9**	**131**	**130**	**181**	**180**	231	6	**281**	**28**
33	2	**83**	**41**	133	18	183	60	**233**	**232**	**283**	**141**
37	**3**	87	28	**137**	**8**	187	16	237	13	287	30
39	6	**89**	**44**	**139**	**46**	189	6	**239**	**7**	**289**	**272**
41	**5**	91	6	141	46	**191**	**95**	**241**	**30**	291	96
43	**21**	93	15	143	6	**193**	**192**	**243**	**27**	**293**	**146**
47	**46**	**97**	**96**	147	42	**197**	**98**	247	18	297	6
49	**42**	99	2	**149**	**148**	**199**	**99**	249	41	299	66

748. Om het getal t voor een *macht van een priemgetal*, dus voor $n = p^\alpha$ [1]), te bepalen behoeven niet alle resten der periode berekend te worden, daar men reeds van te voren weet, dat t een deeler van $(p-1)p^{\alpha-1}$ is. Bijgevolg behoeven slechts die resten r_k berekend te worden, waarvoor k een deeler van $(p-1)p^{\alpha-1}$ is. Men schrijft dus de deelers van $(p-1)p^{\alpha-1}$

---

[1]) Voor $\alpha = 1$ heeft men het geval, dat n een priemgetal is.

in de volgorde hunner grootte neer en berekent de bijbehoorende resten tot men een rest 1 verkrijgt.

Een verdere vereenvoudiging bestaat daarin, dat men $r_{t'} = -1$ moet vinden voor $t = 2t'$. Dit maakt, *dat men slechts de resten r_k te berekenen heeft voor waarden van k, die op* $\frac{p-1}{2} p^{\alpha-1}$ *deelbaar zijn. Men heeft de berekening voort te zetten tot een rest 1 of — 1 verkregen is.*

Als voorbeeld nemen we $n = 151$. We bepalen de resten r_k, waarvoor k een deeler van $\frac{151-1}{2} = 75 = 3 \cdot 5^2$ is. Het aantal deelers van 75 bedraagt $2 \cdot 3 = 6$ (zie de eigenschap van n⁰. 393); deze zijn:

$$1, 3, 5, 15, 25, 75.$$

Men berekent nu achtereenvolgens:

$$r_1 = 10, \; r_2 = -51,$$
$$r_3 = -510 + 3 \cdot 151 = -57,$$
$$r_5 = (-51) \cdot (-57) - 19 \cdot 151 = 38,$$
$$r_{10} = 38^2 - 1510 = -66,$$
$$r_{15} = 38 \cdot (-66) + 17 \cdot 151 = 59,$$
$$r_{25} = -66 \cdot 59 + 26 \cdot 151 = 32,$$
$$r_{50} = 32^2 - 7 \cdot 151 = -33,$$
$$r_{75} = 32 \cdot (-33) + 7 \cdot 151 = 1.$$

Men vindt dus $t = 75$.

Als tweede voorbeeld nemen we $n = 173$. De deelers van $\frac{173-1}{2} = 86$ zijn 1, 2, 43 en 86, zoodat de berekening wordt:

$$r_1 = 10, \; r_2 = -73,$$
$$r_4 = -7300 + 42 \cdot 173 = -34,$$
$$r_8 = 34^2 - 7 \cdot 173 = -55,$$
$$r_{16} = 55^2 - 17 \cdot 173 = 84,$$
$$r_{32} = 84^2 - 41 \cdot 173 = -37,$$
$$r_{40} = 55 \cdot 37 - 12 \cdot 173 = -41,$$
$$r_{42} = -4100 + 24 \cdot 173 = 52,$$
$$r_{43} = 520 - 3 \cdot 173 = 1,$$

waaruit volgt $t = 43$.

Als derde voorbeeld nemen we $n = 211$. De deelers van $\frac{211 - 1}{2} = 105$ zijn:

$$1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105.$$

De berekening is als volgt:

$$r_1 = 10,\ r_2 = 100,\ r_3 = -55,$$
$$r_5 = -5500 + 26 \cdot 211 = -14,$$
$$r_7 = -1400 + 7 \cdot 211 = 77,$$
$$r_{14} = 77^2 - 28 \cdot 211 = 21,$$
$$r_{15} = 210 - 211 = -1,$$

dus $t = 2 \cdot 15 = 30$.

749. Voor een *getal n, dat twee of meer verschillende priemfactoren bevat,* is het getal t onmiddellijk af te leiden uit de getallen t voor de machten van priemgetallen, waarvan n het product is. *Zijn die machten*

$$p_1^{\alpha_1},\ p_2^{\alpha_2}, \ldots,\ p_k^{\alpha_k} \tag{499}$$

en $t_1, t_2, \ldots, t_k$ resp. de bijbehoorende getallen t, dan is het bij n behoorende getal t het K.G.V. van $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_k$. Immers het getal $g^t - 1$ is dan en alleen dan door n deelbaar als het door ieder der getallen (499) deelbaar is, dus dan en alleen dan als t een veelvoud van ieder der getallen $t_1, t_2, \ldots, t_k$ is.

Als voorbeeld nemen we $n = 299 = 13 \cdot 23$. Voor $n = 13$ en $n = 23$ is resp. $t = 6$ en $t = 22$. De bij 299 behoorende waarde van t is dus het K.G.V. van 6 en 22, d. i. 66. Als tweede voorbeeld nemen we $n = 273 = 3 \cdot 7 \cdot 13$. De bijbehoorende waarde van t is het K.G.V. van 1, 6 en 6, dus 6. Als derde voorbeeld nemen we $n = 297 = 3^3 \cdot 11$, waarbij als waarde van t het K.G.V. van 3 en 2, dus 6, behoort.

750. Vergelijking van het kenmerk van n⁰. 737 met vorige kenmerken. Past men het kenmerk van n⁰. 737 op een deeler n van $g - 1$ toe, dan zijn de resten (498) alle 1; m. a. w. de periode der resten bestaat uit het enkele getal 1. Het getal (497) is dan de som der cijfers van het getal a, zoodat het kenmerk van n⁰. 737 in dat van n⁰. 704 is overgegaan.

Past men het kenmerk van n⁰. 737 op een deeler van $g + 1$

toe, dan vindt men als periode der resten — 1, 1, zoodat het kenmerk dan in dat van n⁰. 722 overgaat.

Wanneer men de resten r_1, r_2, ..., r_{t-1} door de getallen g, g^2, ..., g^{t-1} vervangt, waaruit ze door deeling door n ontstaan zijn, gaat het kenmerk van n⁰. 737 in dat van n⁰. 715 over. Op soortgelijke wijze kan men het kenmerk van n⁰. 720 uit dat van n⁰. 737 voor den dag brengen.

751. Het kenmerk van n⁰. 737 is niet daaraan gebonden, dat het getal n met het grondtal g van het talstelsel onderling ondeelbaar is, al is dit kenmerk ook voor laatstgenoemd geval van grootere beteekenis.

Men kan het kenmerk van n⁰. 737 dus ook toepassen als n een deeler van een term der schaal is, b.v. van g^t. In dat geval worden de resten r_t, r_{t+1}, r_{t+2}, enz. alle nul, zoodat het getal (497) in

$$c_0 + r_1 c_1 + r_2 c_2 + \ldots . + r_{t-1} c_{t-1} \qquad (500)$$

overgaat. Door weer de resten r_1, r_2, enz. door g, g^2, enz. te vervangen gaat (500) in

$$c_{t-1} c_{t-2} \ldots . c_2 c_1 c_0$$

over, waardoor men het kenmerk van n⁰. 697 verkrijgt.

752. Uitbreiding van het kenmerk met de periode van resten. Men kan het deelbaarheidskenmerk met de periode van resten (zie n⁰. 737) uitbreiden tot het geval, dat men niet de resten der deeling door n beschouwt geleverd door de opvolgende machten van g, maar *die geleverd door de opvolgende machten van* g^k. *De eigenschap van n⁰. 737 blijft dan doorgaan als men de cijfers van het te onderzoeken getal a vervangt door de getallen* l_0, l_1, l_2, *enz., die men verkrijgt door de cijfers van a in groepen van k cijfers te verdeelen* (*rechts beginnend*), *en deze getallen resp. met*

$$1,\ r_k,\ r_{2k},\ r_{3k},\ \ldots .$$

vermenigvuldigt; hierin heeft r_j dezelfde beteekenis als in n⁰. 737.

De eigenschappen van n⁰. 715 en 720 liggen in het voorgaande resp. als de gevallen $r_k = 1$ en $r_k = -1$ opgesloten.

Als voorbeeld nemen we $n = 13$ (tientallig stelsel). De resten

der machten van 10^2 bij deeling door 13 zijn 9, 3, 1 (zie de tafel van n°. 743). Dit geeft de volgende berekening om te constateeren, dat het getal 468999790987 (zie het eerste voorbeeld van n°. 721) door 13 deelbaar is. Deze berekening is echter omslachtiger dan rechtstreeksche deeling.

$$\begin{array}{r}
468999790987 \\
81 = 9 \,.\, 9 \\
237 = 3 \,.\, 79 \\
99 = 1 \,.\, 99 \\
801 = 9 \,.\, 89 \\
\underline{138} = 3 \,.\, 46 \\
1443 = 111 \,.\, 13
\end{array}$$

---

753. Kenmerk van deelbaarheid door middel van optelling. Onderstel, *dat n een deeler is van $fg - 1$*, waarin (als steeds) g het grondtal van het talstelsel voorstelt, terwijl f een natuurlijk getal is. Daaruit volgt van zelf, *dat n en g onderling ondeelbaar zijn*, daar een gemeene deeler van n en g, wegens de deelbaarheid van n op $fg - 1$, ook een gemeene deeler van g en $fg - 1$ is, dus 1.

Is c_0 het laatste cijfer van het getal a, dat op zijn deelbaarheid door n moet worden onderzocht, en b het getal, dat uit a ontstaat door het laatste cijfer te schrappen, dan is:

$$a = bg + c_0,$$

waaruit volgt:

$$a + c_0(fg - 1) = (b + fc_0)g. \tag{501}$$

Daar $fg - 1$ door n deelbaar is, is dus a dan en alleen dan door n deelbaar als dit met $(b + fc_0)g$ het geval is. In verband met de onderlinge ondeelbaarheid van n en g besluiten we hieruit, *dat a dan en alleen dan door n deelbaar is als $b + fc_0$ door n deelbaar is.*

Lettend op de wijze, waarop het getal $b + fc_0$ uit a wordt afgeleid, vinden we dus:

Een getal a is dan en alleen dan door een deeler n van $fg - 1$ deelbaar als het getal, dat ontstaat door het laatste cijfer van a na vermenigvuldiging met f op te tellen bij het getal gevormd door de overige cijfers van a, door n deelbaar is.

754. Bij het kenmerk van n⁰. 753 wordt het te onderzoeken getal a blijkens (501) met een zoodanig n-voud vermeerderd, nl. met $c_0(fg - 1)$, dat een door het grondtal deelbaar (dus een op nul eindigend) getal ontstaat. Het getal a_1, dat men daaruit door weglating van het laatste cijfer (nul) verkrijgt [1]), moet dan verder nog op zijn deelbaarheid door n onderzocht worden. Heeft a een voldoend groot aantal cijfers, dan heeft a_1 één cijfer minder dan a, tenzij b van den eerstvolgenden grooteren term der schaal minder dan of juist fc_0 verschilt; in elk geval is dan echter $a_1 \leq a$.

Daar het getal a_1 uit a door optelling wordt afgeleid, spreekt men van een ***kenmerk van deelbaarheid door middel van optelling.*** Het getal f wordt *de bij het kenmerk behoorende* ***herleidingsfactor*** of ***reductiefactor*** genoemd.

755. Bij toepassing van het kenmerk van n⁰. 753 wordt het op zijn deelbaarheid te onderzoeken getal a door $b + fc_0 = a_1$ vervangen. Als regel zal hierin een voordeel gelegen zijn als het getal daardoor verkleind wordt [2]), dus als men heeft:

$$a = bg + c_0 > b + fc_0,$$
$$b(g - 1) > c_0(f - 1).$$

Hieruit ziet men, *dat het getal a door toepassing van het kenmerk van n⁰. 753 dan en alleen dan niet verkleind kan worden als men heeft:*

$$b(g - 1) \leqq c_0(f - 1). \qquad (502)$$

Daar $c_0 \leqq g - 1$ is, volgt uit (502):

$$b(g - 1) \leqq (g - 1)(f - 1),$$
$$b \leqq f - 1,$$
$$a \leqq bg + g - 1 \leqq (f - 1)g + g - 1 = fg - 1.$$

---

[1]) Dit is het getal $b + fc_0$ van n⁰. 753.

[2]) Het kan echter wel voorkomen, dat $a > a_1$ is en men toch door den aard der cijfers dier getallen aan a direct, maar aan a_1 niet zoo direct ziet, dat het door n deelbaar is. Zoo is (in het tientallig stelsel) $119 = 12 . 10 - 1$ door 17 deelbaar, zoodat $f = 12$ is voor $n = 17$; neemt men $a = 1717$ (dus $c_0 = 7, b = 171$), dan is $a_1 = 171 + 12 . 7 = 255$; men ziet echter eerder dat 1717 dan dat 255 door 17 deelbaar is. Van dergelijke toevalligheden zien we echter bij de volgende beschouwingen af.

Hieruit blijkt, *dat $fg - 1$ het grootste getal is, dat door toepassing van het kenmerk van n^0. 753 niet verkleind kan worden* [1]. Men heeft dus:

Door herhaalde toepassing van het kenmerk van n^0. 753 kan men het te onderzoeken getal verkleinen tot het kleiner dan fg geworden is.

Dit wil echter nog niet zeggen, dat als men een getal gekregen heeft, dat $< fg$ is, het niet door toepassing van het kenmerk van n^0. 753 nog verder te verkleinen is. Zoo is $f = 12$ voor $n = 17$ (zie noot 2 van blz. 372), terwijl het getal 61 door toepassing van het kenmerk tot 18 verkleind wordt.

756. Het kenmerk van n^0. 753 met herleidingsfactor 1. In het voorgaande kan zonder bezwaar $f = 1$ genomen worden. Men heeft dan echter het kenmerk van n^0. 753 niet noodig, daar dan het eenvoudige kenmerk van n^0. 704 kan worden toegepast. We willen echter toch het *kenmerk van n^0. 753 voor het geval $f = 1$* wat nader beschouwen.

Dit kenmerk komt dan daarop neer, *dat het laatste cijfer van het te onderzoeken getal a bij het door de overige cijfers van a gevormde getal wordt opgeteld.* Dit kan men volgens de eigenschap van n^0. 755 voortzetten *tot men een getal $< g$, dus een getal van één cijfer heeft overgehouden.*

757. Daar, zooals gemakkelijk is in te zien, de som der cijfers bij ieder der bewerkingen met een $(g - 1)$-voud verandert, is het voorgaande ook te beschouwen als een manier om de rest van de som der cijfers van a bij deeling door $g - 1$ te bepalen. Hierdoor verschijnt het kenmerk van n^0. 753 voor $f = 1$ als een gewijzigde vorm van het kenmerk van n^0. 704; laatstgenoemd kenmerk in zijn oorspronkelijken vorm verdient echter de voorkeur.

Uit het voorgaande blijkt tevens, *dat het getal van één cijfer, waarop men bij herhaalde toepassing van het kenmerk van n^0. 753 voor $f = 1$ uitkomt, nog steeds dezelfde rest bij deeling door n oplevert als het oorspronkelijke getal a.*

---

[1] Toepassing van dit kenmerk op $fg - 1$ heeft trouwens geen zin, daar ons uitgangspunt juist is, *dat $fg - 1$ door n deelbaar is.*

758. Bij toepassing van het kenmerk van n⁰. 753 voor $f = 1$ gaat het getal

$$a = c_m c_{m-1} \ldots . c_1 c_0$$

in

$$b + c_0 = c_m c_{m-1} \ldots . c_1 + c_0$$

over. Dit laatste getal heeft één cijfer minder dan a, behalve als $c_1 + c_0 \geqq g$ is en de cijfers $c_m, c_{m-1}, \ldots, c_2$ (zoo deze aanwezig zijn, dus zoo $m > 1$ is) alle $g - 1$ zijn.

In laatstgenoemd geval heeft $b + c_0$ evenveel cijfers als a; dan is:

$$b + c_0 = d_m d_{m-1} \ldots . d_1 d_0,$$

waarin:

$$d_m = 1,\ d_{m-1} = d_{m-2} = \ldots . = d_1 = 0,\ d_0 = c_1 + c_0 - g.$$

De getallen, die men uit $b + c_0$ door herhaalde toepassing van het genoemde kenmerk afleidt, hebben dan alle één cijfer minder dan het voorgaande, *zoodat het slechts eenmaal kan voorkomen, dat het aantal cijfers gelijk blijft.*

Hieruit ziet men, *dat het kenmerk van n⁰. 753 voor $f = 1$ na m of $m + 1$ toepassingen tot een getal van één cijfer voert, waarin $m + 1$ het aantal cijfers van het te onderzoeken getal a voorstelt.*

759. We laten hier in het tientallig stelsel een drietal voorbeelden volgen, waarbij $n = 9$ is. In het eerste voorbeeld is voor a hetzelfde getal genomen als in het voorbeeld van n⁰. 707:

739602585 deelbaar door 9.

```
        5
       63
        3
        9
       9
      11
      1
      2
     2
     8
    8
   47
   7
  81
  1
  9
```

9994878 deelbaar door 9; in dit voorbeeld kunnen natuurlijk de drie cijfers 9 direct geschrapt worden.

```
9994878
      8
     95
     5
     54
     4
     9
    9
   1008
     8
     8
    8
    8
   8
   9
```

```
 8825375
      5
     --
     42
     2
     -
     6
    6
    --
    31
   1
   -
   4
  4
  --
  92
  2
 --
 11
 1
 -
 2
```

Blijkens het in n⁰. 757 opgemerkte is in het laatste voorbeeld 2 de rest der deeling door 9.

In het eerste voorbeeld is het aantal toepassingen van het kenmerk één minder dan, in de beide laatste voorbeelden gelijk aan het aantal cijfers van het te onderzoeken getal.

760. Kenmerk van deelbaarheid door middel van aftrekking. Bij de beschouwingen van n⁰. 753 en 754 is aangenomen, dat de herleidingsfactor f een natuurlijk getal is. *Die beschouwingen blijven echter onveranderd doorgaan als f negatief is.*

Is dan $f = -f'$, waarin f' een natuurlijk getal voorstelt, dan is $-f'g - 1$ deelbaar door n; dit drukt hetzelfde uit als *dat $f'g + 1$ door n deelbaar wordt aangenomen* (zie n⁰. 572). Blijkens het in n⁰. 753 gevondene *is a dan en alleen dan door n deelbaar als dit met $b - f'c_0$ het geval is.* We vinden dus:

Een getal a is dan en alleen dan door een deeler n van $f'g + 1$ deelbaar als het getal, dat ontstaat door het laatste cijfer van a na vermenigvuldiging met f' af te trekken van het getal gevormd door de overige cijfers van a, door n deelbaar is.

761. Daar het getal $b - f'c_0$ uit a ontstaat door vermindering met $c_0(f'g + 1)$ (dus met een n-voud) gevolgd door deeling door g (weglating van een nul aan het eind), spreekt men van een ***kenmerk van deelbaarheid door middel van aftrekking.*** Het getal f' noemen we weer *den bijbehoorenden* ***herleidingsfactor.***

Het nu beschouwde kenmerk is blijkens het in n⁰. 760 opgemerkte ook op te vatten als een *kenmerk door optelling met negatieven herleidingsfactor.* Men heeft nl.:

$$b - f'c_0 = b + (-f')c_0.$$

Zoo beschouwd zijn dus beide kenmerken slechts verschillend in den aard van den bijbehoorenden herleidingsfactor, maar overigens geheel dezelfde. In n⁰. 766 en 767 zal in nog een ander opzicht verband tusschen beide kenmerken blijken te bestaan.

762. *Door herhaalde toepassing van het kenmerk van n⁰. 760 kan men het op zijn deelbaarheid te onderzoeken getal voortdurend verkleinen totdat een getal verkregen is, dat kleiner dan* $f'g(g-1)$ *is.*

Om dit aan te toonen vragen we naar *het grootste getal, waarop het kenmerk van n⁰. 760 niet van toepassing is,* tenminste zoo men verlangt, dat de getallen niet negatief worden. Nu is het kenmerk in dien zin op het getal a niet van toepassing als

$$b \leqq f'c_0 - 1$$

is. Men heeft dan:

$$a = bg + c_0 \leqq (f'c_0 - 1)g + c_0,$$

of wegens $c_0 \leqq g - 1$:

$$a \leqq f'g(g-1) - 1.$$

Het grootste getal, waarop het kenmerk niet van toepassing is, is dus $f'g(g-1) - 1$, dus kleiner dan $f'g(g-1)$.

Wanneer men echter ook toelaat, dat het te onderzoeken getal negatief wordt (hetgeen zonder bezwaar kan geschieden), *kan het getal nog verder verkleind en beneden* $f'(g-1)$ *gebracht worden;* immers bij de verschillende aftrekkingen is de aftrekker hoogstens $f'(g-1)$.

763. Past men het kenmerk van n⁰. 760 toe op het geval, dat $f' = 1$ is (dus op het geval, dat n een deeler is van $g+1$), dan heeft men telkens het laatste cijfer van het te onderzoeken getal van het door de overige cijfers gevormde getal af te trekken. Men krijgt zoo een gewijzigden vorm van het kenmerk van n⁰. 722. Het kenmerk van n⁰. 722 in zijn oorspronkelijken vorm verdient echter weer de voorkeur.

764. Toepasbaarheid der kenmerken van n⁰. 753 en 760 voor iederen met *g* onderling ondeelbaren deeler. We toonen aan:

Voor ieder getal n, dat met het grondtal g onderling ondeelbaar is, kan een herleidingsfactor gevonden worden, dus een getal f, waarvoor $fg - 1$ *door n deelbaar is.*

Immers om f te bepalen heeft men f en x uit de onbepaalde vergelijking:

$$fg - 1 = nx \qquad (503)$$

op te lossen. Daar de coëfficiënten der onbekenden (dus de getallen g en $-n$) onderling ondeelbaar zijn, is de vergelijking (503) in het bezit van oplossingen (zie de eigenschap van n⁰. 656). Blijkens het aan het eind van n⁰. 648 opgemerkte *zijn de waarden, die men voor f vindt, met n en de waarden, die men voor x vindt, met g onderling ondeelbaar*, zooals ook onmiddellijk aan de vergelijking (503) te zien is.

765. Is $f = f_1$ (waarin f_1 een bekend getal is) een oplossing van (503) (met bijbehoorende waarde van x), dan zijn de overige waarden van f, waarvoor aan (503) kan worden voldaan, van den vorm $f_1 + jn$, waarin men voor j ieder geheel getal (positief of negatief) nemen kan (zie de eigenschappen van n⁰. 648 en 649). Hieruit blijkt, *dat men het getal f, waarvoor $fg - 1$ door n deelbaar is, met een willekeurig (positief of negatief) veelvoud van n mag vermeerderen* en verder, *dat men zoo alle getallen f vindt, die aan de vraag voldoen.* Het eerste is natuurlijk ook onmiddellijk in te zien, daar vermeerdering van f met een n-voud ook $fg - 1$ met een n-voud doet vermeerderen, hetgeen op het deelbaar zijn door n van geen invloed is.

766. Daar men j zoo kan kiezen, dat $f_1 + jn$ positief en ook zoo, dat $f_1 + jn$ negatief is, blijkt uit het voorgaande, *dat voor ieder met het grondtal g onderling ondeelbaar getal n zoowel het kenmerk van n⁰. 753 als dat van n⁰. 760 is toe te passen.* Wil men het kenmerk van n⁰. 753 toepassen, dan moet men een *positieve oplossing f* der vergelijking (503) gebruiken. *Deze kan natuurlijk altijd $< n$ genomen worden*, daar dit anders door vermindering met een veelvoud van n te bereiken is. *Evenzoo kan men de negatieve oplossing f*, die dient om het kenmerk van n⁰. 760 toe te passen, *steeds $> -n$ (dus in absolute waarde $< n$) aannemen.* Hierdoor krijgen deze kenmerken hun eenvoudigsten vorm.

767. Is $f = f_1$ de kleinste positieve oplossing der vergelijking (503), dan is $f = f_1 - n = -(n - f_1)$ een negatieve oplossing,

en wel de absoluut kleinste negatieve oplossing, Men kan nu het kenmerk van n⁰. 753 toepassen voor $f = f_1$ en dat van n⁰. 760 voor $f' = n - f_1$.

Of men het eerste dan wel het tweede kenmerk kiest hangt daarvan af *of vermenigvuldiging met* f_1 *dan wel met* $f'_1 = n - f_1$ *het snelst wordt uitgevoerd.* In den regel zal men het kleinste der getallen f_1 en f'_1 kiezen.

Evenwel geldt dit niet zonder uitzondering. Zoo is wel in het tientallig stelsel vermenigvuldiging met 12 te verkiezen boven vermenigvuldiging met 19, maar een vermenigvuldiging met 20 gemakkelijker uit te voeren dan een met 17 en een vermenigvuldiging met 55 gemakkelijker dan een met 46.

768. De factoren f_1 en f'_1 van n⁰. 767 kunnen, behoudens een zeer bijzonder geval, niet gelijk zijn. Immers $f_1 = f'_1$ zou beteekenen $n = 2f_1$, dus deelbaarheid van $f_1 g - 1$ door $2f_1$. Dit kan alleen *als* $f_1 = 1$, *dus* $n = 2$, *en* g *oneven is*, in welk geval zoowel $g - 1$ als $g + 1$ door n deelbaar is.

Men heeft dan echter geen behoefte aan een deelbaarheidskenmerk van de beschouwde soort, daar het kenmerk van n⁰. 704 dan van toepassing is. Laatstgenoemd kenmerk gaat voor dit geval over in:

In een talstelsel met een oneven grondtal is een getal dan en alleen dan even als het een even aantal oneven cijfers bevat.

769. Nadere beschouwing der kenmerken van n⁰. 753 en 760. Het eerste lid der vergelijking (503) van n⁰. 764 heeft hetzelfde teeken als f en het tweede lid hetzelfde teeken als x. Hieruit blijkt, *dat waarden van* f *en* x, *die aan* (503) *voldoen, hetzelfde teeken hebben.*

Vervangt men f door een ander getal, dat hetzelfde teeken heeft, maar een grootere absolute waarde, dan wordt het eerste lid van (503) absoluut grooter. Evenzoo wordt het tweede lid van (503) absoluut grooter als men x door een absoluut grooter getal vervangt. Hieruit volgt:

Bij de kleinste positieve oplossing f *der vergelijking* (503) *behoort de kleinste positieve oplossing* x *en bij de absoluut kleinste negatieve waarde van* f *de absoluut kleinste negatieve waarde van* x.

770. Is evenals in n⁰. 767 f_1 de kleinste positieve oplossing f van (503) en x_1 de bijbehoorende waarde van x, dan is de algemeene oplossing van (503) (zie n⁰. 648—650):

$$f = f_1 + jn, \; x = x_1 + jg, \tag{504}$$

waarin j willekeurig kan worden aangenomen. Daar (volgens de eigenschap van n⁰. 769) x_1 de kleinste positieve oplossing van (503) is, is voldaan aan:

$$0 < f_1 < n, \; 0 < x_1 < g.$$

Blijkens (504) is hierdoor de oplossing $f = f_1$, $x = x_1$ van (503) volledig gekenmerkt, d. w. z. *er is slechts één positieve oplossing f, die aan $0 < f < n$, en één positieve oplossing x, die aan $0 < x < g$ voldoet.*

Evenzoo is de absoluut kleinste negatieve oplossing f of x de eenige negatieve oplossing, die absoluut kleiner dan n resp. g is. Zijn die waarden van f en x absoluut genomen resp. f'_1 en x'_1, dan is:

$$f'_1 = n - f_1, \; x'_1 = g - x_1.$$

771. Wanneer we voor een gegeven deeler n (onderling ondeelbaar met g) het kenmerk van n⁰. 753 zoo eenvoudig mogelijk willen doen zijn, kiezen we den herleidingsfactor f positief en zoo klein mogelijk. *Het bijbehoorende getal x* voldoet dan (blijkens het in n⁰. 770 gevondene) aan

$$1 \leqq x \leqq g - 1 \tag{505}$$

en *bestaat dus uit één cijfer.*

Uit (505) volgt nu in verband met (503):

$$fg - 1 \leqq n(g - 1),$$

waaruit verder in verband met de eigenschap van n⁰. 755 volgt:

Door herhaalde toepassing van het kenmerk van n⁰. 753, zoo men dit zijn eenvoudigsten vorm geeft (d. w. z. den herleidingsfactor zoo klein mogelijk kiest), kan men het op zijn deelbaarheid door n te onderzoeken getal verkleinen tot een getal, dat kleiner is dan ng en dat dus bij deeling door n een (volledig of partiëel) quotiënt van één cijfer levert.

772. In geval de deelbaarheid bestaat is het in de eigenschap van n⁰. 771 genoemde quotiënt q van één cijfer af te leiden uit het laatste cijfer e van het getal a', waartoe het oorspronkelijk beschouwde getal a door de opvolgende herleidingen terugge-

bracht is. Is nl. d het laatste cijfer van n, dan is het laatste cijfer van qn hetzelfde als dat van qd, zoodat q gevonden wordt uit de onbepaalde vergelijking

$$qd = e + gz, \tag{506}$$

waarin (wegens de onderlinge ondeelbaarheid van n en g) de coëfficiënten d en g der onbekenden onderling ondeelbaar zijn. Door de vergelijking (506), in verband met $0 < q < g$, is q volledig bepaald.

Daar q het cijfer is, waarvoor het product qd op het cijfer e eindigt (of het cijfer e is), kan q uit de tafel van vermenigvuldiging worden afgelezen. Om te onderzoeken of a al dan niet door n deelbaar is, heeft men nu nog slechts na te gaan of voor het zoo bepaalde cijfer q het product qn gelijk is aan a'.

773. Kiest men bij het kenmerk van n⁰. 760 den herleidingsfactor f' zoo klein mogelijk, dan is (weer blijkens het in n⁰. 770 gevondene):

$$f'g + 1 \leqq n(g - 1),$$

hetgeen uitdrukt, *dat het getal x', waarvoor aan*

$$f'g + 1 = nx'$$

voldaan is, uit één cijfer bestaat. Hieruit volgt in verband met de eigenschap van n⁰. 762:

Door herhaalde toepassing van den eenvoudigsten vorm van het kenmerk van n⁰. 760 kan men, zonder dat de aftrekkingen tot negatieve getallen voeren, het te onderzoeken getal verkleinen tot een getal, dat kleiner is dan ng^2 en dat dus bij deeling door n een (volledig of partiëel) quotiënt van hoogstens twee cijfers geeft.

Blijkens het aan het eind van n⁰. 762 opgemerkte *kan men, door ook negatieve getallen toe te laten, de herleiding voortzetten tot een getal, dat een quotiënt van slechts één cijfer levert.*

774. Bepaling van den herleidingsfactor uit de tafel van vermenigvuldiging. Blijkens het in n⁰. 771 en 773 gevondene *kunnen de kleinste reductiefactoren f en f', die bij de kenmerken van n⁰. 753 resp. 760 behooren, gevonden worden door n met*

een zoodanig (*met g onderling ondeelbaar*) *cijfer y* [1]) *te vermenigvuldigen*, dat het product na vermeerdering resp. vermindering met 1 door g deelbaar is, dus *dat het product op het cijfer* $g - 1$ *resp. 1 eindigt.*

In het eerste geval wordt de factor f gevonden *door het laatste cijfer van het zoo verkregen product yn te schrappen en het overblijvende getal met 1 te vermeerderen*, in het tweede geval de factor f' *door van yn het laatste cijfer te schrappen.*

775. Daar weer het laatste cijfer van het product yn slechts van het laatste en niet van de overige cijfers van n afhangt, *heeft men ter bepaling van het cijfer y slechts het laatste cijfer d van n te kennen.* Het cijfer y moet dus zoo bepaald worden, dat het product yd op het cijfer $g - 1$ of 1 eindigt. Uit onze algemeene beschouwingen vloeit voort, *dat er één en slechts één zulk een cijfer y te vinden is;* dit cijfer kan uit de tafel van vermenigvuldiging worden afgelezen.

776. Toepassing op het tientallig stelsel. In het tientallig stelsel *is het laatste cijfer d van den deeler n een der getallen 1, 3, 7, 9,* daar n en 10 onderling ondeelbaar ondersteld zijn. *Is n' het getal, dat uit n ontstaat door het laatste cijfer te schrappen*, dus $n = 10n' + d$, dan heeft men:

$$\text{voor } d = 1: \begin{cases} 9 \,.\, n = 9(10n' + 1) = 10(9n' + 1) - 1, \\ 1 \,.\, n = 10n' + 1, \end{cases}$$

$$\text{voor } d = 3: \begin{cases} 3 \,.\, n = 3(10n' + 3) = 10(3n' + 1) - 1, \\ 7 \,.\, n = 7(10n' + 3) = 10(7n' + 2) + 1, \end{cases}$$

$$\text{voor } d = 7: \begin{cases} 7 \,.\, n = 7(10n' + 7) = 10(7n' + 5) - 1, \\ 3 \,.\, n = 3(10n' + 7) = 10(3n' + 2) + 1, \end{cases}$$

$$\text{voor } d = 9: \begin{cases} 1 \,.\, n = 10n' + 9 = 10(\ n' + 1) - 1, \\ 9 \,.\, n = 9(10n' + 9) = 10(9n' + 8) + 1. \end{cases}$$

Hieruit ziet men, *dat inderdaad ieder met 10 onderling ondeelbaar getal zoowel een veelvoud van den vorm* $10f - 1$ *als een veelvoud van den vorm* $10f' + 1$ *heeft.* Dit kan uit de tafel van

---

[1]) Dit is het cijfer x of x' van n⁰. 771 resp. 773 al naar gelang we den reductiefactor voor het kenmerk door optelling dan wel dien voor het kenmerk door aftrekking willen bepalen.

vermenigvuldiging worden afgelezen zonder dat men zich dan verder op de theorie der onbepaalde vergelijkingen te beroepen heeft. Deze theorie doet echter zien, dat het resultaat ook voor ieder ander talstelsel geldig is.

777. Uit het in n⁰. 776 gevondene vloeien onmiddellijk de kleinste herleidingsfactoren f en f' voort, die bij de kenmerken van n⁰. 753 resp. 760 behooren. Deze zijn in het volgende tabelletje vereenigd.

Herleidingsfactoren voor den deeler $n = 10n' + d$.

d	f	f'
1	$9n' + 1$	n'
3	$3n' + 1$	$7n' + 2$
7	$7n' + 5$	$3n' + 2$
9	$n' + 1$	$9n' + 8$

Hieruit is voor iederen met 10 onderling ondeelbaren deeler onmiddellijk het bijbehoorende kenmerk van n⁰. 753 en 760 af te lezen.

778. We laten hier enkele voorbeelden van zulke deelbaarheidskenmerken volgen. De bijbehoorende factoren zijn ook zonder de beschouwingen van n⁰. 776 en 777 (lettend op het in n⁰. 774 opgemerkte) gemakkelijk uit het hoofd neer te schrijven.

Een getal a is dan en alleen dan door 7 deelbaar als dit het geval is met het getal, dat ontstaat door het laatste cijfer van a te schrappen en het overblijvende getal met 5 × dit laatste cijfer te vermeerderen of met 2 × dit laatste cijfer te verminderen.

Een getal a is dan en alleen dan door 13 deelbaar als dit het geval is met het getal, dat ontstaat door het laatste cijfer van a te schrappen en het overblijvende getal met 4 × dit laatste cijfer te vermeerderen of met 9 × dit laatste cijfer te verminderen.

Een getal a is dan en alleen dan door 17 deelbaar als dit het geval is met het getal, dat ontstaat door het laatste cijfer van a te schrappen en het overblijvende getal met 12 × dit laatste

cijfer te vermeerderen of met 5 × dit laatste cijfer te verminderen.

Een getal a is dan en alleen dan door 19 deelbaar als dit het geval is met het getal, dat ontstaat door het laatste cijfer van a te schrappen en het overblijvende getal met 2 × dit laatste cijfer te vermeerderen of met 17 × dit laatste cijfer te verminderen.

Bij het onderzoek der deelbaarheid door 19 zal men natuurlijk bij voorkeur het kenmerk door optelling toepassen.

We laten het aan den lezer over de overeenkomstige kenmerken voor de deelers 23, 27, 31, enz. te formuleeren.

779. Voorbeelden ter toelichting. Bij de herhaalde toepassing van eigenschappen als de in n⁰. 778 genoemde kan men natuurlijk bij een zelfde onderzoek naar deelbaarheid nu eens van het kenmerk door optelling en dan weer van dat door aftrekking gebruik maken. Wanneer men de keus zoo kan doen, dat het ontstaande getal op een nul eindigt, is deze de aangewezene, daar men dan direct het getal verder verkleinen kan door die nul weg te laten. We laten hier een paar voorbeelden volgen, waarbij enkele malen zulk een toevallige vereenvoudiging optreedt:

6606591096 deelbaar door 7;
12 —
097 [1]
18 —
72
4 —
3
15
80 +
16 —
44
8 —
56 = 8 . 7

8572922436 deelbaar door 13.
54 —
189
81 —
137
63 —
850
45 —
683
12
80 +
72 —
13

[1]) Voor de verdere berekening is het cijfer 7 door 0 vervangen, hetgeen op de deelbaarheid door 7 van geen invloed is en een snellere verkleining van het getal tengevolge heeft.

780. Voorbeelden van onderzoek naar deelbaarheid door grootere getallen zijn:

6039478424139 deelbaar door 67 $(= \frac{201}{3})$;

$$\begin{array}{rl} 180 & - \\ \hline 233 & \\ 60 & - \\ \hline 163 & \\ 60 & - \\ \hline 356 & \\ 120 & - \\ \hline 715 & \\ 100 & - \\ \hline 671 & \\ 20 & - \\ \hline 47 & \\ 140 & - \\ \hline 804 & \\ 80 & - \\ \hline 300 & \\ 60 & - \\ \hline 0 & \end{array}$$

84361251 niet deelbaar door 73 $(= \frac{219}{3})$.

$$\begin{array}{rl} 22 & \\ \hline 47 & + \\ 154 & \\ \hline 768 & + \\ 176 & \\ \hline 552 & + \\ 44 & \\ \hline 99 & + \\ 198 & \\ \hline 1047 & + \\ 154 & \\ \hline 258 & + \end{array}$$

781. Quotiënt van een opgaande deeling bij de kenmerken door optelling of aftrekking. Past men een deelbaarheidskenmerk door middel van optelling of aftrekking toe, dan doet de bewerking tevens het *quotiënt* vinden *in geval de deelbaarheid blijkt te bestaan* [1]).

Zij n een deeler van $fg - 1$, zoodat voor een zekere waarde van x aan (503) voldaan is. Voor de gelijkheid (501) van n⁰. 753 kan dan, zoo men $b + fc_0 = a_1$ stelt, geschreven worden:

$$a = a_1 g - c_0 x n,$$

---

[1]) Voor de bepaling van de rest eener niet-opgaande deeling verwijzen we naar n⁰. 814—817, waar de restbepaling besproken wordt voor deelbaarheidskenmerken, waarvan de nu beschouwde bijzondere gevallen zijn.

zoodat voor het gezochte quotiënt wordt gevonden:

$$\frac{a}{n} = \frac{a_1}{n} g - c_0 x. \qquad (507)$$

Hiermede is de bepaling van het quotiënt $\frac{a}{n}$ *tot die van het quotiënt* $\frac{a_1}{n}$ *teruggebracht,* waarin a_1 voorstelt *het getal, dat uit* a *ontstaat door het laatste cijfer te schrappen en dit f-maal bij het overblijvende getal op te tellen.* Het quotiënt daarvan bij deeling door n wordt op dezelfde wijze tot een quotiënt met kleiner deeltal teruggebracht, enz.

782. Het spreekt van zelf, dat in het voorgaande de herleidingsfactor f ook negatief kan zijn, zoodat de beschouwingen van n°. 781 zoowel op kenmerken van deelbaarheid door optelling als op die door aftrekking betrekking hebben. Is f negatief dan is in (503) ook x negatief; voor die vergelijking schrijven we dan:

$$f'g + 1 = nx',$$

waarin $f' = -f$, $x' = -x$. De betrekking (507) gaat dan over in:

$$\frac{a}{n} = \frac{a_1}{n} g + c_0 x',$$

waarin $a_1 = b - f'c_0$.

783. De bepaling van het quotiënt neemt den eenvoudigsten vorm aan *als men bij de verschillende onderdeelen der bewerking steeds hetzelfde kenmerk gebruikt,* dus òf steeds dat door optelling, òf steeds dat door aftrekking. Zijn dan a_1, a_2, a_3, ..., a_j [1]) de getallen, waartoe het gegeven getal a achtereenvolgens herleid wordt, zoodat a_{i+1} op dezelfde wijze uit a_i wordt afgeleid als waarop a_1 uit a verkregen is (zie n°. 781). Is verder e_i het laatste cijfer van a_i, dan heeft men de volgende met (507) overeenkomende gelijkheden:

$$\frac{a_1}{n} = \frac{a_2}{n} g - e_1 x,$$

$$\frac{a_2}{n} = \frac{a_3}{n} g - e_2 x,$$

[1]) a_j is dus, als het kenmerk van n°. 753 wordt toegepast, het getal, dat we in n°. 772 a' genoemd hebben.

. . . .

$$\frac{a_{j-1}}{n} = \frac{a_j}{n} g - e_{j-1} x.$$

Hieruit volgt in verband met (507):

$$\frac{a}{n} = \frac{a_2}{n} g^2 - (e_1 g + c_0)x = \frac{a_3}{n} g^3 - (e_2 g^2 + e_1 g + c_0)x =$$

$$= \frac{a_4}{n} g^4 - (e_3 g^3 + e_2 g^2 + e_1 g + c_0)x = \ldots\ldots,$$

waardoor men ten slotte vindt:

$$\frac{a}{n} = \frac{a_j}{n} g^j - (e_{j-1} g^{j-1} + e_{j-2} g^{j-2} + \ldots + e_1 g + c_0)x =$$

$$= \frac{a_j}{n} g^j - x \,.\, e_{j-1} e_{j-2} \ldots . e_2 e_1 c_0; \qquad (508)$$

hierin stellen e_{j-1}, ..., e_1, c_0 de cijfers van het getal $e_{j-1} \ldots .$ $e_1 c_0$ voor.

Past men het kenmerk van n⁰. 760 toe, dan kan a_j ook negatief zijn (zie het aan het eind van n⁰. 762 opgemerkte). Blijkens het in n⁰. 771 en 773 gevondene kan men de herleiding zoo ver voortzetten, *dat de absolute waarde van het quotiënt $a_j : n$ uit slechts één cijfer bestaat.*

784. De quotiëntbepaling verloopt bij het kenmerk door aftrekking eenvoudiger dan bij dat door optelling doordat in het eerste geval x negatief en dus de tweede term van het tweede lid van (508) positief is. Die tweede term is, als men het deelbaarheidskenmerk zijn eenvoudigsten vorm geeft, een getal van j of $j+1$ cijfers, daar $-x = x'$ dan een getal van één cijfer is (zie n⁰. 773); daar de eerste term van het tweede lid van (508) een (positief of negatief) getal is, dat op j nullen eindigt, levert het vormen van de som dier termen nagenoeg geen rekenwerk. Is nl. $x \,.\, e_{j-1} e_{j-2} \ldots . e_1 c_0$ een getal van j cijfers, dan bestaat de optelling slechts in het voorplaatsen van het cijfer $a_j : n$ [1]); heeft het genoemde getal $j+1$ cijfers, dan bestaat de optelling daarin, dat het eerste cijfer met $a_j : n$ vermeerderd wordt, dus (daar a_j dan

[1]) Het getal a_j is dan positief, daar men anders een negatieve waarde voor het quotiënt $a : n$ zou vinden.

negatief kan zijn) vermeerderd of verminderd met een getal van één cijfer.

785. Voorbeelden ter toelichting. We laten hier in het tientallig stelsel enkele voorbeelden der besproken quotiëntbepaling volgen. Als eerste voorbeeld nemen we het in n⁰. 779 op zijn deelbaarheid door 13 onderzochte getal 8572922436, waarvan we zoowel volgens het kenmerk door optelling als volgens dat door aftrekking het quotiënt der deeling door 13 bepalen.

$$\begin{array}{r}
857292243\mathit{6} \\
\underline{24}\ + \\
6\mathit{7} \\
\underline{28}\ + \\
5\mathit{4} \\
\underline{16}\ + \\
4\mathit{1} \\
\underline{4}\ + \\
\mathit{8} \\
\underline{32}\ + \\
6\mathit{1} \\
\underline{4}\ + \\
\mathit{80} \\
\underline{32}\ + \\
11\mathit{7} \\
\underline{28}\ + \\
39 = 3\ .\ 13
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
857292243\mathit{6} \\
\underline{54}\ - \\
18\mathit{9} \\
\underline{81}\ - \\
13\mathit{7} \\
\underline{63}\ - \\
8\mathit{50} \\
\underline{45}\ - \\
68\mathit{3} \\
\underline{27}\ - \\
4\mathit{1} \\
\underline{9}\ - \\
4\mathit{5} \\
\underline{45}\ - \\
39 = 3\ .\ 13
\end{array}$$

De eerste manier (waarbij van $13 = \frac{39}{3}$ gebruik gemaakt wordt en dus $x = 3$ is) levert voor het quotiënt:

$$3\ .\ 10^9 - 3\ .\ 780181476 = 3\ .\ 10^9 - 2340544428 =$$
$$= \qquad 659455572.$$

De tweede manier (waarbij $x' = 7$ is) geeft de volgende iets eenvoudiger quotiëntbepaling:

$$3\ .\ 10^8\ ^{1)} + 7\ .\ 51350796 = 659455572.$$

---

[1]) Blijkens het in n⁰. 784 opgemerkte is het bepalen van den exponent voor het vormen van de som niet noodig, daar men direct ziet, dat het eerste cijfer van 359455572 met 3 vermeerderd moet worden.

We merken nog op, *dat de cijfers x en x', waarmede de door de vet gedrukte cijfers gevormde getallen vermenigvuldigd moeten worden, onmiddellijk uit het tabelletje van n⁰. 777 zijn af te lezen*, nl. als de coëfficiënt van n' in de tweede resp. derde kolom.

786. In de tweede plaats nemen we het getal uit het eerste voorbeeld van n⁰. 780, waarvan we het quotiënt der deeling door 67 bepalen. Uit de in n⁰. 780 voorkomende berekening leest men voor dat quotiënt af:

$$3 \,.\, 30047156339 = 90141469017.$$

Verder bepalen we nog het quotiënt van het getal 16810483952467 bij deeling door 389 ($= \frac{3501}{9}$), welke deeling opgaat.

```
16810483952467
      2450     —
      2796
     2100     —
     7179
    3150     —
    0567
   2450     —
   5606
  2100     —
  2460
 2100     —
 78924
 1400    —
 6492
 700    —
5949
3150   —
— 1556 = — 4 . 389
```

Voor het quotiënt wordt gevonden:

$$— 4 \,.\, 10^9 + 9 \,.\, 9246067967 =$$
$$= — 4 \,.\, 10^9\ ^{1)} + 83214611703 =$$
$$= 43214611703.$$

787. De bepaling van het quotiënt met behulp van een deelbaarheidskenmerk door optelling of aftrekking als de deelbaar-

---

[1]) De bepaling van den exponent is overbodig, daar men direct ziet, dat het eerste cijfer van den volgenden term met 4 verminderd moet worden (zie n⁰. 784).

heid blijkt te bestaan is van eenig belang voor het geval het er om te doen is een groot getal in priemfactoren te ontbinden. Het getal wordt dan op zijn deelbaarheid door de opvolgende priemgetallen onderzocht en eerst als men een priemgetal gevonden heeft, waardoor het beschouwde getal deelbaar is, moet het quotiënt worden bepaald, dat dan verder wordt onderzocht (waarbij natuurlijk de priemgetallen, die niet op het oorspronkelijke getal deelbaar bleken, buiten beschouwing kunnen blijven). Het werk aan de quotiëntbepaling verbonden moet dus beoordeeld worden aan hetgeen nog te doen is nadat de deelbaarheid met behulp van het kenmerk door optelling of aftrekking is vastgesteld. Dit werk nu is belangrijk minder dan het uitvoeren van den gewonen algorithmus der deeling.

Heeft men het quotiënt te vinden onverschillig of de deeling al dan niet opgaat, dan is gewone deeling natuurlijk de aangewezen weg.

---

788. Uitgebreide deelbaarheidskenmerken door optelling of aftrekking. De beschouwingen van n⁰. 753, 760, 761 en 764—770 blijven doorgaan als men g door g^k $(k > 0)$ vervangt en c_0 door het getal l gevormd door de k laatste cijfers van het te onderzoeken getal a. Onder b verstaan we dan het door de overige cijfers van a gevormde getal, zoodat

$$a = bg^k + l,$$

dus:

$$a + l(fg^k - 1) = (b + fl)g^k. \tag{509}$$

Hieruit leest men af:

Een getal a is dan en alleen dan door een op $fg^k - 1$ deelbaar getal n deelbaar als het getal, dat ontstaat door het door de k laatste cijfers van a gevormde getal na vermenigvuldiging met f bij het door de overige cijfers van a gevormde getal op te tellen, door n deelbaar is.

Voor het geval, dat f negatief is $(f = -f')$, volgt uit (509):

Een getal a is dan en alleen dan door een op $f'g^k + 1$ deel-

baar getal n deelbaar als dit het geval is met het getal, dat ontstaat door het door de k laatste cijfers van a gevormde getal na vermenigvuldiging met f′ van het door de overige cijfers van a gevormde getal af te trekken.

789. Bij de kenmerken van n⁰. 788 wordt het te onderzoeken getal a met een zoodanig n-voud vermeerderd of verminderd, nl. met $l(fg^k - 1)$ resp. $l(f'g^k + 1)$, dat een door g^k deelbaar (dus op k nullen eindigend) getal ontstaat. Het getal $b + fl$ resp. $b - f'l$, dat daaruit door deeling door g^k (weglating der k laatste cijfers nul) verkregen wordt, moet nu verder op zijn deelbaarheid door n onderzocht worden. We noemen deze kenmerken het ***uitgebreide deelbaarheidskenmerk door middel van optelling resp. aftrekking.***

Het getal f of f' noemen we weer den *bij het kenmerk behoorenden* ***herleidingsfactor.*** Het kenmerk door aftrekking is als een kenmerk door optelling met negatieven herleidingsfactor te beschouwen.

Verder noemen we k den *bij het kenmerk behoorenden* ***exponent.***

790. Bij toepassing van het eerste kenmerk van n⁰. 788 wordt het getal a niet verkleind als men heeft:

$$bg^k + l \leqq b + fl,$$

$$b(g^k - 1) \leqq l(f - 1),$$

waarvoor wegens $l \leqq g^k - 1$ kan geschreven worden:

$$b \leqq f - 1.$$

Hieruit volgt:

$$a \leqq bg^k + g^k - 1 \leqq (f - 1)g^k + g^k - 1 = fg^k - 1,$$

waaruit blijkt, *dat $fg^k - 1$ het grootste getal is, dat door toepassing van het eerste kenmerk van n⁰. 788 niet verkleind kan worden.*

Verder vindt men op geheel dezelfde wijze als in n⁰. 762, *dat $f'g^k(g^k - 1) - 1$ het grootste getal is, dat door toepassing van het tweede kenmerk van n⁰. 788 niet verder verkleind kan worden zonder dat een negatief getal ontstaat.*

791. De kenmerken van n⁰. 788 met herleidingsfactor 1. De kenmerken van n⁰. 788 gaan voor $f = 1$ en $f' = 1$ in een anderen vorm der kenmerken van n⁰. 715 en 720 over.

De nieuwe vorm van het kenmerk van n⁰. 715 is iets minder eenvoudig dan de oorspronkelijke, zooals de volgende voorbeelden, die het tweede en derde voorbeeld van n⁰. 719 in den nieuwen vorm zijn, doen zien:

```
  1841786 deelbaar door 37.
    786
   2627  +
  627
  629  + = 3 . 37
```

```
 5490617855874 deelbaar door 271.
     55874
     62052  +
  62052
  62601  + = 231 . 271.
```

De herleidingen voeren tot dezelfde getallen (nl. 629 en 62601) als de herleidingen van n⁰. 719. Dat dit het geval moet zijn, is onmiddellijk van te voren in te zien, daar beide methoden daarop neerkomen, *dat men de rest van het oorspronkelijke getal bij deeling door* $10^3 - 1$ *resp.* $10^5 - 1$ *berekent.*

792. De voorbeelden van n⁰. 721 luiden in den nieuwen vorm:

```
468999790987 deelbaar door 7 en door 13.
       987  —
      8803
    803  —
    195
 195  —
 273 = 3 . 7 . 13
```

```
7313543560279 deelbaar door 101.
          79  —
         523
        23  —
        32
       32  —
       11
      11  —
      24
     24  —
     07
    7  —
    0
```

793. Voorbeelden der kenmerken van n⁰. 788. We laten hier in het tientallig stelsel eenige voorbeelden van de uitgebreide deelbaarheidskenmerken door optelling of aftrekking volgen.

Het getal $299 = 3 . 10^2 - 1$ is deelbaar door 23. Het eerste

kenmerk van n⁰. 788 geeft dus de volgende berekening om te constateeren, dat 53552087931462 door 23 deelbaar is.

Een toevallige vereenvoudiging krijgt men hier, doordat bij de eerste optelling aan het eind twee nullen ontstaan, die direct weggelaten kunnen worden.

$$
\begin{array}{r}
53552087931462 \\
\underline{186}\ + \\
9500 \\
\underline{285}\ + \\
372 \\
\underline{216}\ + \\
739 \\
\underline{117}\ + \\
474 \\
\underline{222}\ + \\
276 = 12\ .\ 23
\end{array}
$$

Als tweede voorbeeld nemen we, dat $299999 = 3\ .\ 10^5 - 1$ deelbaar is door 17, waardoor men de volgende berekening verkrijgt om aan te toonen, dat 1085902178345694054236 door 17 deelbaar is:

$$
\begin{array}{r}
1085902178345694054236 \\
\underline{162708}\ + \\
619648 \\
\underline{58944}\ + \\
276780 \\
\underline{83034}\ + \\
191624 = 11272\ .\ 17.
\end{array}
$$

794. Daar $2001 = 2\ .\ 10^3 + 1$ deelbaar is door 23 kan het eerste voorbeeld van n⁰. 793 ook met behulp van het tweede kenmerk van n⁰. 788 behandeld worden (waarbij $k = 3$ en $f' = 2$ te nemen is). De berekening is dan aldus:

$$
\begin{array}{r}
53552087931462 \\
\underline{924}\ - \\
007 \\
\underline{014}\ - \\
073 \\
\underline{146}\ - \\
406 \\
\underline{812}\ - \\
-759 = -33\ .\ 23.
\end{array}
$$

Evenzoo kan men het tweede voorbeeld van n°. 793 met behulp van het tweede kenmerk van n°. 788 behandelen door op te merken, dat 40001 door 17 deelbaar is; we laten dit aan den lezer over.

795. Toepasbaarheid der kenmerken van n°. 788 voor iederen exponent. De eigenschap van n°. 764 kan aldus worden uitgebreid:

Voor ieder getal n, dat met het grondtal g onderling ondeelbaar is, en voor iederen exponent k kan een herleidingsfactor gevonden worden, dus een getal f, waarvoor $fg^k - 1$ *door n deelbaar is.*

Dit getal f wordt gevonden door oplossing van de onbepaalde vergelijking

$$fg^k - nx = 1, \qquad (510)$$

waarvan de coëfficiënten der onbekenden onderling ondeelbaar zijn.

796. Daar de vergelijking (510) zoowel positieve als negatieve oplossingen f heeft, *is voor iederen met het grondtal g onderling ondeelbaren deeler en voor iedere waarde van den exponent k zoowel het eerste als het tweede kenmerk van n°. 788 toe te passen.* Men geeft dien kenmerken hun eenvoudigsten vorm door f in absolute waarde kleiner dan n te nemen. Is weer f_1 de kleinste positieve en $-f'_1$ de absoluut kleinste negatieve oplossing, waarbij $f'_1 = n - f_1$ is, dan neemt men f_1 bij het eerste en f'_1 bij het tweede kenmerk van n°. 788 als herleidingsfactor. Is $k > 1$, dan heeft het kenmerk alleen dan practische bruikbaarheid als de herleidingsfactor een klein getal is, liefst een getal van één cijfer, of b.v. 10 of 11, daar dan de vermenigvuldiging met dien factor uit het hoofd kan worden uitgevoerd.

797. Combineering der beide kenmerken van n°. 788. De kenmerken van n°. 788 hebben (blijkens het in n°. 796 gevondene) boven die van n°. 715 en 720 het groote voordeel, *dat men daarbij niet aan een bepaalde waarde van k gebonden is en men dus den exponent k doelmatig kan kiezen in verband met het aantal cijfers van het getal a, welks deelbaarheid moet worden onderzocht.* Hoe grooter dit aantal cijfers is des te grooter zal men ook k nemen.

Het is dus voordeelig *het getal k in den loop der berekening door een kleiner getal te vervangen* als het aantal overblijvende cijfers te klein geworden is voor het aanvankelijk gekozen getal k.

798. Als regel kan men geven, *dat het doelmatig is bij ieder onderdeel der berekening het getal k zoo te nemen, dat 2k weinig van het aantal nog overgebleven cijfers verschilt*, iets dat de lezer gemakkelijk zal inzien. Op de keus van k zal echter de waarde van den bijbehoorenden herleidingsfactor f of f' ook nog van invloed zijn, daar men voor dien factor een klein getal wenscht.

Verder kan men bij de opvolgende verkleiningen van het aantal cijfers nu eens het eerste en dan weer het tweede kenmerk van n⁰. 788 toepassen. De keus hangt daarbij van de waarde der herleidingsfactoren f en f' af (verg. n⁰. 767).

799. Tafel voor de toepassing der uitgebreide kenmerken door optelling en aftrekking. Om de kenmerken van n⁰. 788 het doelmatigst te kunnen toepassen en combineeren, ook voor grootere waarden van k, moet men beschikken over een *tafel, die voor verschillende waarden van k en verschillende* (*met g onderling ondeelbare*) *deelers n de bijbehoorende factoren f en f' aangeeft.*

Dit wordt een tafel met dubbelen ingang. De kolommen behooren bij een zelfde waarde van k, de rijen bij een zelfde waarde van n. In het gemeenschappelijke vak van zulk een kolom en rij zijn de bijbehoorende factoren f en f' opgenomen.

In de tafel worden de getallen f' als negatieve getallen f geschreven. Voor ieder getal f' staat dus het teeken —, terwijl (overeenkomstig het in n⁰. 569 opgemerkte) voor ieder getal f het teeken + geplaatst kan worden. De teekens + en — geven dan tevens aan, *dat na vermenigvuldiging met f eèn optelling en na vermenigvuldiging met f' een aftrekking moet worden uitgevoerd.*

800. Voor het tientallig stelsel laten we hier zulk een tafel volgen voor de waarden 1, 2, 3, ..., 10 van k en voor de deelers n, die kleiner zijn dan 100 en onderling ondeelbaar met

10; de waarden 3, 9 en 11 van n zijn weggelaten, daar de in n°. 704 en 722 genoemde kenmerken van deelbaarheid door die getallen aan eenvoudigheid niets meer te wenschen overlaten.

Inzonderheid is de tafel van belang voor getallen n, die een *macht van een priemgetal* zijn (zie n°. 703), waarom deze getallen vet gedrukt zijn. De getallen f en f' zijn niet steeds beide in de tafel opgenomen; is b.v. vermenigvuldiging met f zeer beslist minder eenvoudig dan vermenigvuldiging met f', dan is alleen het getal f' opgenomen.

Tafel voor kenmerken van deelbaarheid voor deelers beneden 100.

n \ k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7	+ 5 — 2	+ 4 — 3	— 1	+ 2 — 5	+ 3 — 4	+ 1	+ 5 — 2	+ 4 — 3	— 1	+ 2 — 5
13	+ 4 — 9	+ 3 — 10	— 1	— 4	+ 10 — 3	+ 1	+ 4	+ 3 — 10	— 1	— 4
17	— 5	+ 8 — 9	+ 11 — 6	— 4	+ 3	+ 2	+ 7 — 10	— 1	+ 5	+ 9 — 8
19	+ 2	+ 4	+ 8 — 11	— 3	— 6	+ 7	— 5	+ 9 — 10	— 1	— 2
21	— 2	+ 4	— 8	— 5	+ 10	+ 1	— 2	+ 4	— 8	— 5
23	+ 7	+ 3 — 20	— 2	+ 9	— 6	+ 4	+ 5	— 11	— 8	— 10
27	— 8	+ 10	+ 1	— 8	+ 10	+ 1	— 8	+ 10	+ 1	— 8
29	+ 3	+ 9 — 20	— 2	— 6	+ 11	+ 4	+ 12	+ 7	— 8	+ 5
31	— 3	+ 9	+ 4	— 12	+ 5	+ 16 — 15	+ 14	+ 20 — 11	+ 2	+ 25 — 6
33	+ 10	+ 1	+ 10	+ 1	+ 10	+ 1	+ 10	+ 1	+ 10	+ 1
37	— 11	+ 10	+ 1	— 11	+ 10	+ 1	— 11	+ 10	+ 1	— 11

n \ k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
39	+ 4	+ 16	+ 25 − 14	+ 22 − 17	+ 10	+ 1	+ 4	+ 16	+ 25 − 14	+ 22 − 17
41	− 4	+ 16 − 25	+ 18	+ 10	+ 1	− 4	+ 16 − 25	+ 18	+ 10	+ 1
43	+ 13 − 30	− 3	+ 4	+ 9	− 12	+ 16	− 7	− 5	+ 21 − 22	+ 15
47	− 14	+ 8	− 18	+ 17 − 30	− 3	− 5	+ 23 − 24	+ 7 − 40	− 4	+ 9
49	+ 5	+ 25 − 24	+ 27 − 22	− 12	− 11	− 6	+ 19 − 30	− 3	− 15	+ 23
51	− 5	+ 25	+ 28 − 23	+ 13	− 14	+ 19 − 32	+ 7	+ 16	+ 22	− 8
53	+ 16	− 9	+ 15	− 25	+ 24	+ 13 − 40	− 4	− 11	− 17	− 7
57	+ 40 − 17	+ 4	− 11	+ 16	+ 13	+ 7	− 5	+ 28 − 29	− 20	− 2
59	+ 6	− 23	− 20	− 2	− 12	− 13	+ 40 − 19	+ 4	+ 24	+ 26 − 33
61	− 6	− 25	+ 28 − 33	+ 15	+ 32 − 29	− 9	− 7	− 19	− 8	− 13
63	+ 19	− 17	− 8	− 26	+ 10	+ 1	+ 19	− 17	− 8	− 26
67	− 20	− 2	+ 40 − 27	+ 4	− 13	− 8	+ 26	+ 16	+ 15	+ 35 − 32
69	+ 7	− 20	− 2	− 14	+ 40 − 29	+ 4	+ 28	− 11	− 8	+ 13
71	− 7	− 22	+ 12	− 13	+ 20	+ 2	− 14	+ 27	+ 24	− 26
73	+ 22	− 27	− 10	− 1	− 22	+ 27	+ 10	+ 1	+ 22	− 27
77	− 23	− 10	− 1	+ 23	+ 10	+ 1	− 23	− 10	− 1	+ 23
79	+ 8	− 15	+ 38 − 41	− 12	− 17	+ 22	+ 18	− 14	− 33	− 27

n \ k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
81	— 8	— 17	+ 55 — 26	— 35	+ 37 — 44	+ 28	+ 19	+ 10	+ 1	— 8
83	+ 25	+ 44 — 39	+ 21	+ 27	+ 11	+ 26	— 14	— 18	— 35	+ 38 — 45
87	— 26	— 20	— 2	— 35	+ 40	+ 4	— 17	+ 7	— 8	+ 34
89	+ 9	— 8	+ 17	— 25	+ 42 — 47	+ 22	+ 20	+ 2	+ 18	— 16
91	— 9	— 10	— 1	+ 9	+ 10	+ 1	— 9	— 10	— 1	+ 9
93	+ 28	+ 40	+ 4	+ 19	— 26	+ 16	— 17	— 11	— 29	+ 25
97	— 29	— 32	+ 55 — 42	+ 54 — 43	— 14	+ 18	+ 60 — 37	+ 6	+ 20	+ 2
99	+ 10	+ 1	+ 10	+ 1	+ 10	+ 1	+ 10	+ 1	+ 10	+ 1

801. Berekening der tafel van n⁰. 800. Om de beteekenis en de wijze van vervaardiging der tafel van n⁰. 800 nader toe te lichten nemen we als voorbeeld $n = 23$. De daarbij behoorende rij wijst aan, dat de getallen
$7 . 10 - 1$, $3 . 10^2 - 1$, $2 . 10^3 + 1$, $9 . 10^4 - 1$, $6 . 10^5 + 1$, $4 . 10^6 - 1$, $5 . 10^7 - 1$, $11 . 10^8 + 1$, $8 . 10^9 + 1$, $10 . 10^{10} + 1$
alle door 23 deelbaar zijn.

De getallen 7, 3, — 2, 9, — 6, 4, 5, — 11, — 8, — 10 kunnen door het oplossen der onbepaalde vergelijking

$$f . 10^k - 23x = 1$$

voor $k = 1, 2, 3, \ldots, 10$ verkregen worden.

802. Eenvoudiger is het echter meer probeerenderwijs te werk te gaan. Voor $n = 23$ vindt men het getal uit de kolom $k = 1$ door een veelvoud van 23 te zoeken, waarvan het laatste cijfer 1 of 9 is; men komt dan tot $3 . 23 = 69 = 7 . 10 - 1$ (verg. n⁰. 776 en 777). Om nu daaruit een getal $f . 10^2 - 1$ of $f' . 10^2 + 1$ af te leiden, dat door 23 deelbaar is, bepalen we een veelvoud

van 23, dat op 3 of 7 eindigt. Zulk een veelvoud is 23, hetgeen tot het door 23 deelbare getal

$$(7 . 10 - 1) + 23 . 10 = 3 . 10^2 - 1$$

voert. Daaruit vindt men weer het door 23 deelbare getal

$$23 . 10^2 - (3 . 10^2 - 1) = 2 . 10^3 + 1.$$

Om daaruit een door 23 deelbaar getal $f . 10^4 + 1$ of $f' . 10^4 - 1$ af te leiden zoeken we een veelvoud van 23, dat op 2 of 8 eindigt. Zulk een veelvoud is $4 . 23 = 92$, zoodat het getal

$$92 . 10^3 - (2 . 10^3 + 1) = 9 . 10^4 - 1$$

door 23 deelbaar is. Men zoekt vervolgens een veelvoud van 23, dat op 1 of 9 eindigt, enz.

Op de in n°. 803—808 aangegeven wijze kan de berekening echter nog verder vereenvoudigd worden.

803. Eenvoudiger berekening der herleidingsfactoren. We onderstellen verder het grondtal g van het talstelsel willekeurig en nemen aan, dat f zoo bepaald is, dat $fg - 1$ door n deelbaar is (zie het tabelletje van n°. 777), dus dat f de bij $k = 1$ behoorende herleidingsfactor is.

Wegens de deelbaarheid van $(fg)^k - 1$, of $f^k g^k - 1$, door $fg - 1$ is dan ook $f^k g^k - 1$ door n deelbaar. Hieruit blijkt, *dat f^k de bij een willekeurigen exponent k behoorende herleidingsfactor is als f den bij $k = 1$ behoorenden herleidingsfactor voorstelt.* De gevonden factor f^k kan nu natuurlijk verder nog in absolute waarde worden verkleind door vermeerdering met een (positief of negatief) veelvoud van n (zie n°. 765).

804. Het in n°. 803 gevondene kan ook zoo worden uitgedrukt, *dat de bij $k = 2, 3, 4$, enz. behoorende herleidingsfactoren resp. de resten zijn van f^2, f^3, f^4, enz. bij deeling door n als f de bij $k = 1$ behoorende herleidingsfactor is.* Die factoren kunnen dus op de in n°. 744—746 besproken wijze berekend worden; slechts is er dit verschil, dat men nu niet van het grondtal van het talstelsel, maar van het getal f uitgaat, hetgeen echter geheel bijkomstig is [1]).

---

[1]) In n°. 809 zal blijken, dat de factoren ook resten van machten van het grondtal zijn.

Uit het voorgaande blijkt, *dat de herleidingsfactoren f, die in een zelfde rij der tafel van n⁰. 800 voorkomen* (*dus bij een zelfde getal n behooren*) *een periode van resten* (zie n⁰. 733) *vormen, zoo die rij slechts ver genoeg wordt voortgezet.*

805. Uit het in n⁰. 804 gevondene blijkt, *dat, als men op een factor 1 komt, de voorafgaande herleidingsfactoren in dezelfde volgorde terugkeeren.* Dit beteekent, *dat, als* $g^t - 1$ [1]) en $fg^k - 1$ *beide door n deelbaar zijn, dit ook met* $fg^{k+t} - 1$ *het geval is*, iets dat trouwens ook onmiddellijk is af te lezen uit:

$$(fg^{k+t} - 1) - (fg^k - 1) = fg^k(g^t - 1).$$

In de tafel is het repeteeren der herleidingsfactoren waar te nemen voor

$$n = 7, 13, 21, 27, 33, 37, 39, 41, 63, 73, 77, 81, 91, 99,$$

terwijl dit ook voor de overige waarden van n het geval zou zijn zoo de tafel voor grootere waarden van k was voortgezet.

806. *Komt men op een herleidingsfactor — 1, dan keeren de voorafgaande factoren met tegengesteld teeken terug* (zie n⁰. 741). Dit beteekent, *dat, als* $g^{t'} + 1$ *en* $fg^k - 1$ *beide door n deelbaar zijn, ook* $fg^{k+t'} + 1$ *door n deelbaar is*, zooals ook onmiddelijk uit

$$(fg^{k+t'} + 1) + (fg^k - 1) = fg^k(g^{t'} + 1)$$

is af te lezen.

In het beschouwde geval is het aantal herleidingsfactoren eener periode even [2]). Is omgekeerd dit aantal even, dan komt er stellig een factor — 1 zoo n een macht van een oneven priemgetal is (zie n⁰. 741). In de tafel van n⁰. 800 is dit waar te nemen voor $n = 7, 13, 17, 19, 73$.

Voor andere waarden van n kan echter het aantal factoren eener periode even zijn zonder dat een factor — 1 verschijnt. Is g even, dus n oneven (wegens de onderlinge ondeelbaarheid van g en n), dan kan zich dit geval alleen voordoen als n door minstens twee oneven priemgetallen deelbaar is. De tafel wijst

---

[1]) Hierin is t het aantal resten eener periode behoorende bij machten van g, dus het door de tafel van n⁰. 747 aangegeven getal.

[2]) Nl. $2t'$ als t' het kleinste getal is, waarvoor $g^{t'} + 1$ door n deelbaar is.

dit geval aan voor $n = 21, 33, 39, 63, 99$. Zooals men aan $n = 77$ of 91 ziet, kan echter ook bij een door meerdere oneven priemgetallen deelbaar getal n een herleidingsfactor -1 optreden.

807. De beschouwingen van n⁰. 803—806 leveren het eenvoudigste middel om de bij $k = 2, 3, 4$, enz. behoorende factoren te berekenen (waarbij men nog op de in n⁰. 744—746 gemaakte opmerkingen te letten heeft). Evenals in n⁰. 802 nemen we als voorbeeld $n = 23$. Duiden we den bij den exponent k behoorenden factor door f_k aan en heeft men (volgens het tabelletje van n⁰. 777) gevonden $f_1 = 7$, dan is de verdere berekening:

$$f_2 = f_1^2 - 2 \,.\, 23 = 3,$$
$$f_3 = f_1 f_2 - 23 = -2,$$
$$f_4 = f_2^2 = 9,$$
$$f_5 = f_2 f_3 = -6,$$
$$f_6 = f_3^2 = 4,$$
$$f_7 = f_2 f_5 + 23 = 5,$$
$$f_8 = f_2 f_6 - 23 = -11,$$
$$f_9 = f_3 f_6 = -8,$$
$$f_{10} = f_3 f_7 = -10.$$

808. Bovendien is nog een vereenvoudiging aan te brengen *als men een door 10 deelbaren herleidingsfactor vindt. De volgende factor wordt dan nl. eenvoudig verkregen door eerstgenoemden factor door 10 te deelen.* Immers behoort bij een zekere waarde van k de factor $10d$, dan is $10d \,.\, 10^k - 1$, dus $d \,.\, 10^{k+1} - 1$, door n deelbaar, zoodat d de bij den exponent $k + 1$ behoorende factor is.

Als voorbeeld nemen we $n = 93$. Daarvoor wordt gevonden $f_2 = 40$, waaruit men direct tot $f_3 = 4$ besluit. Zonder deze opmerking zou de berekening van f_3 aanmerkelijk minder eenvoudig geweest zijn, nl. aldus:

$$f_3 = f_1 f_2 - 12 \,.\, 93 = 28 \,.\, 40 - 12 \,.\, 93 = 4.$$

Als tweede voorbeeld nemen we $n = 57$. Volgens het tabelletje van n⁰. 777 is $f_1 = -17$. Het is nu echter voordeelig deze waarde door de absoluut grootere waarde 40 te vervangen, daar men dan direct vindt $f_2 = 4$ (hetgeen eenvoudiger is dan de berekening van f_2 uit 17^2).

809. Verband tusschen de tafels van n°. 743 en 800. Is t het kleinste natuurlijke getal, waarvoor $g^t - 1$ door n deelbaar is, dus het aantal verschillende resten, die g, g^2, g^3, enz. bij deeling door n opleveren, dan is voor $k \leqq t$ het getal

$$g^{t-k} g^k - 1$$

door n deelbaar. Hieruit blijkt, dat de bij den exponent k behoorende herleidingsfactor g^{t-k} is of een getal, dat daaruit door vermeerdering met een n-voud ontstaat. Neemt men den herleidingsfactor zoo klein mogelijk, dan is deze dus de rest der deeling van g^{t-k} door n. We zien dus, *dat de bij $k = 1, 2, 3, \ldots, t$ behoorende herleidingsfactoren niets anders zijn dan de resten van*

$$g^{t-1},\ g^{t-2},\ g^{t-3},\ \ldots,\ g,\ 1$$

bij deeling door n [1]).

Voor de berekening dier factoren, zoo men deze in een beperkt aantal wenscht, is het echter aangewezen niet de machten van g, maar (zooals in n°. 803 en volg. is aangegeven) die van den bij $k = 1$ behoorenden herleidingsfactor te berekenen, daar men anders juist de herleidingsfactoren, waarom het te doen is, het laatst vindt.

810. Uit het in n°. 809 gevondene blijkt, *dat de periode der bij $k = 1, 2, 3, \ldots$ behoorende herleidingsfactoren $f_1, f_2, f_3, \ldots$, dus de periode der resten van $f_1, f_1^2, f_1^3, \ldots$ bij deeling door n, dezelfde is als de in n°. 736 en volg. beschouwde periode der resten van machten van het grondtal g, maar in omgekeerde volgorde.*

Is dus eenmaal de tafel van n°. 743 samengesteld, dan kan men daaraan onmiddellijk de in de tafel van n°. 800 opgenomen herleidingsfactoren ontleenen voor de getallen n, die een macht van een priemgetal zijn. Zoo geeft de tafel van n°. 743 als periode der resten van machten van 10 voor $n = 41$ de getallen 10, 18, 16, -4, 1, waaruit men voor de bij $n = 41$ behoorende herleidingsfactoren vindt -4, 16, 18, 10, 1. Evenzoo vindt men

---

1) Ook hieruit blijkt onmiddellijk, dat, als een herleidingsfactor door g deelbaar is, de volgende factor daaruit door deeling door g gevonden wordt (zie n°. 808).

uit de door de tafel van n⁰. 743 opgegeven resten — 7, — 2, — 3, 4, 6, — 8, 5, — 1 voor $n = 17$ de volgende herleidingsfactoren — 5, 8, — 6, — 4, 3, 2, 7, — 1, zooals gemakkelijk is na te gaan door de periode der resten van machten van 10 volledig uitgeschreven te denken.

In het bijzonder blijkt uit het voorgaande, *dat de tafel van n⁰. 747 ook aangeeft de aantallen verschillende herleidingsfactoren, welke bij een gegeven getal n behooren als men de tafel van n⁰. 800 voor voldoend groote waarden van k voortzet*, dus dat ze de *aantallen herleidingsfactoren eener periode geeft.*

811. Voorbeelden ter toelichting. We laten hier eenige voorbeelden volgen, die met behulp van de tafel van n⁰. 800 behandeld zijn:

27469752234183546 21 deelbaar door 99.

$$\frac{4183546210}{6930521433} + 10 \text{ [1]}$$

$$\frac{1433}{4485} + 1$$

$$\frac{85}{7029} + 1$$

$$\frac{29}{99} + 1$$

Het is hierbij allicht eenvoudiger afzonderlijk de kenmerken van deelbaarheid door 9 en door 11 toe te passen (zie n⁰. 704 en 722).

812. Als tweede voorbeeld diene:

186853002542731648493 1093 deelbaar door 57.

$$\frac{12969862186}{40032680545} - 2$$

$$\frac{13402725}{5281278} - 5$$

$$\frac{3058}{2223} - 11$$

$$\frac{92}{114} + 4$$

$$114 = 2 \, . \, 57$$

Men kan bij dit voorbeeld ook eerst de deelbaarheid door 3 constateeren en daarna het getal op zijn deelbaarheid door 19 onderzoeken. De berekening wordt dan aldus:

---

[1]) De getallen + 10, + 1, enz. geven de herleidingsfactoren aan behoorende bij het uitgebreide kenmerk door optelling, zoodat bij een kenmerk door aftrekking de herleidingsfactor door een negatief getal wordt voorgesteld (zie het voorbeeld van n⁰. 812).

1868530025427316484931093

$$\frac{484931093}{29540496223} - 1$$

$$\frac{2481115}{4371839} - 5$$

$$\frac{5517}{2920} - 3$$

$$\frac{4}{133} + 2$$

133 = 7 . 19.

Eenvoudiger is het echter rechtstreeks het kenmerk van deelbaarheid door 57 toe te passen.

813. Als verdere voorbeelden (waarbij de deeler een priemgetal of een macht van een priemgetal is) nemen we:

29739797350216452576 deelbaar door 27.

$$\frac{216452576}{956249926} + 1$$

$$\frac{499260}{798822} + 10$$

$$\frac{822}{1620} + 1$$

$$\frac{16}{0} - 8$$

17924390521863420576879421503 deelbaar door 89.

$$\frac{158843006}{793048774} + 2$$

$$\frac{186097548}{625149735} + 2$$

$$\frac{50299470}{50317396} + 2$$

$$\frac{768}{2405} - 8$$

$$\frac{40}{4984} - 8$$

$$\frac{36}{534} + 9$$

$$\frac{36}{89} + 9$$

8528184329645820547867593438 2 deelbaar door 49.

$$
\begin{array}{l}
227803146 \\
\overline{354251640} - 3 \\
106275492 \\
\overline{712157472} - 3 \\
944832 \\
\overline{92120} - 6 \\
300 \\
\overline{392} + 25 \\
10 \\
\overline{49} + 5
\end{array}
$$

(aftrekking met positieve getallen niet mogelijk)

Bij deze berekening doet zich bij de derde aftrekking het geval voor, dat de aftrekker grooter is dan het aftrektal, iets dat natuurlijk geen bezwaar oplevert.

In de voorgaande voorbeelden geeft de toepassing der deelbaarheidskenmerken, in vergelijking met de rechtstreeksche deeling, een niet onbelangrijke bekorting.

---

814. Rest der deeling bij de kenmerken door optelling en aftrekking. Uit de betrekking (509) van n⁰. 788 ziet men, dat de getallen a en $(b + fl)g^k$ bij deeling door n dezelfde rest opleveren (n is deeler van $fg^k - 1$). *Is r' de rest van $b + fl$ bij deeling door n, dan is dus de rest r der deeling van a door n dezelfde als van $r'g^k$.*

Het voorgaande geldt eveneens als f negatief is ($f = - f'$), dus zoowel voor het eerste als voor het tweede kenmerk van n⁰. 788. *Is bij toepassing van laatstgenoemd kenmerk $b - f'l$ negatief* (zooals bij de derde aftrekking van het laatste voorbeeld van n⁰. 813, welke aftrekking met positieve getallen niet mogelijk is) *en r'' de rest der deeling van $f'l - b$ door n, dan is de rest der deeling door n voor het getal a dezelfde als voor $- r''g^k$.*

815. Uit het in n⁰. 814 gevondene volgt nu:

Komt men na de verschillende optellingen en aftrekkingen, die

overeenkomstig de kenmerken van n⁰. 788 worden uitgevoerd, op een rest, waarvan de absolute waarde s is, dan is de rest der deeling van het oorspronkelijke getal a door n dezelfde als van $(-1)^w s g^u$, *dus van*

$$(-1)^w s r_u,$$

waarin u voorstelt het totale aantal aan het eind weggelaten nullen, r_u *de rest der deeling van* g^u *door n en w het aantal malen, dat* $b - f'l$ *negatief is uitgevallen (dus het aantal aftrekkingen, die met positieve getallen niet mogelijk zijn).*

816. Voorbeelden ter toelichting. Als voorbeeld van de besproken restbepaling vragen we naar de rest van

538976042312904153762248357880000

bij deeling door 73. De berekening is de volgende:

```
538976042312904153762248357880000
                24835788
                --------  + 1
                28989550
       92898955
     ----------  + 1
     9068941267
       1267
       ----  — 1
       5627
   5627
   ----  — 1     (aftrekking met positieve getallen niet
    237           mogelijk)
3 . 73 = 219
         ---
          18
```

In het geheel zijn 29 nullen geschrapt, terwijl eenmaal de aftrekker grooter dan het aftrektal was (dus $u = 29$, $w = 1$). De gevraagde rest is dus, volgens de eigenschap van n⁰. 815, dezelfde als die van $-18 \cdot 10^{29}$. Daar 10^8 als rest 1 en 10^4 als rest -1 oplevert (hetgeen ook uit de tafel van n⁰. 800 is af te lezen), is van $10^{29} = (10^8)^3 \cdot 10^4 \cdot 10$ de rest -10. De gevraagde rest is dus dezelfde als die van $-18 \cdot (-10) = 180$, dus 34.

817. Als tweede voorbeeld vragen we naar de rest van

109702135917658842674230429

bij deeling door 19. Dit geeft de volgende berekening:

```
          1097021359176588426742 30429
                      674230429
                      ---------  — 1
                      243428413
          243428413              (aftrekking met positieve getallen
          ---------  — 1         niet mogelijk)
          133726278
          18834
          -----  — 3 (idem)
           5462
             4
           ---  + 2
           550
 3 . 19 =   57
            --
             2 (idem)
```

Hier is $u = 24$ en $w = 3$, zoodat de gevraagde rest dezelfde is als die van $-2 \,.\, 10^{24}$, dus van $-2 \,.\, 10^{6}$ (daar 10^{18} een rest 1 geeft). Volgens de tafel van n⁰. 743 geeft 10^6 bij deeling door 19 een rest -8 (hetgeen ook is af te leiden uit de tafel van n⁰. 800, nl. uit den herleidingsfactor behoorend bij $k = 9 - 6 = 3$) [1]), zoodat voor de gevraagde rest $-2 \,.\, (-8) = 16$ gevonden wordt (of -3, wat op hetzelfde neerkomt).

De lezer overtuige zich, dat op deze wijze de gevraagde resten sneller gevonden worden dan door rechtstreeksche deeling.

818. Quotiënt van een opgaande deeling bij de uitgebreide kenmerken door optelling en aftrekking. Op soortgelijke wijze als in n⁰. 781—784 kan ook bij toepassing der meer algemeene deelbaarheidskenmerken van n⁰. 788 het quotiënt bepaald worden *in geval de deelbaarheid blijkt te bestaan.*

Is n een deeler van $fg^k - 1$, is dus voor een zekere waarde van n aan de vergelijking (510) van n⁰. 795 voldaan, dan kan voor de gelijkheid (509) van n⁰. 788 geschreven worden:

$$a = a_1 g^k - lxn; \qquad (511)$$

hierin is $a_1 = b + fl$, dus het *getal, waartoe a door toepassing*

---

[1]) Uit de door de tafel van n⁰. 800 opgegeven herleidingsfactoren volgen nl. omgekeerd de resten der machten van 10, en wel is de rest van 10^l gelijk aan den herleidingsfactor behoorend bij $k = t - l$ (zie n⁰. 809), of, voor het geval dat $t = 2t'$ is, gelijk aan het tegengestelde van den herleidingsfactor behoorende bij $k = t' - l$ (waarbij $l < t'$ ondersteld wordt).

van het deelbaarheidskenmerk herleid wordt, terwijl l voorstelt het *getal gevormd door de k laatste cijfers van a.*

Uit (511) vindt men voor het gezochte quotiënt:

$$\frac{a}{n} = \frac{a_1}{n} g^k - lx, \tag{512}$$

waarmede de bepaling van het quotiënt $a : n$ tot die van het quotiënt $a_1 : n$ teruggebracht is. Zoo kan men doorgaan.

Het spreekt weer van zelf, dat f ook negatief kan zijn (in welk geval ook x negatief is), zoodat de voorgaande beschouwingen ook op het tweede kenmerk van n⁰. 788 betrekking hebben.

819. Past men bij den volgenden stap der bewerking (dus bij de herleiding van het getal a_1 van n⁰. 818) het kenmerk met den exponent k_1 en den (positieven of negatieven) herleidingsfactor f_1 toe en is

$$f_1 g^{k_1} - 1 = x_1 n,$$

dan vindt men evenzoo:

$$\frac{a_1}{n} = \frac{a_2}{n} g^{k_1} - l_1 x_1, \tag{513}$$

waarin l_1 het getal is gevormd door de k_1 laatste cijfers van a_1 en a_2 het getal, dat ontstaat door het door de overige cijfers van a_1 gevormde getal met $f_1 l_1$ te vermeerderen (dus het getal, dat uit a na tweemalige herleiding ontstaan is). Uit (512) en (513) leidt men af:

$$\frac{a}{n} = \frac{a_2}{n} g^{k+k_1} - l_1 x_1 g^k - lx.$$

Evenzoo vindt men na de derde herleiding (met exponent k_2):

$$\frac{a}{n} = \frac{a_3}{n} g^{k+k_1+k_2} - l_2 x_2 g^{k+k_1} - l_1 x_1 g^k - lx,$$

enz.

Het is weer het voordeeligst de herleidingsfactoren f, f_1, f_2, enz. alle negatief te kiezen (dus steeds het tweede kenmerk van n⁰. 788 toe te passen), daar dan ook x, x_1, x_2, enz. alle negatief worden en dus het quotiënt door optelling van eenige (positieve) getallen gevonden wordt.

820. Neemt men bij de toepassing van een der kenmerken van n⁰. 788 den exponent k eenigszins groot (grooter dan het aantal cijfers van den deeler n), dan zal het getal x, waarvoor aan de vergelijking (510) van n⁰. 795 voldaan is, uit meerdere

cijfers bestaan, hetgeen de berekening van het product lx (waarvan de factor l eveneens uit meerdere cijfers bestaat) min of meer bewerkelijk maakt. In nog sterkere mate is dit het geval als men bij de verschillende herleidingen verschillende exponenten kiest (zooals bij de voorbeelden van n⁰. 811—813), daar dan ook de getallen x, x_1, x_2, enz. verschillend zijn en dus niet (zooals in n⁰. 783) de verschillende vermenigvuldigingen door één enkele vermenigvuldiging kunnen worden vervangen. Daarbij komt nog, dat men voor de quotiëntbepaling met willekeurige exponenten niet alleen zou moeten beschikken over een tafel der herleidingsfactoren (die van n⁰. 800), maar ook over een tafel, die voor verschillende deelers en verschillende exponenten de getallen x opgeeft. Dit maakt de besproken quotiëntbepaling voor grootere waarden van k vrijwel onbruikbaar, als achterstaande bij gewone deeling, zooals de voorbeelden van n⁰. 821 doen zien.

821. Voorbeelden ter toelichting. In het eerste voorbeeld van n⁰. 813 is gebruik gemaakt van de deelbaarheid der getallen

$$10^9 - 1,\ 10 \,.\, 10^5 - 1,\ 10^3 - 1,\ 8 \,.\, 10 + 1$$

door 27; de quotiënten zijn resp.:

$$37037037,\ 37037,\ 37,\ 3.$$

Volgens het in n⁰. 819 gevondene is dus het verlangde quotiënt:

$$2 \,.\, 3 \,.\, 10^{18} - 822 \,.\, 37 \,.\, 10^{14} - 49926 \,.\, 37037 \,.\, 10^9 -$$
$$- 216452576 \,.\, 37037037.$$

De becijfering hiervan is bewerkelijker dan gewone deeling.

Bij het tweede voorbeeld van n⁰. 813 is gebruik gemaakt van de deelbaarheid van

$$2 \,.\, 10^8 - 1,\ 8 \,.\, 10^2 + 1,\ 9 \,.\, 10 - 1$$

door 89, waarbij de quotiënten resp. zijn:

$$2247191,\ 9,\ 1.$$

Voor het quotiënt wordt dus gevonden:

$$10^{30} - 4 \,.\, 10^{29} - 4 \,.\, 10^{28} + 9\,(5 \,.\, 10^{26} + 96 \,.\, 10^{24}) -$$
$$- 2247191\,(25149735 \,.\, 10^{16} + 93048774 \,.\, 10^8 + 79421503) =$$
$$= 10^{30} - 44 \,.\, 10^{28} + 9 \,.\, 596 \,.\, 10^{24} - 2247191 \,.\, 251497359304877479421503.$$

Ook hier is gewone deeling te verkiezen.

822. De in n⁰. 818 en 819 besproken quotiëntbepaling levert

echter voordeel op *als men bij alle herleidingen denzelfden exponent en denzelfden herleidingsfactor* (dezen laatsten liefst negatief) *gebruikt en den exponent zoo klein neemt, dat het getal x slechts uit enkele (b.v. een of twee) cijfers bestaat.*

Zoo is bij het eerste voorbeeld van n⁰. 793 $x = 13$ (wegens $299 = 13 \,.\, 23$). De in n⁰. 793 voorkomende berekening levert dus voor het quotiënt:

$$12 \,.\, 10^{12} - 13 \,.\, 743972950062 = 12 \,.\, 10^{12} - 9671648350806 =$$
$$= 2328351649194.$$

De berekening van n⁰. 794 (waarbij van $2001 = 87 \,.\, 23$ gebruik gemaakt is) doet hetzelfde quotiënt aldus vinden:

$$- 33 \,.\, 10^{12} + 87 \,.\, 406073007462 =$$
$$= - 33 \,.\, 10^{12} + 35328351649194 = 2328351649194.$$

823. De quotiëntbepaling wordt even eenvoudig als die van n⁰. 781—784 als het getal x slechts uit één cijfer bestaat. We laten hiervan een voorbeeld volgen, waarbij $k = 2$ is:

2078831496810235*7* deelbaar door 67.

114
09*09* — 2
18
7*91* — 2
182
7*85* — 2
170
29*77* — 2
154
6*75* — 2
150
6*36* — 2
72
— 2
134 = 2 . 67

Voor het quotiënt wordt (wegens $201 = 3 \,.\, 67$) gevonden:

$$2 \,.\, 10^{14} + 3 \,.\, 36757785910957 =$$
$$= 310273357732871.$$

Nadat de deelbaarheid door 67 geconstateerd is loopt deze quotiëntbepaling aanmerkelijk sneller dan gewone deeling.

824. Toepassing op de ontbinding van een getal in priemfactoren. Om een getal a in priemfactoren te ontbinden onderzoekt men achtereenvolgens of a door 2, 3, 5, 7, 11, enz. deelbaar

is; hierin zijn 2, 3, 5, 7, 11, enz. de *naar de grootte gerangschikte priemgetallen*, die we door p_1, p_2, p_3, enz. voorstellen. Men heeft nu:

Het getal a is priem als het door geen der priemgetallen p_1, p_2, ..., p_k *deelbaar is en voldaan is aan:*

$$\left[\frac{a}{p_k}\right] \leqq p_{k+1}. \tag{514}$$

Immers uit (514) volgt:

$$a < \left(\left[\frac{a}{p_k}\right] + 1\right)p_k \leqq (p_{k+1} + 1)p_k \leqq$$
$$\leqq (p_{k+1} + 1)(p_{k+1} - 1) = p_{k+1}^2 - 1,$$

dus:

$$a < p_{k+1}^2.$$

Volgens de eigenschap van n°. 196 is a dus een priemgetal.

825. De eigenschap van n°. 824 is vooral van nut als men de deelbaarheid door gewone deeling onderzoekt, daar men dan ook de partiëele quotiënten der niet-opgaande deelingen vindt.

Als voorbeeld nemen we $a = 2531$. De deelingen daarvan door 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 en 47 blijken niet op te gaan, terwijl men voor het laatste quotiënt, dus voor $\left[\frac{2531}{47}\right]$, vindt 53, d. i. het op 47 volgende priemgetal. Bijgevolg is 2531 priem.

826. Dat 2531 niet door 2, 3, 5 en 11 deelbaar is, ziet men onmiddellijk uit de bijbehoorende kenmerken van deelbaarheid. Dat deelbaarheid door 7, 13, ..., 47 niet bestaat, blijkt met behulp van het tabelletje van n°. 777 of de tafel van n°. 800 aldus:

2531 (7)	2531 (13)	2531 (17)	2531 (19)
$\frac{2}{1} - 2$	$\frac{9}{44} - 9$	$\frac{5}{48} - 5$	$\frac{2}{5} + 2$
$\frac{2}{23} - 2$	$\frac{36}{12} - 9$	$\frac{40}{16} - 5$	$\frac{10}{35} + 2$
2531 (23)	2531 (29)	2531 (37)	2531 (41)
$\frac{7}{260} + 7$	$\frac{3}{6} + 3$	$\frac{77}{176} - 11$	$\frac{4}{49} - 4$
	$\frac{18}{43} + 3$	$\frac{66}{49} - 11$	$\frac{36}{12} - 4$

2531 (43) $\frac{30}{23}-30$ $\frac{39}{61}+13$

2531 (47) $\frac{14}{239}-14$

De tusschen haakjes geplaatste getallen wijzen de deelers aan, waarvan de deelbaarheid op 2531 wordt onderzocht. Den deeler 31 hebben we overgeslagen, daar onmiddellijk te zien is, dat 2531 niet door 31 deelbaar is; men kan nl. direct de laatste twee cijfers van 2531 schrappen.

827. Zooals het volgende voorbeeld doet zien kan men soms nog enkele bekortingen aanbrengen. Heeft men geconstateerd, dat het getal 5417 door geen der priemgetallen beneden 60 deelbaar is, dan is uitgesloten, dat 5417 een product van drie priemgetallen is. Onderzocht moet dus nog worden of 5417 een product van twee priemgetallen grooter dan 60 is, welke priemgetallen geen andere dan 61, 67, 71, 73, 79, 83 en 89 kunnen zijn. Was 5417 deelbaar door 61, dan zou de complementaire deeler een op 7 eindigend priemgetal, dus 67 moeten zijn; daar men echter direct ziet, dat $61 \cdot 67 < 5417$ is, gaat de deeling door 61 niet op. Evenzoo ziet men uit $67 \cdot 71 < 5417$, dat 5417 niet door 67 en niet door 71 deelbaar is. Was 5417 door 73 deelbaar, dan zou de complementaire deeler een op 9 eindigend priemgetal moeten zijn; daar echter $73 \cdot 79 > 5417$ is, besluit men tot het priem zijn van 5417.

828. Heeft men een getal a op zijn deelbaarheid door de opvolgende priemgetallen p_1, p_2, p_3, enz. onderzocht en is p_i het eerste priemgetal, waarvoor de deeling opgaat, dan is het quotiënt $\frac{a}{p_i}$ door geen der getallen $p_1, p_2, \ldots, p_{i-1}$ deelbaar, zoodat men dit verder nog slechts op zijn deelbaarheid door p_i, p_{i+1}, enz. heeft te onderzoeken. Is dus $\frac{a}{p_i} < p_i^2$, dan kan men direct tot het priem zijn van $\frac{a}{p_i}$ besluiten.

Als voorbeeld nemen we de ontbinding van 3109738801 in

priemfactoren. Dit getal blijkt niet deelbaar te zijn door 2, 3, 5, 7 en 11, wel door 13. Het quotiënt is 239210677. Dit is niet deelbaar door 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37 en 41, wel door 43. Het quotiënt is 5563039, dat weer door 43 deelbaar is en 129373 als quotiënt oplevert. Dit is niet deelbaar door 43 en 47 deelbaar, wel door 53. Het quotiënt is 2441. Daar dit getal $< 53^2$ is, is het priem, zoodat de verlangde ontbinding is:

$$3109738801 = 13 \,.\, 43^2 \,.\, 53 \,.\, 2441.$$

Wij laten hier voor de opgaande deelingen de toepassing van het deelbaarheidskenmerk (met behulp van de tafel van n⁰. 800) en de quotiëntbepaling (volgens n⁰. 818 en 819) volgen.

3109738801 : 13.

$$\frac{801}{8937} - 1$$
$$\frac{937}{2171} - 1$$
$$\frac{710}{} - 10$$
$$-689 = -53 \,.\, 13$$

Daar $1001 = 77 \,.\, 13$ is, vindt men voor het quotiënt:

$$-53 \,.\, 10^8 + 77 \,.\, 71937801 =$$
$$= -53 \,.\, 10^8 + 5539210677 =$$
$$= 239210677.$$

239210677 : 43.

$$\frac{231}{1875} - 3$$
$$\frac{225}{693} - 3$$
$$\frac{279}{-43} - 3$$

Daar $301 = 7 \,.\, 43$ is, vindt men voor het quotiënt:

$$-10^6 + 7 \,.\, 937577 =$$
$$= -10^6 + 6563039 =$$
$$= 5563039.$$

5563039 : 43.

$$\frac{117}{513} - 3$$
$$\frac{39}{516} - 3$$
$$\frac{48}{-43} - 3$$

Voor het quotiënt wordt gevonden:

$$-10^6 + 7 \,.\, 161339 =$$
$$-10^6 + 1129373 =$$
$$= 129373.$$

129373 : 53.

$$\frac{657}{} - 9$$
$$636 = 12 \,.\, 53$$

Daar $901 = 17 \,.\, 53$ is, vindt men voor het quotiënt:

$$12 \,.\, 10^2 + 17 \,.\, 73 =$$
$$= 12 \,.\, 10^2 + 1241 = 2441.$$

829. Uitbreiding der eigenschap van n⁰. 824. De eigenschap van n⁰. 824 kan aldus worden uitgebreid:

Het getal a is priem als het door geen der priemgetallen p_1, $p_2, \ldots, p_k$ *deelbaar is (waarin* $p_1, p_2, p_3, \ldots$ *de naar de grootte gerangschikte priemgetallen zijn) en voldaan is aan:*

$$\left[\frac{a}{p_k}\right] < 2p_{k+1} - p_k = p_{k+1} + (p_{k+1} - p_k). \qquad (515)$$

Uit (515) volgt nl., als men $p_{k+1} - p_k = m$ stelt:

$$a < \left(\left[\frac{a}{p_k}\right] + 1\right)p_k \leqq (p_{k+1} + m)(p_{k+1} - m) =$$
$$= p_{k+1}^2 - m^2 < p_{k+1}^2.$$

830. Daar $p_{k+1} - p_k \geqq 1$ is, dus $2p_{k+1} - p_k \geqq p_{k+1} + 1$, is aan (515) voldaan als aan (514) voldaan is, zoodat de eigenschap van n⁰. 824 in die van n⁰. 829 ligt opgesloten.

Als voorbeeld van een toepassing der eigenschap van n⁰. 829 nemen we $a = 9281$. Dit getal blijkt door geen der priemgetallen tot en met 89 deelbaar te zijn, terwijl men vindt $\left[\frac{9281}{89}\right] = 104$. Dit is kleiner dan $97 + (97 - 89) = 105$ (waarin 97 het op 89 volgende priemgetal is), waaruit men in verband met de eigenschap van n⁰. 829 tot het priem zijn van 9281 besluit. De eigenschap van n⁰. 824 is nu niet van toepassing.

---

§ 3. Deelbaarheid der faculteiten.

831. Ontbinding van $n!$ in priemfactoren. Het is duidelijk, *dat in $n!$ geen andere priemfactoren voorkomen dan die, welke $\leqq n$ zijn.* Immers een priemgetal $> n$ is op geen der factoren van het product $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots . n$ deelbaar, dus ook niet op het product (zie de eerste formuleering der eigenschap van n⁰. 199).

We beschouwen nu een priemgetal p, dat $\leqq n$ is, en vragen naar den *exponent, waarmede de priemfactor p in $n!$ voorkomt.*

Het getal p is alleen op de factoren

$$p,\ 2p,\ 3p,\ \ldots .,\ \left[\frac{n}{p}\right]p \tag{516}$$

van het product $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots . n$ deelbaar, daar $\left\{\left[\frac{n}{p}\right]+1\right\}p > n$ is.

Er kunnen echter in het product factoren voorkomen, die door een hoogere macht van p deelbaar zijn, als nl. $n \geqq p^2$ is. De door p^2 deelbare factoren van het product zijn dan:

$$p^2,\ 2p^2,\ 3p^2,\ \ldots .,\ \left[\frac{n}{p^2}\right]p^2,$$

dus ten getale van $\left[\frac{n}{p^2}\right]$ aanwezig; dit laatste geldt ook nog als $n < p^2$ is (in welk geval geen enkele der n factoren door p^2 deelbaar is), daar dan $\left[\frac{n}{p^2}\right] = 0$ is. Evenzoo zijn $\left[\frac{n}{p^3}\right]$ factoren van het product door p^3 deelbaar, enz.

Dit voert tot de volgende eigenschap:

De exponent $\varepsilon(n)$, waarmede het priemgetal p in $n!$ voorkomt, wordt aangewezen door

$$\varepsilon(n) = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \left[\frac{n}{p^4}\right] + \ldots ., \tag{517}$$

welke som over alle van nul verschillende termen moet worden uitgestrekt.

Immers een der factoren 1, 2, 3, ..., n, die door p^i en geen hoogere macht van p deelbaar is, geeft aanleiding tot i factoren p in $n!$. Echter geeft die door p^i deelbare factor ook juist een bijdrage i tot het tweede lid van (517), daar hij medegeteld is onder de $\left[\frac{n}{p}\right]$ door p deelbare factoren, onder de $\left[\frac{n}{p^2}\right]$ door p^2 deelbare factoren, enz. en eindelijk onder de $\left[\frac{n}{p^i}\right]$ door p^i deelbare factoren en dus i-maal in rekening gebracht is.

832. In de door Legendre gegeven formule (517) [1]) kan men de som natuurlijk ook over meerdere termen dan de van nul verschillende uitstrekken, daar deze meerdere termen aan de som niets veranderen. Men kan voor (517) dus ook schrijven:

$$\varepsilon(n) = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{p^j}\right], \qquad (518)$$

waarin j willekeurig mag worden aangenomen, mits zoo dat $p^{j+1} > n$ is.

In den vorm (518) geldt de formule ook als $p > n$ is. In dat geval zijn nl. alle termen in het tweede lid van (518) nul, zoodat men naar behooren $\varepsilon(n) = 0$ vindt.

833. Omvorming der formule van Legendre. Stelt men

$$\left[\frac{n}{p^i}\right] = q_i\,,$$

dan is volgens de eigenschap van n⁰. 457:

$$q_{i+1} = \left[\frac{n}{p^i p}\right] = \left[\frac{\left[\frac{n}{p^i}\right]}{p}\right] = \left[\frac{q^i}{p}\right],$$

zoodat de termen in het tweede lid van (517) ook aldus gevonden kunnen worden:

$$q_1 = \left[\frac{n}{p}\right],\ q_2 = \left[\frac{q_1}{p}\right],\ q_3 = \left[\frac{q_2}{p}\right],\ q_4 = \left[\frac{q_3}{p}\right],\ \ldots . \qquad (519)$$

---

[1]) De formule komt voor in het in 1798 verschenen groote werk „Essai sur la théorie des nombres" (voor de derde maal gedrukt in 1830 onder den titel „Théorie des nombres") van Adrien Marie Legendre (1752—1833).

Voor de berekening van den exponent $\varepsilon(n)$, waarmede p in $n!$ voorkomt, is dit de aangewezen weg.

Door zoo dien exponent te bepalen voor ieder priemgetal, dat $\leqq n$ is, krijgt men een volledige ontbinding van $n!$ in priemfactoren.

834. Men kan den in n⁰. 833 gevonden algorithmus ter bepaling van den exponent $\varepsilon(n)$ ook geheel onafhankelijk van de formule (517) van Legendre verkrijgen. Blijkens het in n⁰. 831 opgemerkte komt het priemgetal p in $n!$ met denzelfden exponent voor als in het product der getallen (516), dus als in

$$q_1!\ p^{q_1}.$$

Evenzoo komt p in $q_1!$ met denzelfden exponent voor als in

$$q_2!\ p^{q_2},$$

in $q_2!$ met denzelfden exponent als in

$$q_3!\ p^{q_3},$$

enz. De factor p komt dus in $n!$ met denzelfden exponent voor als in

$$q_2!\ p^{q_1+q_2},\ q_3!\ p^{q_1+q_2+q_3},\ \ldots .$$

De getallen $q_1, q_2, q_3, \ldots$ worden (blijkens hun door (519) aangegeven beteekenis) steeds kleiner, zoodat men eindelijk op een getal stuit, dat $< p$ is. Is dit q_i, dan is $q_i!$ niet meer door p deelbaar, *zoodat p in $n!$ met den exponent $q_1 + q_2 + \ldots + q_i$ voorkomt.*

835. Als voorbeeld nemen we de *ontbinding van het getal 50!*, waarin de priemfactoren

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47

voorkomen. De bepaling der exponenten, waarmede deze zijn aangedaan, loopt als volgt:

$\left[\frac{50}{2}\right] = 25$	$\left[\frac{50}{3}\right] = 16$	$\left[\frac{50}{5}\right] = 10$	$\left[\frac{50}{7}\right] = 7$
$\left[\frac{25}{2}\right] = 12$	$\left[\frac{16}{3}\right] = 5$	$\left[\frac{10}{5}\right] = 2$	$\left[\frac{7}{7}\right] = 1$
$\left[\frac{12}{2}\right] = 6$	$\left[\frac{5}{3}\right] = 1$	*12*	*8*
$\left[\frac{6}{2}\right] = 3$	*22*		
$\left[\frac{3}{2}\right] = 1$			
47			

$$\left[\frac{50}{11}\right] = 4 \qquad \left[\frac{50}{13}\right] = 3 \qquad \left[\frac{50}{17}\right] = \left[\frac{50}{19}\right] = \left[\frac{50}{23}\right] = 2$$

$$\left[\frac{50}{29}\right] = \left[\frac{50}{31}\right] = \left[\frac{50}{37}\right] = \left[\frac{50}{41}\right] = \left[\frac{50}{43}\right] = \left[\frac{50}{47}\right] = 1.$$

Hieruit blijkt:

$$50! = 2^{47}.3^{22}.5^{12}.7^{8}.11^{4}.13^{3}.17^{2}.19^{2}.23^{2}.29.31.37.41.43.47.$$

Het aantal deelers van 50! bedraagt dus volgens de formule (241) van n⁰. 393:

$$48 . 23 . 13 . 9 . 5 . 4 . 3^{3} . 2^{6} = 4464046080.$$

De som dier deelers is (zie de formule (245) van n⁰. 398):

$$(2^{48}-1).\frac{3^{23}-1}{2}.\frac{5^{13}-1}{4}.\frac{7^{9}-1}{6}.\frac{11^{5}-1}{10}.\frac{13^{4}-1}{12}.\frac{17^{3}-1}{16}.$$

$$\frac{19^{3}-1}{18}.\frac{23^{3}-1}{22}.30.32.38.42.44.48 =$$

$$=\frac{(2^{48}-1)(3^{23}-1)(5^{13}-1)(7^{9}-1)(11^{5}-1)(13^{4}-1)(17^{3}-1)(19^{3}-1)(23^{3}-1).7.38}{3}=$$

$$= 608076(2^{48}-1)(3^{23}-1)(5^{13}-1)(7^{9}-1)(11^{5}-1)(13^{4}-1)(17^{3}-1)(23^{3}-1).$$

836. Deelbaarheid van $(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)!$ door $a_1!\,a_2!\ldots a_k!$. Is

$$n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k,$$

dan is volgens de formule (518) van n⁰. 832:

$$\varepsilon(a_i) = \left[\frac{a_i}{p}\right] + \left[\frac{a_i}{p^2}\right] + \ldots + \left[\frac{a_i}{p^j}\right], \qquad (520)$$

waarbij j thans zoo gekozen is, dat p^{j+1} grooter dan n, dus ook grooter dan ieder der getallen $a_1, a_2, \ldots, a_k$ is. Uit (520) volgt:

$$\varepsilon(a_1) + \varepsilon(a_2) + \ldots + \varepsilon(a_k) = \sum_{i=1}^{k}\left\{\left[\frac{a_i}{p}\right] + \left[\frac{a_i}{p^2}\right] + \ldots + \left[\frac{a_i}{p^j}\right]\right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{j}\left\{\left[\frac{a_1}{p^i}\right] + \left[\frac{a_2}{p^i}\right] + \ldots + \left[\frac{a_k}{p^i}\right]\right\}.$$

In verband met de eerste der ongelijkheden (287) van n⁰. 460 volgt hieruit:

$$\varepsilon(a_1) + \varepsilon(a_2) + \ldots + \varepsilon(a_k) \leqq \sum_{i=1}^{j}\left[\frac{n}{p^i}\right] = \varepsilon(n),$$

dus:

$$\varepsilon(n) \geqq \varepsilon(a_1) + \varepsilon(a_2) + \ldots + \varepsilon(a_k). \qquad (521)$$

Hieruit blijkt, dat het priemgetal p in $n!$ met denzelfden of

grooteren exponent voorkomt als in $a_1!\ a_2!\ \ldots\ a_k!$.

Daar dit voor ieder priemgetal geldt, vindt men in verband met de eigenschap van n⁰. 392:

Het getal $(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)!$ *is deelbaar door het product*

$$a_1!\, a_2! \ldots a_k!.$$

837. Uit de eigenschap van n⁰. 836 volgt in het bijzonder, dat $(a+b)!$ door $a!\ b!$ deelbaar is, dus dat

$$\frac{(a+b)!}{b!} = (b+1)(b+2)\ldots(b+a)$$

door $a!$ deelbaar is. Dit geeft de eigenschap:

Het product van a opvolgende natuurlijke getallen is deelbaar door a!.

Deze eigenschap volgt ook onmiddellijk daaruit, dat het aantal C^a_{a+b} der combinaties van $a+b$ elementen in groepen van a gelijk is aan $\frac{(a+b)!}{a!\ b!}$ (zie n⁰. 330).

838. Evenzoo volgt de meer algemeene eigenschap van n⁰. 836 direct uit het in n⁰. 341 gevondene, volgens hetwelk het aantal permutaties van $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ elementen, die bestaan uit groepen van $a_1, a_2, \ldots, a_k$ gelijke elementen, gelijk is aan:

$$\frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)!}{a_1!\ a_2! \ldots a_k!}.$$

Dit getal treedt ook op als *polynomiaalcoëfficiënt*, nl. als de *coëfficiënt van*

$$b_1^{a_1} b_2^{a_2} \ldots b_k^{a_k}$$

in de ontwikkeling van de $(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)^{de}$ *macht van het polynomium* $b_1 + b_2 + \ldots + b_k$ (zie n⁰. 366).

839. Stelling van Catalan omtrent deelbaarheid van $(a+b-1)!$ door $a!\ b!$. In n⁰. 384 is reeds opgemerkt, *dat, als n een priemgetal is, de polynomiaalcoëfficiënten van de* n^{de} *macht, met uitzondering van die, welke behooren bij exponenten die alle op een na nul zijn, door n deelbaar zijn.* In het bijzonder volgt hieruit:

Het getal $\frac{(a+b)!}{a!\,b!}$, *waarin a en b natuurlijke getallen zijn* [1]) *en* $a+b$ *priem is, is deelbaar door* $a+b$.

Men heeft dan dus:

$$(a+b)! = a!\,b!\,(a+b)v,$$
$$(a+b-1)! = a!\,b!\,v,$$

zoodat de eigenschap ook aldus geformuleerd kan worden:

Zijn a en b natuurlijke getallen en is $a+b$ *priem, dan is* $(a+b-1)!$ *deelbaar door* $a!\,b!$.

840. De eigenschap van n⁰. 839 is door CATALAN [2]) in 1874 aldus uitgebreid:

Zijn a en b onderling ondeelbaar, dan is $(a+b-1)!$ *deelbaar door* $a!\,b!$.

Uit de deelbaarheid van $(a+b-1)!$ door $a!\,(b-1)!$ en door $(a-1)!\,b!$ volgt nl., dat $\frac{(a+b-1)!}{(a-1)!\,(b-1)!}$ zoowel door a als door b deelbaar is, dus (wegens de onderlinge ondeelbaarheid van a en b) door ab. Dit beteekent, dat $(a+b-1)!$ door $(a-1)!\,(b-1)!\,ab = a!\,b!$ deelbaar is.

De eigenschap kan ook zoo geformuleerd worden:

Een binomiaalcoëfficiënt van de n^{de} *macht, behoorende bij twee onderling ondeelbare exponenten, is deelbaar door n.*

841. Het ondersteelde der eigenschap van n⁰. 840 sluit van zelf het geval uit, dat $a=0$ en $b>1$ of $b=0$ en $a>1$ is. Immers voor $a=0$, $b>1$ is b de G.G.D. van a en b, daar 0 door ieder getal deelbaar is (zie n⁰. 309); de getallen a en b hebben dan dus een G.G.D., die >1 is, en zijn dus niet als onderling ondeelbaar te beschouwen. Voor $a=0$, $b=1$ of $b=0$, $a=1$, in welke gevallen a en b wel onderling ondeelbaar te achten zijn, blijkt echter de deelbaarheid van $(a+b-1)!$ door $a!\,b!$ te bestaan. De in de eigenschap van n⁰. 839 voorkomende toevoeging, dat a en b natuurlijke getallen zijn, kan dus bij de eigenschap van n⁰. 840 worden weggelaten.

---

[1]) Dit wil dus zeggen, dat $a \geqq 1$ en $b \geqq 1$ is. Voor $a=0$ of $b=0$ geldt de eigenschap niet.

[2]) EUGÈNE CHARLES CATALAN (1814—1894).

In de eigenschap van n°. 840 stellen a en b derhalve aantallen (natuurlijke getallen of nul) voor. Het onderstelde sluit echter uit, dat a en b beide nul zijn, daar a en b dan ieder getal tot gemeenen deeler hebben en dus niet onderling ondeelbaar zijn. Trouwens voor $a = b = 0$ heeft $(a + b - 1)!$, d. i. $(-1)!$, geen zin; opgemerkt zij nog, dat men de formule (166) van n°. 313 niet kan volhouden voor $n = 0$, daar dit zou voeren tot

$$(-1)! = \frac{0!}{0} = \frac{1}{0},$$

terwijl $\frac{1}{0}$ geen zin heeft (zie n°. 308).

842. *De eigenschap van n°. 839 ligt als bijzonder geval in die van n°. 840 opgesloten.* Zijn nl. a en b natuurlijke getallen, dan zijn deze beide $< a + b$. Een gemeene deeler van a en b is een deeler van $a + b$ en tevens $\leqq a$ en $\leqq b$, dus $< a + b$. Daar het getal $a + b$, als dit priem is, geen andere deelers dan 1 en $a + b$ heeft, kan die gemeene deeler van a en b niets anders dan 1 zijn, zoodat a en b onderling ondeelbaar zijn en dus aan het onderstelde der eigenschap van n°. 840 voldaan is.

We merken nog op, *dat de eigenschap van n°. 840 niet voor omkeering vatbaar is,* d. w. z. dat uit de deelbaarheid van $(a + b - 1)!$ door $a!\ b!$ niet tot de onderlinge ondeelbaarheid van a en b kan worden besloten. Zoo is:

9! deelbaar door 4! 6!,
11! deelbaar door $(6!)^2$,
17! deelbaar door 4! 14! en door 8! 10!.

843. Deelbaarheid van $(ka)!$ door $(a!)^k\, k!$. In n°. 836 is gebleken, dat $(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)!$ door $a_1!\ a_2! \ldots a_k!$ deelbaar is. Zijn i der getallen $a_1, a_2, \ldots, a_k$ gelijk en > 0, dan volgt uit het in n°. 343 gevondene (omtrent het aantal manieren, waarop $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ elementen in k groepen van $a_1, a_2, \ldots, a_k$ elementen verdeeld kunnen worden) verder nog, *dat het quotiënt*

$$\frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)!}{a_1!\ a_2! \ldots a_k!}$$

door $i!$ deelbaar is [1]).

---

[1]) Zie noot 1 van blz. 144.

Door de getallen a_1, a_2, ..., a_k alle gelijk te nemen blijkt in het bijzonder:

Is $a > 0$, dan is getal $(ka)!$ deelbaar door $(a!)^k\, k!$.

844. De eigenschap van n⁰. 843 kan ook zonder combinatorische beschouwingen worden aangetoond. Volgens de eigenschap van n⁰. 837 is het product

$$\{(k-1)\,a+1\}\{(k-1)\,a+2\}\,\ldots\,\{(k-1)\,a+a-1\} \qquad (522)$$

deelbaar door $(a-1)!$. Hierbij wordt natuurlijk $a > 0$ ondersteld; wel kan men $a = 1$ nemen, in welk geval het product (522) nul factoren bevat, dus gelijk is aan 1 (zie n⁰. 311).

Het quotiënt der deeling van (522) door $(a-1)!$ is:

$$\frac{(ka-1)!}{(a-1)!\,\{(k-1)a\}!} = C_{ka-1}^{a-1}.$$

Hieruit volgt:

$$(ka)! = \{(k-1)a\}!\; a!\; k\, C_{ka-1}^{a-1}. \qquad (523)$$

Evenzoo heeft men (hierin k door $k-1$ vervangend):

$$\{(k-1)a\}! = \{(k-2)a\}!\; a!\; (k-1)\, C_{(k-1)a-1}^{a-1},$$

waardoor (523) overgaat in:

$$(ka)! = \{(k-2)a\}!\; (a!)^2 k(k-1)\, C_{ka-1}^{a-1} \,.\, C_{(k-1)a-1}^{a-1}. \qquad (524)$$

Door (523) nog eens toe te passen (na k door $k-2$ vervangen te hebben) vindt men uit (524):

$$(ka)! = \{(k-3)a\}!\; (a!)^3 k(k-1)\,(k-2)\, C_{ka-1}^{a-1} \,.\, C_{(k-1)a-1}^{a-1} \,.\, C_{(k-2)a-1}^{a-1}.$$

Zoo doorgaande krijgt men:

$$(ka)! = (a!)^k\, k!\; C_{ka-1}^{a-1} \,.\, C_{(k-1)a-1}^{a-1} \,.\, C_{(k-2)a-1}^{a-1} \ldots\ldots C_{2a-1}^{a-1}.$$

Hieruit leest men de eigenschap van n⁰. 843 af; tevens blijkt, *dat het quotiënt der deeling van $(ka)!$ door $(a!)^k\, k!$ gelijk is aan:*

$$C_{ka-1}^{a-1} \,.\, C_{(k-1)a-1}^{a-1} \,.\, C_{(k-2)a-1}^{a-1} \ldots\ldots C_{2a-1}^{a-1}$$ [1]).

845. Stelling van Catalan en Bourguet. Door Bourguet is in 1875 aan een door Catalan gevonden eigenschap de volgende uitbreiding gegeven:

---

[1]) *Dat verder b.v. $(ka+b+c)!$ door $(a!)^k b!\; c!\; k!$ deelbaar is ($a > 0$),* blijkt in verband met de eigenschap van n⁰. 836 uit

$$(ka+b+c)! = \frac{(ka+b+c)!}{(ka)!\; b!\; c!}\,(ka)!\; b!\; c!,$$

waarin $(ka)!$ weer door $(a!)^k k!$ deelbaar is.

Is $k \geqq 2$, *dan is*

$$(ka_1)!\,(ka_2)!\,\ldots\,(ka_k)! \tag{525}$$

deelbaar door

$$a_1!\,a_2!\,\ldots\,a_k!\,(a_1+a_2+\ldots+a_k)!. \tag{526}$$

Het priemgetal p komt volgens de formule (517) van LEGENDRE in de uitdrukking (525) voor met den exponent

$$\sum_i \left[\frac{ka_1}{p^i}\right] + \sum_i \left[\frac{ka_2}{p^i}\right] + \ldots + \sum_i \left[\frac{ka_k}{p^i}\right] =$$

$$= \sum_i \left\{\left[\frac{ka_1}{p^i}\right] + \left[\frac{ka_2}{p^i}\right] + \ldots + \left[\frac{ka_k}{p^i}\right]\right\},$$

waarbij de sommeeringen over de waarden 1, 2, 3, ... van i moeten worden uitgedrukt zoolang van nul verschillende termen optreden.

Evenzoo komt p in de uitdrukking (526) voor met den exponent

$$\sum_i \left[\frac{a_1}{p^i}\right] + \sum_i \left[\frac{a_2}{p^i}\right] + \ldots + \sum_i \left[\frac{a_k}{p^i}\right] + \sum_i \left[\frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{p^i}\right] =$$

$$= \sum_i \left\{\left[\frac{a_1}{p^i}\right] + \left[\frac{a_2}{p^i}\right] + \ldots + \left[\frac{a_k}{p^i}\right] + \left[\frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{p^i}\right]\right\}.$$

We bewijzen nu de stelling door aan te toonen:

$$\left[\frac{ka_1}{p^i}\right] + \left[\frac{ka_2}{p^i}\right] + \ldots + \left[\frac{ka_k}{p^i}\right] \geqq$$

$$\geqq \left[\frac{a_1}{p^i}\right] + \left[\frac{a_2}{p^i}\right] + \ldots + \left[\frac{a_k}{p^i}\right] + \left[\frac{a_1+a_2\ldots+a_k}{p^i}\right]. \tag{527}$$

Zij

$$a_1 = p^i q_1 + r_1 \quad (0 \leqq r_1 < p^i),$$
$$a_2 = p^i q_2 + r_2 \quad (0 \leqq r_2 < p^i),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_k = p^i q_k + r_k \quad (0 \leqq r_k < p^i).$$

Het eerste lid van (527) is dan:

$$k(q_1+q_2+\ldots+q_k) + \left[\frac{kr_1}{p^i}\right] + \left[\frac{kr_2}{p^i}\right] + \ldots + \left[\frac{kr_k}{p^i}\right] \tag{528}$$

en het tweede lid:

$$2(q_1+q_2+\ldots+q_k) + \left[\frac{r_1+r_2+\ldots+r_k}{p^i}\right]. \tag{529}$$

Is nu r het grootste der getallen r_1, r_2, ..., r_k, dan is $r_1+r_2+\ldots+r_k \leqq kr$, dus (528) minstens

$$k(q_1+q_2+\ldots+q_k) + \left[\frac{kr}{p^i}\right]$$

en (529) hoogstens

$$2(q_1 + q_2 + \ldots . + q_k) + \left[\frac{kr}{p^i}\right].$$

In verband met $k \geqq 2$ voert dit tot (527).

---

846. Derde vorm van de formule van Legendre. Men kan aan de formule (517) van LEGENDRE nog een anderen vorm geven door het getal n in het p-tallig stelsel te schrijven, aldus:

$$n = c_m c_{m-1} \ldots . c_2 c_1 c_0 =$$
$$= c_m p^m + c_{m-1} p^{m-1} + \ldots . + c_2 p^2 + c_1 p + c_0. \qquad (530)$$

Men heeft dan:

$$\left[\frac{n}{p}\right] = c_m p^{m-1} + c_{m-1} p^{m-2} + \ldots . + c_2 p + c_1,$$

$$\left[\frac{n}{p^2}\right] = c_m p^{m-2} + c_{m-1} p^{m-3} + \ldots . + c_2,$$

. . . .

$$\left[\frac{n}{p^{m-1}}\right] = c_m p + c_{m-1},$$

$$\left[\frac{n}{p^m}\right] = c_m,$$

terwijl $\left[\frac{n}{p^{m+1}}\right]$, $\left[\frac{n}{p^{m+2}}\right]$, enz. alle nul zijn. Uit bovenstaande vergelijkingen volgt:

$$\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \ldots . + \left[\frac{n}{p^m}\right] = c_m(p^{m-1} + p^{m-2} + \ldots . + p + 1) +$$
$$+ c_{m-1}(p^{m-2} + p^{m-3} + \ldots . + p + 1) + \ldots . c_2(p + 1) + c_1 =$$
$$= \frac{c_m(p^m - 1) + c_{m-1}(p^{m-1} - 1) + \ldots . + c_2(p^2 - 1) + c_1(p - 1)}{p - 1} =$$
$$= \frac{c_m p^m + c_{m-1} p^{m-1} + \ldots . + c_2 p^2 + c_1 p + c_0 - (c_m + c_{m-1} + \ldots . + c_2 + c_1 + c_0)}{p - 1}.$$

In verband met (530) kan dus voor de formule van LEGENDRE geschreven worden:

$$\varepsilon(n) = \frac{n - (c_m + c_{m+1} + \ldots . + c_2 + c_1 + c_0)}{p - 1}. \qquad (531)$$

Men vindt zoo:

De exponent, waarmede het priemgetal p in $n!$ voorkomt is, gelijk aan

$$\frac{n - s(n)}{p - 1}\ ^{1)},$$

waarin $s(n)$ de som der cijfers voorstelt van het getal n geschreven in het p-tallig stelsel [2]).

847. Als voorbeeld vragen we naar den exponent, waarmede 7 in 10000! voorkomt. Om dien exponent te vinden brengen we 10000 volgens de methode van n^0. 482 (dus door opvolgende in het tientallig stelsel uitgevoerde deelingen) in het zeventallig stelsel over. De berekening is dan aldus:

$$7 \,/\, 10000 \,\backslash\, 1428 \qquad 7 \,/\, 1428 \,\backslash\, 204 \qquad 7 \,/\, 204 \,\backslash\, 29 \qquad 7 \,/\, 29 \,\backslash\, 4$$

7	14	14	28
30	28	64	*1*
28	28	63	
20	*0*	*1*	
14			
60			
56			
4			

In het zeventallig stelsel is het getal 10000 dus 41104, zoodat men voor den gezochten exponent vindt $\frac{10000 - 10}{6} = 1665$.

Volgens de in n^0. 833 aangegeven methode vindt men den exponent als $1428 + 204 + 29 + 4 = 1665$. Beide methoden voeren nagenoeg even snel tot het doel.

848. Exponent, waarmede 2 in $n!$ voorkomt. Een zeer eenvoudigen vorm neemt de eigenschap van n^0. 846 aan als $p = 2$ is. Daar men in het tweetallig stelsel slechts de cijfers 0 en 1 heeft (zie n^0. 425), luidt de eigenschap, volgens welke n op één en slechts één manier als een getal in het p-tallig stelsel te schrijven is (zie n^0. 412 en 417), dan aldus:

---

[1]) Dat $n - s(n)$ door $p - 1$ deelbaar is, ligt in de eigenschap van n^0. 710 opgesloten.

[2]) De juistheid der eigenschap voor $p > n$ (in welk geval genoemde exponent nul is) blijkt ook direct daaruit, dat n dan in het p-tallig stelsel een getal van één cijfer is, dus $s = n$.

Een natuurlijk getal is steeds, en op slechts één manier, als een som van verschillende machten van 2 (de nulde macht inbegrepen) te schrijven.

De eigenschap van n⁰. 846 luidt dan:

De exponent, waarmede 2 in n! voorkomt, is gelijk aan n — s, waarin s het aantal verschillende machten van 2 voorstelt, waarvan n de som is.

849. Als voorbeeld vragen we naar den exponent, waarmede 2 in 62300! voorkomt. De berekening is aldus:

$$
\begin{aligned}
62300 &= 2 \,.\, 31150 \quad, \\
31150 &= 2 \,.\, 15575 \quad, \\
15575 &= 2 \,.\, 7787 + 1, \\
7787 &= 2 \,.\, 3893 + 1, \\
3893 &= 2 \,.\, 1946 + 1, \\
1946 &= 2 \,.\, 973 \quad, \\
973 &= 2 \,.\, 486 + 1, \\
486 &= 2 \,.\, 243 \quad, \\
243 &= 2 \,.\, 121 + 1, \\
121 &= 2 \,.\, 60 + 1, \\
60 &= 2 \,.\, 30 \quad, \\
30 &= 2 \,.\, 15 \quad, \\
15 &= 2 \,.\, 7 + 1, \\
7 &= 2 \,.\, 3 + 1, \\
3 &= 2 \,.\, 1 + 1.
\end{aligned}
$$

In het tweetallig stelsel wordt 62300 dus geschreven als

1111001101011100,

zoodat de gevraagde exponent gelijk is aan 62300 — 10 = 62290. De methode van n⁰. 833, volgens welke de som der 15 partiëele quotiënten (31150, 15575, ..., 3, 1) gevormd moet worden, is nu minder aan te bevelen.

850. Men kan de omvorming van het getal 62300 tot het tweetallig stelsel bekorten door geen deelingen door 2, maar b.v. door $2^3 = 8$ uit te voeren. Men vindt dan:

$$\begin{aligned} 62300 &= 8 \,.\, 7787 + \mathbf{\mathit{4}}, \\ 7787 &= 8 \,.\, 973 + \mathbf{\mathit{3}}, \\ 973 &= 8 \,.\, 121 + \mathbf{\mathit{5}}, \\ 121 &= 8 \,.\, 15 + \mathbf{\mathit{1}}, \\ 15 &= 8 \,.\, \mathbf{\mathit{1}} + \mathbf{\mathit{7}}. \end{aligned}$$

Daar nu de resten 4, 3, 5, 1, 7 en het laatste quotiënt 1 in het tweetallig stelsel resp. zijn:

$$100, \quad 11, \quad 101, \quad 1, \quad 111, \quad 1, \qquad\qquad (532)$$

vindt men voor 62300 in het tweetallig stelsel:

$$1 \,.\, 10^{15} + 111 \,.\, 10^{12} + 1 \,.\, 10^{9} + 101 \,.\, 10^{6} + 11 \,.\, 10^{3} + 100 =$$
$$= 1111001101011100.$$

Daar het alleen om het aantal in dit getal voorkomende cijfers 1 te doen is, heeft men slechts de vet gedrukte getallen in het tweetallig stelsel te schrijven en de daarin te zamen voorkomende cijfers 1, dus het aantal cijfers 1 van de getallen (532), te tellen.

851. In het tweetallig stelsel wordt het optellen en vermenigvuldigen buitengewoon eenvoudig doordat de tafel van optelling dan slechts uit $1 + 1 = 10$ en de tafel van vermenigvuldiging slechts uit $1 \,.\, 1 = 1$ bestaat. De vermenigvuldiging is dan niets anders dan optelling en de deeling niets dan herhaalde aftrekking (daar ieder cijfer van het quotiënt 0 of 1 is). Nevenstaande voorbeelden doen zien.

$$\begin{array}{r} 1011 \\ 1101 \\ \hline 1011 \\ 1011 \\ 1011 \\ \hline 10001111 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} 110101001 = 101111 \,.\, 1001 + 10 \\ 1001 \\ \hline 10001 \\ 1001 \\ \hline 10000 \\ 1001 \\ \hline 1110 \\ 1001 \\ \hline 1011 \\ 1001 \\ \hline 10 \end{array}$$

852. Men kan de in n⁰. 849 en 850 besproken omvorming van het getal 62300 tot het tweetallig stelsel ook volgens de methode van n⁰. 483 (dus door vermenigvuldigingen in het twee-

tallig stelsel) uitvoeren. Daar de getallen 6, 2, 3 en 10 in het tweetallig stelsel luiden 110, 10, 11, 1010, wordt de berekening aldus:

110	1001101100
110	11
111100	1001101111
10	1001101111
111110	1100001010110
111110	1100001010110
1001101100	1111001101011100

853. Stelling van André. Is p een priemgetal, dan heeft men volgens de formule (517) van LEGENDRE (zie n⁰. 831), in verband met de eigenschap van n⁰. 456:

$$\varepsilon(np^i) = \left[\frac{np^i}{p}\right] + \left[\frac{np^i}{p^2}\right] + \ldots + \left[\frac{np^i}{p^i}\right] + \left[\frac{np^i}{p^{i+1}}\right] + \left[\frac{np^i}{p^{i+2}}\right] + \ldots =$$

$$= np^{i-1} + np^{i-2} + \ldots + np + n + \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \ldots$$

In verband met (517) leest men hieruit af:

Is $\varepsilon(n)$ de exponent, waarmede het priemgetal p in $n!$ voorkomt, dan komt p in $(np^i)!$ voor met den exponent

$$\varepsilon(np^i) = n\frac{p^i - 1}{p - 1} + \varepsilon(n). \tag{533}$$

854. In het quotiënt (polynomiaalcoëfficiënt)

$$\frac{(ka)!}{(a!)^k}$$

komt p voor met den exponent

$$\varepsilon(ka) - k\,\varepsilon(a).$$

We schrijven het getal a in het p-tallig stelsel, aldus:

$$a = c_m p^m + c_{m-1}p^{m-1} + \ldots + c_2 p^2 + c_1 p + c_0.$$

Volgens de eigenschap van n⁰. 836 is dan:

$$\varepsilon(ka) \geqq \varepsilon(kc_m p^m) + \varepsilon(kc_{m-1}p^{m-1}) + \ldots + \varepsilon(kc_2 p^2) + \varepsilon(kc_1 p) + \varepsilon(kc_0).$$

Hieruit volgt in verband met de eigenschap van n⁰. 853:

$$\varepsilon(ka) \geqq k\,\frac{c_m(p^m - 1) + c_{m-1}(p^{m-1} - 1) + \ldots + c_2(p^2 - 1) + c_1(p - 1)}{p - 1} +$$

$$+ \varepsilon(kc_m) + \varepsilon(kc_{m-1}) + \ldots + \varepsilon(kc_1) + \varepsilon(kc_0) =$$

$$= k\,\frac{a - (c_m + c_{m-1} + \ldots + c_0)}{p - 1} + \varepsilon(kc_m) + \varepsilon(kc_{m-1}) + \ldots + \varepsilon(kc_1) + \varepsilon(kc_0).$$

Volgens de formule (531) van n⁰. 846 heeft men dus:

$$\varepsilon(ka) - k\,\varepsilon(a) \geqq \varepsilon(kc_m) + \varepsilon(kc_{m-1}) + \ldots + \varepsilon(kc_1) + \varepsilon(kc_0). \quad (534)$$

Nu is $(kc_j)!$ deelbaar door $(k!)^{c_j}$ (zie de eigenschap van n⁰. 836), dus:

$$\varepsilon(kc_j) \geqq c_j \varepsilon(k),$$

waardoor uit (534) volgt:

$$\varepsilon(ka) - k\,\varepsilon(a) \geqq (c_m + c_{m-1} + \ldots + c_1 + c_0)\,\varepsilon(k).$$

Hieruit leest men af:

Het priemgetal p komt in $\frac{(ka)!}{(a!)^k}$ *met minstens denzelfden exponent voor als in* $(k!)^s$, *waarin s de som der cijfers van a voorstelt als dit getal in het p-tallig stelsel geschreven wordt.*

855. Uit de eigenschap van n⁰. 854 vloeit de volgende door D. André in 1881 medegedeelde stelling voort:

Is t de kleinste cijfersom, die het getal a in eenig talstelsel met een priemgetal als grondtal bezit, dan is (ka)! deelbaar door $(a!)^k(k!)^t$.

Immers voor ieder priemgetal p is dan het getal s van n⁰. 854 grooter dan of gelijk aan t, zoodat ieder priemgetal volgens de eigenschap van n⁰. 854 in $\frac{(ka)!}{(a!)^k}$ met minstens denzelfden exponent voorkomt als in $(k!)^t$ en dus $\frac{(ka)!}{(a!)^k}$ door $(k!)^t$ deelbaar is.

Daar de som der cijfers van a voor ieder grondtal minstens 1 is [1]), is $t \geqq 1$, zoodat de eigenschap van n⁰. 843 in de nu beschouwde ligt opgesloten.

856. Daar ieder getal minstens gelijk is aan de som zijner cijfers, is $s \leqq a$, waarin s de som der cijfers van a is. De gelijkheid $s = a$ geldt dan en alleen dan als a uit één cijfer bestaat, dus als het grondtal van het talstelsel $> a$ is.

Is $a > 1$, dan is er steeds een priemgetal p, waarvoor $p \leqq a$ is, dus waarvoor de som der cijfers van a in het p-tallig stelsel $< a$ is. Hieruit blijkt, *dat voor* $a > 1$ *de in de eigenschap van*

---

[1]) Tenminste als $a > 0$ is. De eigenschap van André blijft echter gelden voor $a = 0$, daar dan ook $t = 0$ is.

n^0. 855 genoemde kleinste cijfersom t, die het getal a in eenig talstelsel met ondeelbaar grondtal bezit, kleiner dan a is.

Om het getal t te bepalen heeft men voor de grondtallen slechts de priemgetallen $\leqq a$ te nemen, daar de overige priemgrondtallen een cijfersom a, dus niet een zoo klein mogelijke cijfersom leveren. *Is a een priemgetal of een macht daarvan, dan is $t = 1$,* zooals blijkt door dat priemgetal als grondtal te nemen.

857. Omvorming der stelling van André. Is s de som der cijfers van een getal a, dan is a als som van s machten van het grondtal g (nulde machten inbegrepen) te schrijven; de cijfers van a geven daarbij aan hoeveel maal een zelfde macht van g in deze som voorkomt. Daar ieder cijfer $< g$ is, komt bij deze splitsing een zelfde macht van g hoogstens $(g - 1)$-maal voor.

Heeft men een splitsing van a in een som van machten van g, waarbij een zekere macht van g (b.v. g^i) minstens g-maal voorkomt, dan is a als een som van een kleiner aantal machten van g te schrijven; de g termen g^i kunnen nl. door den enkelen term g^{i+1} worden vervangen.

Daar nu volgens de eigenschap van n^0. 417 het getal a slechts op één manier als een som van machten van g te schrijven is zoodanig, dat een zelfde macht hoogstens $(g - 1)$-maal voorkomt, heeft men:

Een getal a is slechts op één manier in een som van machten van g $(g > 1)$ te splitsen zoodanig, dat het aantal termen dier som zoo klein mogelijk is. Deze splitsing is niets anders dan de omvorming van a tot een getal in het g-tallig stelsel.

858. Uit de eigenschap van n^0. 857 blijkt, *dat de som der cijfers van het getal a in het g-tallig stelsel ook op te vatten is als het kleinste aantal machten van g (nulde machten inbegrepen), waarin a kan worden gesplitst.* Hieruit volgt, dat de eigenschap van n^0. 855 ook aldus kan worden geformuleerd:

Is t het kleinste aantal (al of niet verschillende) machten van een eenig priemgetal, waarin het getal a kan worden gesplitst, dan is $(ka)!$ deelbaar door $(a!)^k(k!)^t$.

Ook hieruit blijkt onmiddellijk, dat $t = 1$ is als a een macht van een priemgetal is en in geen ander geval.

Bevat a minstens twee verschillende priemfactoren, dan is $t \geqq 2$, dus $\frac{(ka)!}{(a!)^k}$ deelbaar door $(k!)^2$. Voor $a = 1$ bestaat die deelbaarheid alleen als $k = 1$ of $= 0$ is.

859. Bevat het getal a geen twee verschillende priemfactoren, dan is a een macht van een priemgetal, dus

$$a = p^l.$$

Is $a > 1$ (dus $l > 0$), dan is voor ieder ander priemgetal het getal s der eigenschap van n⁰. 854 minstens 2, zoodat een van p verschillend priemgetal in

$$\frac{(ka)!}{(a!)^k} = \frac{(kp^l)!}{(p^l!)^k} \tag{535}$$

met minstens denzelfden exponent voorkomt als in $(k!)^2$.

We beschouwen nu den exponent, waarmede het priemgetal p in het tweede lid van (535) voorkomt. Deze is:

$$\varepsilon(kp^l) - k\,\varepsilon(p^l),$$

dus volgens de formule (533) van n⁰. 853 (lettend op $\varepsilon(1) = 0$) gelijk aan

$$k\frac{p^l - 1}{p - 1} + \varepsilon(k) - k\frac{p^l - 1}{p - 1} = \varepsilon(k).$$

De gezochte exponent is dus dezelfde als die, waarmede p in $k!$ voorkomt, dus kleiner dan de exponent, waarmede p in $(k!)^2$ voorkomt, behalve als $\varepsilon(k) = 0$ dus $k < p$ is; het tweede lid van (535) is dus dan en alleen dan door $(k!)^2$ deelbaar als $k < p$ is.

In verband met het aan het eind van n⁰. 858 opgemerkte vinden we dus:

Het getal $\frac{(ka)!}{(a!)^k}$ *is deelbaar door* $(k!)^2$ *behalve in het geval, dat* $a = 1$ *en* $k > 1$ *is, en in het geval, dat* a *een macht van een priemgetal* p *(met exponent* > 0*) en* $k \geqq p$ *is.*

Men kan beide uitzonderingsgevallen samenvatten tot het geval, *dat* a *te schrijven is als macht van een priemgetal, dat* $\leqq k$ *is.* Hiertoe behoort nl. ook het geval, dat $a = 1$ en $k > 1$ is, zooals blijkt door a dan als 2^0 te schrijven.

860. Som der cijfers van een som van eenige getallen. Uit den in n°. 438 en 439 besproken algorithmus volgt zonder moeite: *De som der cijfers van de som van eenige getallen is gelijk aan de som van de cijfersommen dier getallen verminderd met* $A(g-1)$, *waarin* g *het grondtal voorstelt en* A *het aantal malen, dat men bij het optellen* g g^i*-tallen door een* g^{i+1}*-tal heeft moeten vervangen, dus de som der getallen, die men bij het optellen heeft moeten onthouden.*

Stellen we evenals in n°. 846 de cijfersom van het getal n door $s(n)$ voor, dan luidt de eigenschap in formule:

$$s(a_1+a_2+\ldots+a_l)=s(a_1)+s(a_2)+\ldots+s(a_l)-A(g-1). \quad (536)$$

861. Het bewijs der eigenschap van n°. 860 wordt daardoor geleverd, dat men de som der getallen $a_1, a_2, \ldots, a_l$ eerst in den vorm (264) van n°. 430 brengt (zie ook n°. 438), waarbij t_i de som van de cijfers der g^i-tallen is.

Men heeft dan:

$$t_m+t_{m-1}+\ldots+t_1+t_0=s(a_1)+s(a_2)+\ldots+s(a_l). \quad (537)$$

Vervolgens moet de uitdrukking (264) op de in n°. 431 aangegeven wijze tot een getal in het g-tallig stelsel herleid worden. Dit komt daarop neer, *dat men bij herhaling* $g \cdot g^i$ *door* g^{i+1} *vervangt.* Hierbij wordt het getal t_i met g verkleind en t_{i+1} met 1 vergroot, zoodat de som der getallen t_0, t_1, t_2, enz. met $g-1$ afneemt. Is het voor de herleiding tot een getal in het g-tallig stelsel noodig A-maal de genoemde vervanging uit te voeren, dan is de som der getallen t_0, t_1, t_2, enz. in het geheel met $A(g-1)$ afgenomen. Daar die som ten slotte in de som der cijfers van $a_1+a_2+\ldots+a_l$ is overgegaan, voert (537) tot (536).

862. Men kan het betoog ook zoo inkleeden, dat men uit de gelijkheden (265) en (266) van n°. 431 door optelling der overeenkomstige leden afleidt:

$$t_0+t_1+t_2+\ldots+t_m+q_1+q_2+\ldots+q_m=$$
$$=u_0+u_1+\ldots+u_m+g(q_1+q_2+\ldots+q_m)+u_{m+k}g^k+u_{m+k-1}g^{k-1}+\ldots+u_{m+1}g,$$

of:

$$t_0+t_1+t_2+\ldots+t_m-(u_0+u_1+\ldots+u_m+u_{m+1}+\ldots+u_{m+k})=$$
$$=(g-1)\{q_1+q_2+\ldots+q_m+u_{m+1}+u_{m+2}(g+1)+u_{m+3}(g^2+g+1)+$$
$$+\ldots+u_{m+k}(g^{k-1}+g^{k-2}+\ldots+g+1)\}. \quad (538)$$

Hierin is $u_0 + u_1 + \ldots + u_{m+k}$ de som der cijfers van het door (264) voorgestelde getal (dus van $a_1 + a_2 + \ldots + a_l$), terwijl in het tweede lid van (538) de uitdrukking tusschen accoladen niets anders is dan het getal A van n⁰. 860 en 861. Zoo wijst b.v.

$$t_i + q_i = q_{i+1}g + u_i \; (i < m)$$

aan, dat $(q_{i+1}g)g^i$ vervangen wordt door $q_{i+1}g^{i+1}$, hetgeen neerkomt op q_{i+1}-malige vervanging van $g \,.\, g^i$ door g^{i+1}. Schrijft men verder voor (266):

$$\begin{aligned} t_m + q_m &= (u_{m+k}g^{k-1} + u_{m+k-1}g^{k-2} + \ldots + u_{m+1})g + u_m = \\ &= \{(u_{m+k}g^{k-2} + u_{m+k-1}g^{k-3} + \ldots + u_{m+2})g + u_{m+1}\}g + u_m = \\ &= [\{(u_{m+k}g^{k-3} + u_{m+k-1}g^{k-4} + \ldots + u_{m+3})g + u_{m+2}\}g + u_{m+1}]g + u_m = \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

dan blijkt, dat dit neerkomt op een aantal vervangingen van de beschouwde soort gelijk aan

$$\begin{aligned} & u_{m+k}g^{k-1} + u_{m+k-1}g^{k-2} + \ldots + u_{m+3}g^2 + u_{m+2}g + u_{m+1} + \\ & + u_{m+k}g^{k-2} + u_{m+k-1}g^{k-3} + \ldots + u_{m+3}g + u_{m+2} + \\ & + u_{m+k}g^{k-3} + u_{m+k-1}g^{k-4} + \ldots + u_{m+3} + \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots + \\ & + u_{m+k}g + u_{m+k-1} + \\ & + u_{m+k} = \\ & = u_{m+k}(g^{k-1} + g^{k-2} + \ldots + g + 1) + u_{m+k-1}(g^{k-2} + g^{k-3} + \ldots + g + 1) + \\ & \quad + \ldots + u_{m+3}(g^2 + g + 1) + u_{m+2}(g + 1) + u_{m+1}. \end{aligned}$$

863. Als voorbeeld in het tientallig stelsel nemen we de optelling

8 3 5 9 7 6 2	4 0	4
7 6 8 3 5 6	3 5	8
9 7 5 9 4 8 3	4 5	9
9 9 8 9 7 5 0	4 7	11
8 4 3 8 8 6 7	4 4	8
9 8 6 9 9 7 6	5 4	9
9 9 4 8 7 3 9	4 9	13
8 7 6 9 8 7 4	4 9	13
9 6 3 8 4 0 6	3 6	9
9 9 8 9 8 4 5	5 2	7
8 8 5 9 7 9 8	5 4	9
9 5 6 7 8 0 0	3 5	8
1 0 3 9 6 0 6 5 6 {36}	5 4 0 {9}	108
(1) (10) (8) (7) (11) (8) (6) (5) {56}	(5) (6) {11}	

De getallen boven de streep in de tweede en derde kolom zijn de sommen der cijfers van de naast geplaatste getallen der eerste resp. tweede kolom. De tusschen haakjes geplaatste getallen onder de cijfers van de som der getallen van de eerste kolom en de som der getallen van de tweede kolom wijzen aan hoeveel maal telkens tien 10^i-tallen door een 10^{i+1}-tal zijn vervangen [1]). De sommen der cijfers van de sommen der getallen uit de tweede en derde kolom zijn tusschen accoladen achter de bijbehoorende getallen geplaatst. Evenzoo zijn tusschen accoladen opgenomen de sommen der getallen, die men bij de gedeeltelijke optellingen heeft moeten onthouden.

Inderdaad is nu (overeenkomstig de eigenschap van n°. 860):

$$36 = 540 - 56\,(10 - 1) = 540 - 504,$$
$$9 = 108 - 11\,(10 - 1) = 108 - 99.$$

864. Som der cijfers van een product. De algorithmus tot vorming van het product van twee getallen a en b, zoowel de gewone algorithmus van n°. 449 als de kortere van n°. 450, komt neer op het *vermenigvuldigen van ieder cijfer van a met ieder cijfer van b gevolgd door optelling der zoo verkregen getallen als men daar het behoorlijke aantallen nullen achter plaatst* (of achter geplaatst denkt). Beide algorithmen verschillen slechts in de wijze, waarop die optelling wordt uitgevoerd (met betrekking tot het samennemen van termen).

We beschouwen nu de producten P, die men krijgt door telkens een cijfer van a met een cijfer van b te vermenigvuldigen. De som dier producten met achtergevoegde nullen (d. i. het product ab) heeft volgens de eigenschap van n°. 860 een cijfersom gelijk aan $S - A(g - 1)$, waarin S voorstelt de som der cijfers van alle producten P en A de som der getallen, die men bij het optellen heeft moeten onthouden. De producten P (zonder achtergevoegde nullen) bestaan uit hoogstens twee cijfers. Is van die producten S_1 de som van de cijfers der eenheden en S_2 de

---

1) Dus de getallen, die men bij de verschillende optellingen heeft moeten onthouden en bijvoegen bij de som der cijfers van een 1 hoogeren rang.

som van de cijfers der g-tallen, dan is $S = S_1 + S_2$, zoodat men met de notatie van n⁰. 846 en 860 heeft:

$$s(ab) = S_1 + S_2 - A(g - 1) = S_2 g + S_1 - (S_2 + A)(g - 1).$$

Hierin is $S_2 g + S_1$ de som der getallen P (zonder achtergevoegde nullen), dus gelijk aan $s(a) \,.\, s(b)$. Men vindt derhalve:

$$s(ab) = s(a) \,.\, s(b) - (S_2 + A)(g - 1). \tag{539}$$

Het getal S_2, — d. i. de som van de cijfers der g-tallen voor de producten P, die ontstaan door telkens een cijfer van a met een cijfer van b te vermenigvuldigen —, is de som der getallen, die men bij de verschillende vermenigvuldigingen heeft moeten onthouden. Bijgevolg stelt $S_2 + A$ voor de som der getallen, die men, hetzij bij de vermenigvuldigingen hetzij bij de optelling, heeft moeten onthouden.

Uit (539) leest men dus de volgende eigenschap af:

De som der cijfers van het product ab is gelijk aan het product der cijfersommen van a en b verminderd met $B(g - 1)$, waarin g het grondtal voorstelt en B het aantal malen, dat men bij het vermenigvuldigen of optellen g g^i-tallen door een g^{i+1}-tal vervangen heeft, dus de som der getallen, die men bij de verschillende onderdeelen der berekening heeft moeten onthouden.

In formule luidt dit:

$$s(ab) = s(a) \,.\, s(b) - B(g - 1). \tag{540}$$

865. Als voorbeeld in het tientallig stelsel nemen we de volgende vermenigvuldiging:

```
     6 5 7 1 8 {27}
       4 2 9 5 {20}
   -------------
   2 6 2 8 7 2
    (2)(2)(2) (3)
     1 3 1 4 3 6
      (1)(1)(1) (1)
       5 9 1 4 6 2
        (5)(5)(6)(1)(7)
         3 2 8 5 9 0
          (3)(2)(3) (4)
   ---------------------
   2 8 2 2 5 8 8 1 0 {36}
    (1)(2)(1)(1)(1)(1)
```

Hierbij wijzen de tusschen haakjes geplaatste klein gedrukte getallen de getallen aan, die men heeft moeten onthouden; de som daarvan bedraagt 56. De cijfersommen van de factoren en van het product zijn tusschen accoladen achter de bijbehoorende getallen geplaatst.

Overeenkomstig de eigenschap van n⁰. 864 heeft men nu inderdaad:

$$36 = 27 \,.\, 20 - 56 \,.\, (10 - 1) = 540 - 504.$$

866. Bepaling van de hoogste macht van $k!$, waardoor $\frac{(ka)!}{(a!)^k}$ deelbaar is. Volgens de eigenschap van n⁰. 846 is de exponent, waarmede het priemgetal p in $\frac{(ka)!}{(a!)^k}$ voorkomt, gelijk aan

$$\frac{ka - s(ka)}{p-1} - k\frac{a - s(a)}{p-1} = \frac{k \,.\, s(a) - s(ka)}{p-1}.$$

Volgens de formule (540) van n⁰. 864 kan voor dien exponent geschreven worden:

$$\frac{k \,.\, s(a) - s(k) \,.\, s(a) + B(p-1)}{p-1} =$$
$$= \frac{k - s(k)}{p-1} s(a) + B = \varepsilon(k) \,.\, s(a) + B.$$

Hierin is $\varepsilon(k)$ de exponent, waarmede p in $k!$ voorkomt.

Het priemgetal p komt alleen dan in $\frac{(ka)!}{(a!)^k}$ met minstens denzelfden exponent voor als in $(k!)^u$ als voldaan is aan:

$$\varepsilon(k) \,.\, s(a) + B \geqq u \,.\, \varepsilon(k). \qquad (541)$$

Hieraan is steeds voldaan als $p > k$ is, daar dan $\varepsilon(k) = 0$ is. Is $p \leqq k$, dus $\varepsilon(k) \geqq 1$, dan is de grootste waarde van den exponent u, waarvoor aan (541) voldaan is,

$$\left[\frac{\varepsilon(k) \,.\, s(a) + B}{\varepsilon(k)}\right] = s(a) + \left[\frac{B}{\varepsilon(k)}\right].$$

Bepaalt men die grootste waarde van u voor alle priemgetallen, die $\leqq k$ zijn, dan is de kleinste dier grootste waarden de exponent van de hoogste macht van $k!$, die op $\frac{(ka)!}{(a!)^k}$ deelbaar is. Men krijgt zoo de volgende door C. de Polignac in 1883 bewezen eigenschap:

De exponent van de hoogste macht van $k!$, die op $\frac{(ka)!}{(a!)^k}$ deelbaar is, is het kleinste der getallen

$$s(a) + \left[\frac{B}{\varepsilon(k)}\right] \qquad (542)$$

voor de priemgetallen p, die $\leqq k$ zijn. Hierin is $s(a)$ de som der cijfers van a in het p-tallig stelsel, B de som der getallen, die men bij de berekening van ka in het p-tallig stelsel heeft

moeten onthouden, en $\varepsilon(k)$ de exponent, waarmede p in $k!$ voorkomt.

867. In de eigenschap van n⁰. 866 ligt die van ANDRÉ (zie n⁰. 855) opgesloten, daar $\left[\frac{B}{\varepsilon(k)}\right] \geqq 0$ is. Hiermede is de stelling van ANDRÉ opnieuw bewezen. Is het alleen om het bewijs dier stelling te doen, dan heeft men de eigenschap van n⁰. 864 niet noodig, maar kan worden volstaan met

$$s(ab) \leqq s(a) \,.\, s(b),$$

iets waarvan de juistheid gemakkelijker is in te zien dan van de eigenschap van n⁰. 864.

868. Ook de eigenschap van n⁰. 859 volgt zonder moeite uit die van DE POLIGNAC. Dat $\frac{(ka)!}{(a!)^k}$ door $(k!)^2$ deelbaar is als a minstens twee verschillende priemfactoren bevat, volgt nl. reeds direct uit de stelling van ANDRÉ (zie het aan het eind van n⁰. 858 opgemerkte).

Is a een macht van een priemgetal p (met van nul verschillenden exponent), dan is $s(a)$, dus zeker ook de uitdrukking (542) van n⁰. 866, voor ieder van p verschillend priemgetal, dat $\leqq k$ is, minstens gelijk aan 2, zoodat $\frac{(ka)!}{(a!)^k}$ nog steeds door $(k!)^2$ deelbaar is als $p > k$ is. Is $p \leqq k$, dan is, daar a in het p-tallig stelsel geschreven wordt als 1 gevolgd door eenige nullen, $s(a) = 1$ en $B = 0$, zoodat de kleinste waarde der uitdrukking (542) dan 1 is, dus $\frac{(ka)!}{(a!)^k}$ niet door $(k!)^2$ deelbaar is.

869. Voorbeeld ter toelichting. Als voorbeeld vragen we naar de hoogste macht van 7! die op $\frac{(7\,.\,23)!}{(23!)^7}$ deelbaar is, in welk geval $a = 23$ en $k = 7$ is. Men heeft dan de priemgetallen te beschouwen, die $\leqq 7$ zijn, dus 2, 3, 5, 7. Nu heeft men:

$$\begin{aligned} 23 &= 10111 \text{ (grondtal 2)}, & s(23) &= 4, \\ &= 212 \text{ (} \quad \text{,,} \quad 3), & &= 5, \\ &= 43 \text{ (} \quad \text{,,} \quad 5), & &= 7, \\ &= 32 \text{ (} \quad \text{,,} \quad 7), & &= 5, \end{aligned}$$

$$7 = 111 \text{ (grondtal 2)}, \quad \varepsilon(7) = \frac{7-3}{1} = 4,$$
$$= 21 \text{ („ 3)}, \quad = \frac{7-3}{2} = 2,$$
$$= 12 \text{ („ 5)}, \quad = \frac{7-3}{4} = 1,$$
$$= 10 \text{ („ 7)}, \quad = \frac{7-1}{6} = 1.$$

Verder is voor $p = 2$: $B = 9$, $s(23) + \left[\frac{B}{\varepsilon(7)}\right] = 4 + \left[\frac{9}{4}\right] = 6$,

voor $p = 3$: $= 3$, $= 5 + \left[\frac{3}{2}\right] = 6$,

voor $p = 5$: $= 4$, $= 7 + \left[\frac{4}{1}\right] = 11$,

voor $p = 7$: $= 0$, $= 5 + \left[\frac{0}{1}\right] = 5$,

zooals uit de volgende vermenigvuldigingen, resp. in het twee-, drie-, vijf- en zeventallig stelsel, blijkt:

10111	212	43	32
111	21	12	10
10111	1201	43	320
10111	212	141	
10111	12222	1121	
10100001			

Daar de kleinste waarde der uitdrukking (542) van n⁰. 866 gelijk aan 5 blijkt te zijn, vindt men, *dat* $(7!)^5$ *de hoogste macht van 7! is, waardoor* $\frac{161!}{(23!)^5}$ *deelbaar is.* De stelling van André leert slechts de deelbaarheid daarvan door $(7!)^4$.

870. *Het is voor de bepaling van de kleinste waarde van* (542) *niet steeds noodig de waarde van B voor alle priemgetallen, die* $\leqq k$ *zijn, te berekenen.* Neemt nl. de uitdrukking (542) voor een bepaald priemgetal een zoodanige waarde aan, dat $s(a)$ voor de overige priemgetallen daaraan reeds minstens gelijk is, dan is men verzekerd met het kleinste der getallen (542) te doen te hebben.

Heeft men dus in het voorbeeld van n⁰. 869 gevonden, dat de

uitdrukking (542) voor $p = 2$ gelijk is aan 6, dan besluit men hieruit direct, dat 5 de kleinste waarde van (542) is. Immers uit den vorm van 7 in het zeventallig stelsel valt het onmiddellijk op, dat $B = 0$ is voor $p = 7$ en (542) dan dus de waarde 5 aanneemt, terwijl voor $p = 3$ en $p = 5$ de eerste term van (542) reeds minstens 5 is.

Het is natuurlijk aan te bevelen bij de berekening van (542) te beginnen met die waarde van p, waarvoor $s(a)$ het kleinst is, dus in het voorbeeld vau n⁰. 869 met $p = 2$. Vindt men dan $B = 0$, dan is reeds direct de kleinste waarde van (542) gevonden, terwijl die mogelijkheid ook nog bestaat als men voor B een grootere waarde vindt.

871. Het voorbeeld van n⁰. 869 kan natuurlijk ook zonder de eigenschap van DE POLIGNAC (zie n⁰. 866) behandeld worden. Daartoe bepalen we met behulp van de formule (517) van LEGENDRE de exponenten, waarmede de priemgetallen 2, 3, 5 en 7 (de eenige, die in 7! voorkomen) in $\frac{161}{(23!)^7}$ en in 7! zijn aangedaan.

Uit

$$\left[\frac{161}{2}\right]+\left[\frac{161}{2^2}\right]+\left[\frac{161}{2^3}\right]+\left[\frac{161}{2^4}\right]+\left[\frac{161}{2^5}\right]+\left[\frac{161}{2^6}\right]+\left[\frac{161}{2^7}\right]=$$
$$=80+40+20+10+5+2+1=158,$$

$$\left[\frac{161}{3}\right]+\left[\frac{161}{3^2}\right]+\left[\frac{161}{3^3}\right]+\left[\frac{161}{4^4}\right]=53+17+5+1=76,$$

$$\left[\frac{161}{5}\right]+\left[\frac{161}{5^2}\right]+\left[\frac{161}{5^3}\right]=32+6+1=39,$$

$$\left[\frac{161}{7}\right]+\left[\frac{161}{7^2}\right]=23+3=26;$$

$$\left[\frac{23}{2}\right]+\left[\frac{23}{2^2}\right]+\left[\frac{23}{2^3}\right]+\left[\frac{23}{2^4}\right]=11+5+2+1=19,$$

$$\left[\frac{23}{3}\right]+\left[\frac{23}{3^2}\right]=7+2=9, \qquad \left[\frac{23}{5}\right]=4, \qquad \left[\frac{23}{7}\right]=3;$$

$$\left[\frac{7}{2}\right]+\left[\frac{7}{2^2}\right]=3+1=4, \quad \left[\frac{7}{3}\right]=2, \quad \left[\frac{7}{5}\right]=1, \quad \left[\frac{7}{7}\right]=1$$

volgt, dat de priemgetallen 2, 3, 5, 7 in $\frac{161!}{(23!)^7}$ resp. voorkomen met de exponenten

$158 - 7 \cdot 19 = 25,\ 76 - 7 \cdot 9 = 13,\ 39 - 7 \cdot 4 = 11,\ 26 - 7 \cdot 3 = 5$

en in 7! resp. met de exponenten 4, 2, 1, 1. Voor den exponent van de hoogste macht van 7!, waarin het priemgetal 2, 3, 5 of 7 met geen hoogeren exponent voorkomt dan in $\frac{161!}{(23!)^7}$ wordt dus resp. gevonden:

$$\left[\frac{25}{4}\right] = 6, \left[\frac{13}{2}\right] = 6, \left[\frac{11}{1}\right] = 11, \left[\frac{5}{1}\right] = 5.$$

Dit is in overeenstemming met het in n⁰. 869 gevondene.

---

872. Triadische getallen. Volgens de eigenschap van n⁰. 846 wordt de exponent, waarmede het priemgetal 3 in $n!$ voorkomt, gevonden door n te schrijven als een ***triadisch getal***, d. w. z. een *getal in het drietallig stelsel*. De cijfers van zulk een getal zijn 0, 1 of 2, m. a. w. de triadische schrijfwijze is

$$n = c_m \cdot 3^m + c_{m-1} \cdot 3^{m-1} + c_{m-2} \cdot 3^{m-2} + \ldots + c_1 \cdot 3 + c_0, \quad (543)$$

waarin c_m, c_{m-1}, ..., c_1, c_0 slechts de waarden 0, 1, 2 kunnen hebben.

De tafel van optelling in dit talstelsel luidt:

$$1 + 1 = 2,\ 1 + 2 = 10,\ 2 + 2 = 11,$$

de tafel van vermenigvuldiging:

$$1 \cdot 1 = 1,\ 1 \cdot 2 = 2,\ 2 \cdot 2 = 11.$$

873. Splitsing van een getal in een aggregaat van verschillende machten van 3. Is minstens één der cijfers van het door (543) aangegeven getal n gelijk aan 2 en is c_j het laatste cijfer 2, dan vindt men (door c_j door 3 — 1 te vervangen en den term $3 \cdot 3^j = 3^{j+1}$ met $c_{j+1} \cdot 3^{j+1}$ te vereenigen):

$$n = c_m \cdot 3^m + c_{m-1} \cdot 3^{m-1} \ldots + c_{j+2} \cdot 3^{j+2} +$$
$$+ (c_{j+1} + 1)\, 3^{j+1} - 3^j + c_{j-1} \cdot 3^{j-1} + \ldots + c_1 \cdot 3 + c_0. \quad (544)$$

Hierin zijn c_{j-1}, ..., c_1, c_0 alle 0 of 1. Het geval, dat reeds $c_0 = 2$ is, ligt in het voorgaande als het geval $j = 0$ opgesloten; dan is $-3^j = -1$, terwijl de daarop volgende termen ten getale van $j = 0$ aanwezig zijn, dus ontbreken.

Is $c_{j+1} = 2$, dan kan voor (544) geschreven worden:

$$n = c_m \cdot 3^m + c_{m-1} \cdot 3^{m-1} + \ldots + c_{j+3} \cdot 3^{j+3} +$$
$$+ (c_{j+2} + 1)\, 3^{j+2} - 3^j + c_{j-1} \cdot 3^{j-1} + \ldots + c_1 \cdot 3 + c_0. \quad (545)$$

Is ook $c_{j+2} = 2$, dan gaat dit over in:

$$n = c_m \,.\, 3^m + c_{m-1} \,.\, 3^{m-1} + \ldots + c_{j+4} \,.\, 3^{j+4} +$$
$$+ (c_{j+3} + 1) \,.\, 3^{j+3} - 3^j + c_{j-1} \,.\, 3^{j-1} + \ldots + c_1 \,.\, 3 + c_0, \qquad (546)$$

enz.

Komt na afloop dezer herleidingen nog minstens één der machten van 3 met den coëfficiënt 2 voor, dan vervangen we den meest rechts staanden coëfficiënt 2 weer door 3 — 1 en handelen verder op dezelfde wijze als boven. Zoo doorgaande kan men, van rechts naar links gaande, alle coëfficiënten 2 verdrijven, waarvoor dan echter coëfficiënten — 1 in de plaats komen. Men heeft dus:

Ieder natuurlijk getal is als een aggregaat van verschillende machten van 3 te schrijven.

Hierbij is onder een ***aggregaat van eenige getallen*** te verstaan de *som dier getallen nadat mogelijk eenige daarvan van teeken zijn omgekeerd.*

874. Uit de vormingswijze van het in n⁰. 873 beschouwde aggregaat is direct te zien, *dat de hoogste macht van 3 met het teeken + is aangedaan* (verg. n⁰. 877).

Verder blijkt gemakkelijk, *dat in het aggregaat de exponent van de hoogste macht van 3 gelijk is aan of 1 grooter dan de grootste exponent van 3, die in de oorspronkelijke formule* (543) *voor n* (triadische schrijfwijze van *n*) *voorkomt.* Het laatste geval doet zich dan en alleen dan voor *als in de triadische schrijfwijze een cijfer 2 voorkomt, waaraan* (*zoo het niet het eerste cijfer is*) *uitsluitend cijfers 1 voorafgaan;* we laten dit aan den lezer over na te gaan.

875. Ter verduidelijking laten we een voorbeeld van de in n⁰. 873 besproken omzetting volgen:

$$\begin{aligned}
1120102211 &= 3^9 + 3^8 + 2\,.\,3^7 + 3^5 + 2\,.\,3^3 + 2\,.\,3^2 + 3 + 1 \\
&= 3^9 + 3^8 + 2\,.\,3^7 + 3^5 + 3\,.\,3^3 - 3^2 + 3 + 1 \\
&= 3^9 + 3^8 + 2\,.\,3^7 + 3^5 + 3^4 - 3^2 + 3 + 1 \\
&= 3^9 + 2\,.\,3^8 - 3^7 + 3^5 + 3^4 - 3^2 + 3 + 1 \\
&= 2\,.\,3^9 - 3^8 - 3^7 + 3^5 + 3^4 - 3^2 + 3 + 1 \\
&= 3^{10} - 3^9 - 3^8 - 3^7 + 3^5 + 3^4 - 3^2 + 3 + 1.
\end{aligned}$$

Deze herleidingen zijn gemakkelijk uit het hoofd uit te voeren,

zoodat men het aggregaat onmiddellijk kan neerschrijven als de triadische schrijfwijze gegeven is; men heeft slechts, rechts beginnend, ieder cijfer 2 door — 1 te vervangen en daarbij het voorafgaande cijfer met 1 te verhoogen.

876. We laten hier de eerste 50 getallen, geschreven als aggregaten van verschillende machten van 3 volgen. De tweede en derde kolom geven deze getallen resp. in het tien- en in het drietallig stelsel.

1	1	1	26	222	$3^3 - 1$
2	2	$3 - 1$	27	1000	3^3
3	10	3	28	1001	$3^3 + 1$
4	11	$3 + 1$	29	1002	$3^3 + 3 - 1$
5	12	$3^2 - 3 - 1$	30	1010	$3^3 + 3$
6	20	$3^2 - 3$	31	1011	$3^3 + 3 + 1$
7	21	$3^2 - 3 + 1$	32	1012	$3^3 + 3^2 - 3 - 1$
8	22	$3^2 - 1$	33	1020	$3^3 + 3^2 - 3$
9	100	3^2	34	1021	$3^3 + 3^2 - 3 + 1$
10	101	$3^2 + 1$	35	1022	$3^3 + 3^2 - 1$
11	102	$3^2 + 3 - 1$	36	1100	$3^3 + 3^2$
12	110	$3^2 + 3$	37	1101	$3^3 + 3^2 + 1$
13	111	$3^2 + 3 + 1$	38	1102	$3^3 + 3^2 + 3 - 1$
14	112	$3^3 - 3^2 - 3 - 1$	39	1110	$3^3 + 3^2 + 3$
15	120	$3^3 - 3^2 - 3$	40	1111	$3^3 + 3^2 + 3 + 1$
16	121	$3^3 - 3^2 - 3 + 1$	41	1112	$3^4 - 3^3 - 3^2 - 3 - 1$
17	122	$3^3 - 3^2 - 1$	42	1120	$3^4 - 3^3 - 3^2 - 3$
18	200	$3^3 - 3^2$	43	1121	$3^4 - 3^3 - 3^2 - 3 + 1$
19	201	$3^3 - 3^2 + 1$	44	1122	$3^4 - 3^3 - 3^2 - 1$
20	202	$3^3 - 3^2 + 3 - 1$	45	1200	$3^4 - 3^3 - 3^2$
21	210	$3^3 - 3^2 + 3$	46	1201	$3^4 - 3^3 - 3^2 + 1$
22	211	$3^3 - 3^2 + 3 + 1$	47	1202	$3^4 - 3^3 - 3^2 + 3 - 1$
23	212	$3^3 - 3 - 1$	48	1210	$3^4 - 3^3 - 3^2 + 3$
24	220	$3^3 - 3$	49	1211	$3^4 - 3^3 - 3^2 + 3 + 1$
25	221	$3^3 - 3 + 1$	50	1212	$3^4 - 3^3 - 3 - 1$

877. Nadere beschouwing der aggregaten van verschillende machten van 3. Volgens de eigenschap van n°. 873 is een natuurlijk getal n in den volgenden vorm te brengen:

$$n = d_k \,.\, 3^k + d_{k-1} \,.\, 3^{k-1} + d_{k-2} \,.\, 3^{k-2} + \ldots + d_1 \,.\, 3 + d_0, \qquad (547)$$

waarin de coëfficiënten d_k, d_{k-1}, ..., d_1, d_0 een der waarden 0, 1, — 1 hebben. Uit (547) volgt:

$$n \leqq d_k \,.\, 3^k + 3^{k-1} + 3^{k-2} + \ldots . + 3 + 1 =$$

$$= d_k \,.\, 3^k + \frac{3^k - 1}{2} = \frac{(2d_k + 1)3^k - 1}{2}. \qquad (548)$$

Hieruit volgt in verband met $n \geqq 1$, dat d_k niet — 1, dus 0 of 1 is.

Begint men de door het tweede lid van (547) aangegeven ontwikkeling met een van nul verschillenden term, dan is dus $d_k = 1$. Hiermede is het in n⁰. 874 verkregen resultaat, *dat bij het aggregaat van verschillende machten van 3 de hoogste macht van 3 het teeken + heeft*, opnieuw aangetoond.

In sommige gevallen is het echter voordeelig nog een of meer hoogere machten van 3 met coëfficiënten 0 toegevoegd te denken [1]).

878. We beschouwen een tweede natuurlijk getal n' en schrijven dit eveneens als een aggregaat van verschillende machten van 3. Men heeft dan

$$n' = d'_k \,.\, 3^k + d'_{k-1} \,.\, 3^{k-1} + \ldots . + d'_1 \,.\, 3 + d'_0,$$

waarin weer d'_k, d'_{k-1}, ..., d'_0 alle 0, 1 of — 1 zijn. Hierbij is aangenomen, dat de ontwikkelingen van n en n' met dezelfde macht van 3 beginnen, iets dat door voorplaatsing van machten van 3 met coëfficiënt nul (zie de opmerking aan het eind van n⁰. 877) steeds te bereiken is.

Zijn nu d_i en d'_i van links gerekend de eerste afwijkende coëfficiënten (dus $d_k = d'_k$, $d_{k-1} = d'_{k-1}$, ..., $d_{i+1} = d'_{i+1}$) en b.v. $d_i > d'_i$; het geval, dat reeds d_k en d'_k verschillend zijn, ligt hierin als $i = k$ opgesloten. Men heeft dan, als men

$$d_k \,.\, 3^k + d_{k-1} \,.\, 3^{k-1} + \ldots . + d_{i+1} \,.\, 3^{i+1} = w$$

stelt (daar d_{i-1}, d_{i-2}, ..., d_0 alle $\geqq - 1$ zijn):

$$n \geqq w + d_i \,.\, 3^i - 3^{i-1} - 3^{i-2} - \ldots . - 3 - 1 =$$

$$= w + d_i \,.\, 3_i - \frac{3^i - 1}{2} = w + \frac{(2d_i - 1)\, 3^i + 1}{2}. \qquad (549)$$

Evenzoo vindt men (daar d'_{i-1}, d'_{i-2}, ..., d'_0 alle $\leqq 1$ zijn):

$$n' \leqq w + d'_i \,.\, 3^i + 3^{i-1} + 3^{i-2} + \ldots . + 3 + 1 =$$

$$= w + \frac{(2d'_i + 1)\, 3^i - 1}{2}. \qquad (550)$$

---

[1]) Dit is geheel analoog met het voorplaatsen van cijfers nul; zie n⁰. 418.

Nu is $d_i \geqq d'_i + 1$, dus:

$$2d_i - 1 \geqq 2d'_i + 1,$$

zoodat men uit (549) en (550) tot $n > n'$ besluit. Hiermede is aangetoond:

Zijn twee getallen ieder als een aggregaat van verschillende machten van 3 geschreven en stemmen de overeenkomstige coëfficiënten (0, 1 of — 1) bij beide ontwikkelingen niet alle overeen, dan is het getal, waarbij de eerste afwijkende coëfficiënt (d. w. z. die behoorende bij de hoogste macht van 3, waarvoor de coëfficiënten niet overeenstemmen) het grootst is, grooter dan het andere getal.

879. Ondubbelzinnigheid der splitsing in een aggregaat van verschillende machten van 3. Uit de eigenschap van n⁰. 878 blijkt, dat twee als aggregaten van verschillende van machten van 3 geschreven natuurlijke getallen ongelijk zijn als die aggregaten niet in alle coëfficiënten overeenstemmen. Dit beteekent: *Een natuurlijk getal is op slechts één manier als een aggregaat van verschillende machten van 3 te schrijven.*

We merken nog op, dat het hiervan gegeven bewijs met voor de hand liggende wijziging kan dienen om de eigenschap van n⁰. 417 aan te toonen. Daartoe begint men met het afleiden van de in n⁰. 420 en 421 verkregen resultaten, waaruit dan verder de eigenschap van n⁰. 417 onmiddellijk volgt.

880. De eigenschap van n⁰. 878 stelt ons in staat *met aggregaten van verschillende machten van 3 te tellen* op geheel soortgelijke wijze als men dit met getallen in het g-tallig stelsel doet (zie n⁰. 422—424); d. w. z. ze levert een middel om de opvolgende natuurlijke getallen direct als zulke aggregaten neer te schrijven. Het is dus niet noodig die getallen eerst in een of ander talstelsel neer te schrijven en ze daarna tot aggregaten van verschillende machten van 3 om te rekenen.

Het achtereenvolgens neerschrijven dier aggregaten, d. w. z. het overgaan op het volgende getal, geschiedt nl. door den laatsten van 1 verschillenden coëfficiënt (dus den van 1 verschillenden coëfficiënt, die behoort bij de laagste macht van 3) met 1 te vermeerderen (dus resp. door 0 of 1 te vervangen als die — 1

of 0 is) en de daarop volgende coëfficiënten 1, zoo die er zijn, alle door — 1 te vervangen. Dit stemt geheel met den in n⁰. 422 gegeven regel overeen, waarbij de coëfficiënten — 1 en 1 resp. dezelfde rol spelen als de cijfers 0 en $g - 1$ van n⁰. 422. De gegeven regel stelt ons op eenvoudige wijze in staat direct de derde kolom van het tafeltje van n⁰. 876 in te vullen.

881. Uit de gelijkheid (547) van n⁰. 877 volgt (daar d_{k-1}, d_{k-2}, ..., d_1, d_0 alle $\geqq - 1$ zijn):

$$n \geqq d_k \,.\, 3^k - 3^{k-1} - 3^{k-2} - \ldots - 3 - 1 =$$

$$= d_k \,.\, 3^k - \frac{3^k - 1}{2} = \frac{(2d_k - 1)\, 3^k + 1}{2}. \qquad (551)$$

Begint men de ontwikkeling niet met een term nul, dan is $d_k = 1$. Uit (548) en (551) volgt dan:

$$\frac{3^k - 1}{2} < \frac{3^k - 1}{2} + 1 \leqq n \leqq \frac{3^{k+1} - 1}{2}. \qquad (552)$$

Omgekeerd zal ook ieder getal n, dat aan (552) voldoet, bij splitsing in een aggregaat van verschillende machten van 3 als hoogste macht van 3 de k^{de} opleveren. Nu is:

$$\frac{3^k - 1}{2} = 3^{k-1} + 3^{k-2} + \ldots + 3 + 1,$$

dus in het drietallig stelsel een getal geschreven met k cijfers 1. Het blijkt dus, *dat het aggregaat dan en alleen dan* 3^k *als hoogste macht van 3 heeft als n grooter is dan het triadische getal 111 . . . . 1 (k cijfers) en* $\leqq$ *111 . . . . 1 (k + 1 cijfers)*. Hieruit zijn de in n⁰. 874 verkregen resultaten onmiddellijk af te lezen.

882. Andere omvormingswijze tot een aggregaat van verschillende machten van 3. Een natuurlijk getal kan ook tot een aggregaat van verschillende machten van 3 worden omgevormd zonder dit eerst in het drietallig stelsel te schrijven. Uit de gelijkheid (547) van n⁰. 877 blijkt nl., dat d_0 de rest der deeling van n door 3 is *als men die rest tot haar absoluut kleinste waarde herleidt*. Is dan:

$$n = 3q_1 + d_0 \quad (-1 \leqq d_0 \leqq 1),$$

dan heeft men, als $d_k = 1$ genomen wordt:

$$q_1 = 3^{k-1} + d_{k-1} \,.\, 3^{k-2} + d_{k-2} \,.\, 3^{k-3} + \ldots + d_2 \,.\, 3 + d_1,$$

zoodat d_1 *de absoluut kleinste rest der deeling van* q_1 *door 3 is*, enz. Men krijgt zoo de betrekkingen:

$$\begin{aligned} n &= 3q_1 + d_0 & (-1 \leqq d_0 \leqq 1),\\ q_1 &= 3q_2 + d_1 & (-1 \leqq d_1 \leqq 1),\\ q_2 &= 3q_3 + d_2 & (-1 \leqq d_2 \leqq 1),\\ &\ldots\ldots & \ldots\ldots\\ q_{k-2} &= 3q_{k-1} + d_{k-2} & (-1 \leqq d_{k-2} \leqq 1),\\ q_{k-1} &= 3 + d_{k-1} & (-1 \leqq d_{k-1} \leqq 1). \end{aligned}$$

Daar de getallen d_0, d_1, d_2, enz. door deze betrekkingen ondubbelzinnig bepaald zijn, is hiermede tevens een ander bewijs der eigenschap van n⁰. 879 geleverd (vergelijk het aan het eind van n⁰. 417 opgemerkte).

883. De in n⁰. 882 besproken omvorming van een getal in het g-tallig stelsel tot een aggregaat van verschillende machten van 3 komt geheel overeen met den in n⁰. 482 besproken overgang op een ander talstelsel door deelingen in het oorspronkelijke talstelsel. Slechts is er dit verschil, *dat men nu de quotiënten steeds zoo kiest, dat de resten in absolute waarde zoo klein mogelijk uitvallen.*

Als voorbeeld nemen we hetzelfde getal als dat van n⁰. 875, hetwelk in het tientallig stelsel luidt 30937. De berekening is nu de volgende:

$$\begin{aligned} 30937 &= 3 \,.\, 10312 + 1,\\ 10312 &= 3 \,.\, 3437 + 1,\\ 3437 &= 3 \,.\, 1146 - 1,\\ 1146 &= 3 \,.\, 382 \quad,\\ 382 &= 3 \,.\, 127 + 1,\\ 127 &= 3 \,.\, 42 + 1,\\ 42 &= 3 \,.\, 14 \quad,\\ 14 &= 3 \,.\, 5 - 1,\\ 5 &= 3 \,.\, 2 - 1,\\ 2 &= 3 \quad - 1, \end{aligned}$$

waaruit blijkt:

$$30937 = 3^{10} - 3^9 - 3^8 - 3^7 + 3^5 + 3^4 - 3^2 + 3 + 1.$$

884. Verband met de formule van Legendre. Men kan uit de voorstelling van een getal n door een aggregaat van verschil-

lende machten van 3 gemakkelijk de som der cijfers in het drietallig stelsel afleiden zonder eerst de omvorming tot een triadisch getal uit te voeren [1]).

Daartoe gaan we de in n⁰. 873 besproken omvorming na en merken op, dat bij overgang van (543) op (544) de coëfficiënten c_{j+1} en $c_j = 2$ resp. door $c_{j+1} + 1$ en -1 vervangen worden, zoodat de som der coëfficiënten (die aanvankelijk de som der cijfers in het drietallig stelsel is) met 2 wordt verminderd. Bij overgang van (544) op (545) (welke overgang alleen wordt uitgevoerd als $c_{j+1} = 2$ is) worden de coëfficiënten c_{j+2} en $c_{j+1} + 1 = 3$ resp. door $c_{j+2} + 1$ en 0 vervangen, zoodat de som der coëfficiënten opnieuw met 2 afneemt. Hetzelfde heeft, voor het geval ook $c_{j+2} = 2$ is, plaats bij overgang van (545) op (546), enz. Komt men zoo op

$$n = c_m \cdot 3^m + c_{m-1} \cdot 3^{m-1} + \ldots + c_{h-1} \cdot 3^{h-1} +$$
$$+ (c_h + 1) \cdot 3^h - 3^j + c_{j-1} \cdot 3^{j-1} + \ldots + c_1 \cdot 3 + c_0, \qquad (553)$$

waarbij $c_h < 2$, dus $c_h + 1 \leqq 2$ is, dan is de som der coëfficiënten in het geheel met $2(h-j)$ afgenomen.

Bij de verdere herleiding blijft de coëfficiënt van 3^h gelijk aan 1 als $c_h = 0$ is en wordt -1 als $c_h = 1$ is. Bijgevolg is in den eindvorm (aggregaat van verschillende machten van 3) $h - j$ het bedrag, waarmede j overtroffen wordt door den exponent van de voorafgaande (hoogere) macht van 3 (met van nul verschillenden coëfficiënt).

Komen in het tweede lid van (553) nog coëfficiënten 2 voor, dan begint men dezelfde herleidingen opnieuw, waarbij de som der coëfficiënten weer eenige malen met 2 afneemt. Zoo doorgaande vindt men:

Is een natuurlijk getal n als een aggregaat van verschillende machten van 3 geschreven, dan is de som der coëfficiënten (1 of — 1) gelijk aan de som der cijfers van n in het drietallig stelsel verminderd met 2S, waarin S voorstelt de som der bedra-

---

[1]) Zoo noodig kan die omvorming tot stand gebracht worden door de in n⁰. 873 besproken herleidingen in tegengestelde volgorde uit te voeren. In het voorbeeld van n⁰. 875 heeft men dan de aaneengeschakelde gelijkheden van achteren naar voren te lezen. We laten het aan den lezer over dit verder na te gaan.

gen, waarmede telkens een exponent van een negatieve macht [1]) *door den voorafgaanden exponent* (*met bijbehoorenden van nul verschillenden coëfficiënt*) *overtroffen wordt.*

885. De eigenschap van n⁰. 884 doet bij een als aggregaat van verschillende machten van 3 geschreven getal n onmiddellijk de som der cijfers als triadisch getal kennen en daarmede den exponent, waarmede 3 in $n!$ voorkomt (zie de eigenschap van n⁰. 846).

Als voorbeeld nemen we

$$n = 3^{20} - 3^{18} - 3^{16} - 3^{13} + 3^{12} - 3^{10} - 3^{6} + 3^{5} - 3^{3} + 3 - 1.$$

De som der coëfficiënten (4 coëfficiënten 1 en 7 coëfficiënten -1) is -3. De som der cijfers in het drietallig stelsel is dus:

$$-3+2\{(20-18)+(18-16)+(16-13)+(12-10)+(10-6)+(5-3)+(1-0)\}=$$

$= -3+2\{(20-13)$ [2]) $+ (12-6)$ [2]) $+ (5-3) + (1-0)\} =$

$$= -3+2(7+6+2+1) = -3+2\,.\,16 = 29.$$

De omzetting van n tot een dekadisch getal is blijkens:

$$n = 3\left[3^2\{3^2(3[3^4\{3^2(3[3^3\{3^2(3^2-1)-1)\}-1]+1)-1\}-1]+1)-1\}+1\right]-1$$

als volgt (vergelijk n⁰. 483):

9	5748	12572817
1 —	1 +	1 +
8	5749	12572818
9 ×	9 ×	9 ×
72	51741	113155362
1 —	1 —	1 —
71	51740	113155361
27 ×	81 ×	9 ×
1917	4190940	1018398249
1 —	1 —	1 +
1916	4190939	1018398250
3 ×	3 ×	3 ×
5748	12572817	3055194750
		1 —
		3055194749

[1]) Met een negatieve macht is hier bedoeld een macht met coëfficiënt -1.

[2]) Een soortgelijke vereenvoudiging kan steeds worden toegepast als twee of meer negatieve termen op elkaar volgen.

Volgens de eigenschap van n⁰. 846 komt 3 dus in $n!$ voor met den exponent

$$\frac{3055194749 - 29}{2} = 1527597360.$$

886. Men kan aan het getal S van n⁰. 884 nog een andere beteekenis toekennen, nl. het *aantal der negatieve termen en dier termen nul, die aan een negatieven term voorafgaan*, d. w. z. waarvoor de eerstvolgende van nul verschillende term negatief is.

Zoo zijn in het voorbeeld van n⁰. 885 de coëfficiënten van het aggregaat, als men ook de termen nul (behoorende bij de exponenten 19, 17, 15, 14, 11, 9, 8, 7, 4, 2) mederekent:

$$1, \overline{0}, -1, \overline{0}, -1, \overline{0}, \overline{0}, -1, 1, \overline{0}, -1, \overline{0}, \overline{0}, \overline{0}, -1, 1, \overline{0}, -1, 0, 1, -$$

De nullen, die aan een coëfficiënt -1 voorafgaan, zijn door een streepje er boven aangewezen. Het aantal dier nullen gevoegd bij dat der coëfficiënten -1 geeft $S = 16$, in overeenstemming met het in n⁰. 885 gevondene.

887. Uitbreiding der voorgaande beschouwingen. De beschouwingen van n⁰. 873—886 zijn uit te breiden tot het geval, dat men het grondtal 3 door een willekeurig (al of niet ondeelbaar) oneven getal g vervangt. Men heeft nl.:

Een natuurlijk getal n is steeds en op slechts één manier in den vorm

$$n = d_k g^k + d_{k-1} g^{k-1} + d_{k-2} g^{k-2} + \ldots + d_1 g + d_0 \qquad (554)$$

te brengen, waarin de coëfficiënten d_k, d_{k-1}, ..., d_0 een der waarden

$$0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \frac{g-1}{2}$$

hebben.

Het eenvoudigst toont men dit weer op de in n⁰. 882 aangegeven wijze aan, nl. door opvolgende deelingen door g, daarbij steeds de quotiënten zoo kiezend, dat de resten absoluut zoo klein mogelijk zijn.

888. De regel om van twee aldus geschreven getallen uit te maken, welk het grootst is, is weer geheel analoog met den in n⁰. 878 gegeven regel. Stemmen nl. de getallen n en n' in de coëfficiënten van g^{i+1} en die van de hoogere machten van g

overeen, terwijl $d_i > d'_i$ is, dan heeft men (daar $d_{i-1}, d_{i-2}, \ldots,$ d_0 alle $\geqq -\frac{g-1}{2}$ en $d'_{i-1}, d'_{i-2}, \ldots, d'_0$ alle $\leqq \frac{g-1}{2}$ zijn):

$$n \geqq w + d_i g^i - \frac{g-1}{2}(g^{i-1} + g^{i-2} + \ldots + g + 1) =$$

$$= w + d_i g^i - \frac{g^i - 1}{2} = w + \frac{(2d_i - 1)g^i + 1}{2},$$

$$n' \leqq w + d'_i g^i + \frac{g-1}{2}(g^{i-1} + g^{i-2} + \ldots + g + 1) =$$

$$= w + \frac{(2d'_i + 1)g^i - 1}{2},$$

waarin:

$$w = d_k g^k + d_{k-1} g^{k-1} + \ldots + d_{i+1} g^{i+1}.$$

Op dezelfde wijze als in n⁰. 878 besluit men hieruit tot $n > n'$.

Men kan nu verder met getallen van den vorm (554) tellen door den laatsten coëfficiënt, die $< \frac{g-1}{2}$ is, met 1 te vermeerderen en de volgende coëfficiënten $\frac{g-1}{2}$ (zoo die er zijn) alle door $-\frac{g-1}{2}$ te vervangen (verg. n⁰. 880).

889. Is een getal in het g-tallig stelsel geschreven, dan kan men het op soortgelijke wijze als de in n⁰. 873 aangegevene tot den vorm (554) herleiden (van rechts naar links). Daartoe vervangen we c_j door $g - (g - c_j)$ en vereenigen den term $g \,.\, g^j = g^{j+1}$ met $c_{j+1}\, g^{j+1}$; hierin is c_j het laatste cijfer van n, dat $> \frac{g-1}{2}$ is. Is $c_{j+1} = g - 1$, dan ontstaat zoo een term

$$(c_{j+1} + 1)g^{j+1} = g^{j+2},$$

die met $c_{j+2}\, g^{j+2}$ tot $(c_{j+2} + 1)\, g^{j+2}$ vereenigd wordt, enz. Deze herleiding wordt door het volgende voorbeeld (waarbij $g = 7$ is) genoegzaam verduidelijkt:

$$\begin{aligned}
662036503 &= 6 \,.\, 7^8 + 6 \,.\, 7^7 + 2 \,.\, 7^6 + 3 \,.\, 7^4 + 6 \,.\, 7^3 + 5 \,.\, 7^2 + 3 = \\
&= 6 \,.\, 7^8 + 6 \,.\, 7^7 + 2 \,.\, 7^6 + 3 \,.\, 7^4 + 7 \,.\, 7^3 - 2 \,.\, 7^2 + 3 = \\
&= 6 \,.\, 7^8 + 6 \,.\, 7^7 + 2 \,.\, 7^6 + 4 \,.\, 7^4 - 2 \,.\, 7^2 + 3 = \\
&= 6 \,.\, 7^8 + 6 \,.\, 7^7 + 2 \,.\, 7^6 + 7^5 - 3 \,.\, 7^4 - 2 \,.\, 7^2 + 3 = \\
&= 7 \,.\, 7^8 - 7^7 + 2 \,.\, 7^6 + 7^5 - 3 \,.\, 7^4 - 2 \,.\, 7^2 + 3 = \\
&= 7^9 - 7^7 + 2 \,.\, 7^6 + 7^5 - 3 \,.\, 7^4 - 2 \,.\, 7^2 + 3.
\end{aligned}$$

890. Ook de beschouwingen van n⁰. 884 blijven met voor de hand liggende wijzigingen doorgaan. Bij ieder der omzettingen wordt een coëfficiënt met g verminderd en de daaraan voorafgaande coëfficiënt met 1 vermeerderd, waardoor de som der coëfficiënten met $g - 1$ afneemt. Is S het aantal dier omzettingen, dan is dus de som der coëfficiënten in de ontwikkeling (554) gelijk aan de cijfersom in het g-tallig stelsel verminderd met $(g - 1)S$; hierin wordt S uit de ontwikkeling (554) afgeleid op de wijze als in de eigenschap van n⁰. 884 is aangegeven.

Zoo blijkt in het voorbeeld van n⁰. 889 uit den laatsten vorm van het daar beschouwde getal (waarvan de coëfficiëntensom 1 is), dat de som der cijfers in het zeventallig stelsel gelijk is aan:

$$1 + 6\{(9 - 7) + (5 - 4) + (4 - 2)\} = 1 + 6 . 5 = 31.$$

891. Talstelsel met wisselend grondtal. Een uitbreiding van het schrijven van een natuurlijk getal in het g-tallig stelsel willen we hier nog vermelden. De bedoelde uitbreiding bestaat daarin, dat de opvolgende machten van g, nl. 1, g, g^2, g^3, g^4, enz., vervangen worden door de producten

$$1,\ g_1,\ g_1g_2,\ g_1g_2g_3,\ g_1g_2g_3g_4,\ \ldots,$$

waarin de getallen g_1, g_2, g_3, enz. alle > 1 zijn. Men heeft dienaangaande de eigenschap:

Is

$$g_1,\ g_2,\ g_3,\ \ldots$$

een oneindig voortloopende rij van gegeven getallen, die alle > 1 *zijn, dan is ieder natuurlijk getal* n *steeds, en op slechts één manier, in den vorm*

$$n = c_m g_1 g_2 \ldots g_m + c_{m-1} g_1 g_2 \ldots g_{m-1} + \ldots +$$
$$+ c_3 g_1 g_2 g_3 + c_2 g_1 g_2 + c_1 g_1 + c_0 \qquad (555)$$

te schrijven, waarin:

$$0 \leqq c_i < g_{i+1}.$$

Neemt men de getallen g_1, g_2, g_3, enz. alle gelijk aan g, dan gaat dit in de schrijfwijze in het g-tallig stelsel over.

892. De eigenschap van n⁰. 891 wordt weer het eenvoudigst bewezen door op te merken, *dat* c_0 *de (niet negatieve) rest der deeling van* n *door* g_1 *is,* c_1 *de rest der deeling van het partiëele quotiënt door* g_2*, enz.* Dit geeft de betrekkingen:

$$
\begin{array}{ll}
n = q_1 g_1 + c_0 & (0 \leqq c_0 < g_1), \\
q_1 = q_2 g_2 + c_1 & (0 \leqq c_1 < g_2), \\
q_2 = q_3 g_3 + c_2 & (0 \leqq c_2 < g_3), \\
\cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\
q_{m-2} = q_{m-1} g_{m-1} + c_{m-2} & (0 \leqq c_{m-2} < g_{m-1}), \\
q_{m-1} = c_m g_m + c_{m-1} & (0 \leqq c_{m-1} < g_m, 0 < c_m < g_{m+1}).
\end{array}
$$

Daar g_1, g_2, g_3, enz. alle > 1 zijn, worden de partiëele quotiënten q_1, q_2, q_3, enz. voortdurend kleiner (m. a. w. $n > q_1 > q_2 > q_3 > \ldots$), zoodat men eindelijk een quotiënt $q_m = c_m$ verkrijgt, waarvoor geldt $q_m < g_{m+1}$. Hiermede breekt de rij gelijkheden af.

Met het voorgaande is tevens de eenvoudigste weg aangegeven om de omvorming tot (555) tot stand te brengen.

893. De eigenschap van n⁰. 891 blijft doorgaan als eenige of oneindig veel der getallen g_1, g_2, g_3, ... de waarde 1 hebben, mits nog oneindig veel dier getallen > 1 zijn. Immers ook dan nemen de quotiënten af tot er een quotiënt komt, waarvoor aan $q_m < g_{m+1}$ voldaan is; slechts is er dit verschil, dat nu sommige opvolgende quotiënten gelijk zijn, nl. $q_{i-1} = q_i$ als $g_i = 1$ is.

Voor $g_i = 1$ volgt uit $0 \leqq c_{i-1} < g_i$, dat $c_{i-1} = 0$ is. Dit maakt, dat dezelfde uitdrukking ontstaat als wanneer g_i niet onder de getallen g_1, g_2, g_3, enz. was opgenomen. Heeft men b.v.:

$$n = c_4 g_1 g_2 g_3 g_4 + c_3 g_1 g_2 g_3 + c_2 g_1 g_2 + c_1 g_1 + c_0$$

en is $g_3 = 1$, dus $c_2 = 0$, dan gaat dit over in:

$$n = c_4 g_1 g_2 g_4 + c_3 g_1 g_2 + c_1 g_1 + c_0,$$

waarbij het getal g_3 geheel is uitgeschakeld. Het heeft dus weinig zin toe te laten, dat sommige der getallen g_1, g_2, g_3, enz. gelijk aan 1 zijn.

894. We laten het aan den lezer over aan te toonen, dat men bij twee getallen, die op de in de eigenschap van n⁰. 891 aangegeven wijze geschreven zijn, het grooter of kleiner zijn op geheel dezelfde wijze beoordeelt als bij de schrijfwijze met een vast grondtal (zie n⁰. 420 en 421). Ook het optellen blijft op geheel soortgelijke wijze geschieden, zooals gemakkelijk is na te gaan.

Voor het uitvoeren van een vermenigvuldiging leent zich echter

de vorm (555) zeer slecht, daar de vermenigvuldiging tot producten van getallen g_i voert, die in den vorm (555) niet voorkomen. Dit maakt, dat de schrijfwijze (555) voor ongelijke getallen g_1, g_2, g_3, enz. practisch zeer aanmerkelijk achterstaat bij de gewone schrijfwijze in een talstelsel.

895. Als een aan het dagelijksch leven ontleend voorbeeld van de schrijfwijze (555) van n^0. 891 nemen we de verdeeling van den tijd in eeuwen, jaren, weken, dagen, uren en minuten (daarbij gemakshalve een jaar op 52 weken stellend). Een tijdvak van c_0 minuten, c_1 uren, c_2 dagen, c_3 weken, c_4 jaren en c_5 eeuwen ($c_0 < 60$, $c_1 < 24$, $c_2 < 7$, $c_3 < 52$, $c_4 < 100$) bevat dan

$$c_5 \,.\, 60 \,.\, 24 \,.\, 7 \,.\, 52 \,.\, 100 + c_4 . 60 . 24 . 7 . 52 + c_3 . 60 . 24 . 7 + c_2 . 60 . 24 + c_1 . 60 + c_0$$

minuten. Door de samenvoeging tot grootere tijdvakken (die b.v. 1000 jaar, 1000000 jaar, enz. bevatten) onbepaald voort te zetten krijgt men volledige overeenstemming met (555).

Tevens doet het voorbeeld nog eens duidelijk uitkomen, dat het geen zin heeft sommige der getallen g_i gelijk aan 1 te nemen (zie n^0. 893). Dit zou nl. daarop neerkomen, dat men aan een zelfde tijdvak meerdere namen toekent en slechts één dier namen gebruikt.

NOTATIES.

Aantal combinaties van n elementen p aan p	C_n^p
deelers van n	$t(n)$
herhalingscombinaties van n elementen p aan p	$\overline{C}_n^p$
permutaties van n elementen	P_n
variaties van n elementen p aan p	V_n^p
Absolute waarde van a	$\mid a \mid$
Aftelbaar oneindig cardinaalgetal	$\mathfrak{a}$
Binomiaalcoëfficiënt van de n^{de} macht	$\binom{n}{k}$
Cardinaalgetallen uit $\mathfrak{a}$ door machtsverheffingen afgeleid	$\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n, \ldots, \mathfrak{a}_\omega, \mathfrak{a}_{\omega+1}, \ldots$
Exponent, waarmede zeker priemgetal in $n!$ voorkomt	$\varepsilon(n)$
Gelijkwaardigheid der hoeveelheden A en B	$A \backsim B$
Getallenpaar gevormd door a en b	(a, b)
Grondtal van het talstelsel	g
Hoeveelheid der beleggingen van de hoeveelheid B met elementen der hoeveelheid A	A^B
Indicator van n	$\varphi(n)$
Kleinste transfiniet ordinaalgetal	ω
Partiëel quotiënt der deeling van a door b	$\left[\frac{a}{b}\right]$
Product der deelers van n	$P(n)$
der getallen $a_1, a_2, \ldots, a_n$	P_n
der getallen $1, 2, \ldots, n$	$n!$
Som der cijfers van n	$s(n)$
der deelers van n	$S(n)$
der getallen $a_1, a_2, \ldots, a_n$	$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$

LIJST DER TAFELS.

REGISTER.

(De getallen verwijzen naar de bladzijden).

CORRIGENDA ET ADDENDA.

Blz. 12,	r. 16	v. o.	staat: DEDEKIND	lees: RICHARD DEDEKIND (Was sind und was sollen die Zahlen?, 1888)
Blz. 132,	r. 7	v. b.	staat: voor $n = 0$	lees: voor $n = 1$
Blz. 175,	r. 14	v. b.	staat: is (moet	lees: is) moet
Blz. 176,	r. 1	v. o.	staat: dit getal	lees: dit getal, dat de ***indicator*** *van n* genoemd wordt,
Blz. 181,	r. 10	v. b.	staat: (zie n°. 168),	lees: (zie n°. 168), waaronder $a : b$ te verstaan is als a door b deelbaar is,
Blz. 186,	r. 16	v. b.	staat: **404.**	lees: **404. Verdere eigenschappen betreffende G. G. D. en K. G. V.**
Blz. 195,	r. 4	v. b.	staat: in n°. 482).	lees: in n°. 482); hierbij is de rest van een opgaande deeling als 0 te beschouwen.
Blz. 206,	r. 6	v. o.	staat: beschowd	lees: beschouwd
Blz. 209,	r. 6	v. o.	staat: in n°. 434	lees: in n°. 443
Blz. 215,	r. 12	v. b.	staat: hetgeen	lees: waarin r de rest der deeling van a door b is, hetgeen
Blz. 269,	r. 3	v. b.	staat: *geheel getal van*	lees: *geheel van*
	r. 4	v. b.	staat: *schillend*	lees: *schillend getal*
Blz. 302,	r. 3	v. b.	staat: C_2^{2n-1}	lees: C_{2n}^{2n-1}
Blz. 319,	r. 5	v. b.	staat: $a = Ga' c$	lees: $a = Ga', c$
Blz. 346,	r. 6	v. b.	staat: en de	lees: en die der
Blz. 357,	r. 13	v. o.	staat: *kleinste getal*	lees: *kleinste natuurlijke getal*
Blz. 399,	r. 7	v. b.	staat: en	lees: *en*
Blz. 412,	r. 6	v. b.	staat: 47 deelbaar,	lees: 47,
Blz. 415,	r. 8	v. o.	staat: $\left[\frac{q^i}{p}\right]$,	lees: $\left[\frac{q_i}{p}\right]$,
Blz. 423,	r. 2	v. o.	staat: c_{m+1}	lees: c_{m-1}
Blz. 424,	r. 1	v. b.	staat: *voorkomt is,*	lees: *voorkomt, is*
	r. 1	v. o.	staat: $s = n$.	lees: $s(n) = n$.

NOORDHOFF's verzameling van Wiskundige Werken.

VERSCHENEN:

1. Prof. Dr. Hk. de VRIES. **DE VIERDE DIMENSIE.** Eene inleiding tot de vergelijkende studie der verschillende meetkunden. Prijs gebonden **f 3.25.**

2. Prof. Dr. F. SCHUH. **GREPEN UIT DE MODERNE MEETKUNDE.** Eerste deel: Reciproke transformaties in het vlak en in de ruimte. Hyperboloïden en kegelsneden. Harmonische eigenschappen en cirkelbundels. Prijs geb. **f 9.50.**

3. Prof. Dr. G. SCHOUTEN. **DE GRONDSLAGEN DER REKENKUNDE** met toepassingen op grenswaarden, oneindige reeksen en produkten, gedurige breuken, dubbelreeksen. Prijs geb. **f 2.50.**

4. Prof. Dr. J. A. BARRAU. **ANALYTISCHE MEETKUNDE.** Eerste deel: Het platte vlak. Prijs geb. **f 8.50.** Tot 1 Dec. 1918 voor ab's N. T. v. Wisk. *f* **5.90.**

5. Prof. Dr. F. SCHUH. **LEERBOEK DER THEORETISCHE REKENKUNDE.** Eerste deel: Natuurlijke getallen en cardinaalgetallen. Het rekenen in talstelsels en met positieve en negatieve getallen. Binomium van Newton en de stellingen van Fermat en Euler. Onbepaalde vergelijkingen en kenmerken van deelbaarheid. Ontbinding der faculteiten. Prijs geb. **f 8.50.** Tot 1 Jan. 1919 voor ab's N. T. v. Wisk. **f 5.90.**

IN BEWERKING:

Prof. Dr. F. SCHUH. **Grepen uit de moderne meetkunde.** Tweede deel: Reciproke transformatie t. o. v. een hyperboloïde; nulsysteem. Gelijkvormigheidstransformatie. Transformatiegroepen.

Prof. Dr. Hk. de VRIES. **Leerboek der Differentiaal- en Integraalrekening en van de Diff. Vergelijkingen.**

Prof. Dr. J. G. RUTGERS. **Inleiding tot de Analytische Meetkunde.**

Prof. Dr. F. SCHUH. **Leerboek der Hoogere Algebra.**

BINNENKORT TE VERSCHIJNEN:

Prof. Dr. **F. SCHUH.** *Beknopt Leerboek der Theoretische Rekenkunde.* Eerste deel: Natuurlijke getallen en deelbaarheidseigenschappen. Het rekenen in talstelsels en met positieve en negatieve getallen. Binomium van Newton en de stelling van Fermat. Indicator en de stelling van Euler. Onbepaalde vergelijkingen en kenmerken van deelbaarheid. Vierkantsworteltrekking en eindcijfers van vierkanten. Priemgetallen en ontbinding in priemfactoren.

NIEUW TIJDSCHRIFT VOOR WISKUNDE

onder redactie van

H. G. A. VERKAART en P. WIJDENES,
Roermond. Amsterdam.

Met medewerking van de professoren:

Dr. F. SCHUH, Dr. Hk. DE VRIES en Dr. J. DE VRIES,
Delft. Amsterdam. Utrecht.

en van

H. J. BARTELINGS Jr., C. A. CIKOT, Dr. M. v. EVERDINGEN,
Dr. B. GONGGRIJP, W. J. HEYDEMAN, P. JANSEN,
Dr. J. STEIN S.J. en H. VERHAGEN.

6e Jaargang 1918/19.

Verschijnt in tweemaandelijksche afleveringen van ongeveer 4 vel druks.

Prijs f 5.00 per jaargang.

Uitgaven van P. NOORDHOFF te Groningen.

138